Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 769–772
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse fonctionnelle

Régularité d'opérateurs non bornés dans les modules de Hilbert

Stéphane Damaville

Université de Münster, Einsteinstrasse 62, 48149 Münster, Allemagne

Reçu le 21 décembre 2004 ; acceptè après révision le 20 mars 2007
Disponible sur Internet le 5 juin 2007
Présenté par Alain Connes

Résumé

On montre dans cette Note que la somme et le produit d'opérateurs réguliers, moyennant certaines conditions sur les domaines et images des opérateurs, est un opérateur régulier. Ceci nous permet de trouver un critère simple pour montrer, étant donné un opérateur non borné d dans un module de Hilbert, d'une part qu'il est régulier, d'autre part que la résolvante de la somme de l'opérateur d et de son adjoint d^* est compacte. On applique enfin ce résultat pour associer un élément de K-théorie à l'opérateur de signature sur une variété lipschitzienne munie de l'action propre d'un groupe discret. ***Pour citer cet article : S. Damaville, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Regularity of unbounded operators in C^*-modules. In this Note, first we give conditions which permit the determination of the sum or the product of regular operators in C*-modules, and then we give a criteria on an unbounded operator d in a C*-module under which it is regular, the sum with his adjoint $d + d^*$ is regular and the resolvent of $d + d^*$ is compact. Finally, we apply these results to show that the signature operator on a Lipschitz manifold with proper group action, determines an element of K-theory of the C*-reduced algebra of the group. ***To cite this article: S. Damaville, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

1. Introduction

Dans leur Note [1], S. Baaj et P. Julg fournissent un outil très puissant en établissant que les éléments du groupe de Kasparov $KK(A, B)$, A et B étant des C*-algèbres, sont définis par des opérateurs non bornés dans des modules de Hilbert. Plus précisément, par ce qu'ils appellent des bimodules de Kasparov non bornés :

Définition 1.1. Soient A, B des C*-algèbres. On appelle A, B bimodule de Kasparov non borné, tout couple (E, D), où E est un A, B bimodule et D un opérateur régulier de degré 1 vérifiant :

(1) $D = D^*$,

(2) $a(1 + D^2)^{-1} \in \mathcal{K}(E)$ (morphismes compacts sur E), pour tout $a \in A$,

(3) l'ensemble des $a \in A$, tels que $[D, a] = Da - (-1)^{\deg a} aD$ soit défini sur $\operatorname{dom} D$ et se prolonge en un morphisme sur E est dense dans A.

Adresse e-mail : stephane.damaville@wanadoo.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.03.020

Le problème est que l'on dispose de peu de moyens ou peu adéquats pour montrer la régularité d'un opérateur dans un module de Hilbert. L'étude menée ici permet d'obtenir un critère simple assurant la régularité d'un opérateur d et la compacité de la résolvante de $d + d^*$.

Un des intérêts de ce résultat est qu'il permet d'associer à l'opérateur de signature un élément de K-théorie dans des situations géométriques qui posent problèmes, à savoir quand on ne dispose pas d'un calcul pseudo-différentiel global sur l'espace considéré. Le cas étudié ici, qui généralise notamment un résultat de M. Hilsum [3,4], est celui de l'opérateur de signature sur une variété lipschitzienne sur laquelle agit proprement un groupe discret.

Avant tout, donnons une nouvelle caractérisation (iii) des opérateurs réguliers largement utilisée par la suite. Désignons par E, F et H des modules de Hilbert sur une C*-algèbre A et notons $\mathrm{Mor}(E, F)$ l'ensemble des morphismes de E dans F, c'est-à-dire l'ensemble des applications de E dans F qui admettent un adjoint.

Proposition 1.2. *Soit $T : E \to F$ un opérateur fermé, densément défini ainsi que son adjoint. Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *T est régulier,*

(ii) *le graphe $\mathrm{G}(T)$ de T est orthocomplémenté,*

(iii) *il existe un A-module de Hilbert H et un morphisme $R \in \mathrm{Mor}(H, E)$ tel que* $\operatorname{im} R = \operatorname{dom} T$.

Démonstration. On trouve la preuve de (i) $\Leftrightarrow$ (ii) dans [5]. (i)$\Rightarrow$(iii) Posons $H = G(T)$ et $R = pi$, où $i : G(T) \to E \oplus F$ est l'inclusion et $p : E \oplus F \to E$ la projection sur E. (iii)$\Rightarrow$(ii) Définissons $Q : H \to E \oplus F$ par $Q(x) = (Rx, TRx)$. L'implication découle de $\operatorname{im} Q = G(T)$ fermée et $Q \in \mathrm{Mor}(H, E \oplus F)$. $\square$

2. Composition d'opérateurs réguliers

Commençons par donner des conditions assurant la régularité de la composée d'opérateurs réguliers.

Lemme 2.1. *Soient $T : E \to F$ et $S : F \to H$ deux opérateurs réguliers tels que* : $\operatorname{im} T + \operatorname{dom} S = F$. *Alors, il existe deux morphismes $Q \in \mathrm{Mor}(F)$ et $R \in \mathrm{Mor}(F, E)$ tels que* : $\operatorname{im} Q \subset \operatorname{dom} S$, $\operatorname{im} R \subset \operatorname{dom} T$ *et* $Q + TR = \mathrm{id}_F$.

Démonstration. Un inverse à droite pour l'opérateur surjectif $\mathrm{G}(T) \oplus \mathrm{G}(S) \to F : ((x, y), (y', z)) \mapsto y + y'$ permet de construire les opérateurs R et Q. $\square$

Lemme 2.2. *Soient $T : E \to F$ et $S : F \to H$ deux opérateurs réguliers tels que* : $\operatorname{im} T + \operatorname{dom} S = F$. *Alors, avec les notations précédentes, on a l'égalité suivante sur les domaines* : $\operatorname{dom} ST = R \operatorname{dom} S + (1 - RT) \operatorname{dom} T$.

Lemme 2.3. *Soient $T : E \to F$ et $S : F \to H$ deux opérateurs réguliers tels que* : $\operatorname{im} T + \operatorname{dom} S = F$. *Alors, le domaine de l'opérateur ST est essentiel pour T et on a $T^* S^* = (ST)^*$.*

Démonstration. On note R et Q les morphismes du Lemme 2.1. Pour montrer que $\operatorname{dom} ST$ est essentiel pour T, on approche $(x, Tx) \in G(T)$ par (x_n, Tx_n), où $x_n = Ry_n + (1 - RT)x$ et $y_n \in \operatorname{dom} S$ tel que $Tx = \lim y_n$.

Pour obtenir $(ST)^* \subset T^* S^*$, on montre que, pour $z \in \operatorname{dom}(ST)^*$ et $y \in \operatorname{dom} S$, on a : $\langle ((SQ)^* + R^*(ST)^*)z, y\rangle = \langle z, Sy\rangle$, et ensuite que $S^* z \in \operatorname{dom} T^*$. $\square$

Proposition 2.4. *Soient $T : E \to F$ et $S : F \to H$ deux opérateurs réguliers vérifiant* :

(1) $\operatorname{im} T + \operatorname{dom} S = F$,

(2) $\operatorname{im} S^* + \operatorname{dom} T^* = F$.

Alors, l'opérateur ST est régulier et $(ST)^* = T^* S^*$.

Démonstration. Se déduit des lemmes précédents appliqués à S, T et S^*, T^*. $\square$

Notons que cette proposition permet de retrouver que la composition T^*T, d'un opérateur régulier et de son adjoint, est un opérateur régulier autoadjoint.

3. Somme d'opérateurs réguliers

Du résultat précédent, on déduit des conditions sur les opérateurs réguliers pour pouvoir effectuer leur somme.

Proposition 3.1. *Soient S, T des opérateurs réguliers de E dans F vérifiant* :
(1) $\operatorname{dom} T + \operatorname{dom} S = E$,
(2) $\operatorname{dom} S^* + \operatorname{dom} T^* = F$.
Alors, l'opérateur $S + T$ *est régulier et* $(S + T)^* = S^* + T^*$.

Démonstration. On se ramène au cas précédent en considérant les opérateurs $S_1 : E \oplus F \to F$, $S_1(x, y) = Sx + y$, et $T_1 : E \to E \oplus F$, $T_1(x) = (x, Tx)$. □

Corollaire 3.2. *Soit T un opérateur régulier de E dans lui-même tel que* $\operatorname{im} T \subset \operatorname{dom} T$. *Alors, l'opérateur* $T + T^*$ *est régulier autoadjoint.*

4. Compacité de la résolvante

On s'attache à présent à étudier le cas particulier des opérateurs dont l'image est incluse dans leur domaine.

Lemme 4.1. *Soit* $d : E \to E$ *un opérateur fermé, densément défini, vérifiant* $\operatorname{im} d \subset \ker d$ *et tel que son adjoint soit densément défini. Alors on a l'égalité* : $(d + d^* + i)(d + d^* - i) = 1 + d^*d + dd^*$.

Lemme 4.2. *Soit* $d : E \to E$ *un opérateur fermé, densément défini, vérifiant* $\operatorname{im} d \subset \ker d$ *et tel que son adjoint soit densément défini. Les opérateurs* $d + d^* \pm i$ *sont surjectifs si et seulement si l'opérateur d est régulier.*

Proposition 4.3. *Soit* $d : E \to E$ *un opérateur fermé, densément défini, vérifiant* $\operatorname{im} d \subset \operatorname{dom} d$ *et tel que son adjoint soit densément défini. S'il existe des morphismes a, b et k de E dans E dont l'image est incluse dans le domaine de l'opérateur d et vérifiant, sur le domaine de d, l'égalité* $da + bd = 1 + k$, *alors l'opérateur d est régulier.*

Démonstration. On vérifie que l'opérateur $R : E^3 \to E$ donné par $R(x, y, z) = dax + by + kz$ est un morphisme tel que $\operatorname{im} R = \operatorname{dom} d$. On conclue grâce à 1.2. □

En ajoutant une hypothèse de compacité sur les morphismes a, b et k, on obtient le résultat cherché :

Théorème 4.4. *Soit* $d : E \to E$ *un opérateur fermé, densément défini ainsi que son adjoint. Notons* (P) *et* (Q) *les propriétés suivantes* :
(P) *Il existe des morphismes compacts a, b et k de E dans E dont l'image est incluse dans le domaine de d, et vérifiant l'égalité* $da + bd = 1 + k$ *sur le domaine de d.*
(Q) *Les opérateurs* $(d + d^* \pm i)^{-1}$ *sont des morphismes compacts.*
Si l'image de l'opérateur d est incluse dans son domaine alors (P) $\Rightarrow$ (Q) ; *Si l'opérateur d vérifie* $\operatorname{im} d \subset \ker d$ *alors les propriétés* (P) *et* (Q) *sont équivalentes.*

Démonstration. (P) $\Rightarrow$ (Q) : Les Propositions 4.3 et 3.2 impliquent que les opérateurs $d + d^* \pm i$ sont bijectifs. On vérifie que $r = (d + d^* + i)^{-1}$ est un morphisme. La compacité de r découle de : $r^*dar + r^*bdr = r^*r + r^*kr$.

(Q) $\Rightarrow$ (P) : Les opérateurs $k = (1 + dd^* + d^*d)^{-1}$ et $a = b = (d + d^*)k$ vérifient les conditions requises sur $\operatorname{dom} d^*d$. Le Lemme 4.2 permet de prolonger l'égalité sur le domaine de d. □

5. Opérateur de signature sur variété lipschitzienne

Sur une variété lipschitzienne, les notions de formes différentielles, dérivée extérieure, métriques riemanniennes, sont définies dans [8]. Pour pouvoir utiliser le Théorème 4.4, la méthode consiste à interpréter l'opérateur de différentiation extérieure comme un opérateur non borné sur un module de Hilbert construit à partir de l'espace des formes différentielles sur la variété.

Considérons V une variété lipschitzienne, notons $L^2(V)$ l'espace des formes différentielles sur V.

Une métrique riemannienne détermine également l'opérateur de Hodge $*$ qui permet d'avoir un produit scalaire sur $L_c^2(V)$ l'espace des formes différentielles à support compact : $(\omega, \eta) = \int \overline{\omega} \wedge *\eta$ pour $\omega, \eta \in L_c^2(V)$. Muni de ce produit scalaire, le complété de l'espace $L_c^2(V)$ est un espace de Hilbert.

Enfin, on note $L(V)$ le sous-espace dense dans $L_c^2(V)$ formé des formes différentielles plates à support compact, une forme $\omega \in L_c^2(V)$ étant dite plate si la forme $d\omega$ existe et si les formes ω et $d\omega$ sont bornées.

On considère un groue discret G agissant à droite proprement sur V tel que le quotiet V/G soit compact. On suppose de plus que, pour tout $f \in G$, l'application (notée g)

$$V \to V, \qquad x \mapsto xg$$

est lipschitzienne.

Pour construire un module de Hilbert associé à l'action propre du groupe, on reprend alors une idée d'A. Connes [2, p. 97] ou d'A.S. Mishchenko et A.T. Fomenko pour les actions libres [6].

On munit l'espace $L(V)$ d'une structure de $\mathbf{C}[G]$-module à droite par :

$$L(V) \times \mathbf{C}[G] \to L(V), \qquad \left(\xi, \sum_{g\in G} \lambda_g g\right) \mapsto \sum_{g\in G} \lambda_g g^* \xi$$

où $g^*\xi$ désigne le pull back de la forme ξ par l'application lipschitzienne g.

On construit une métrique riemannienne lipschitzienne G-invariante sur la variété V pour définir un produit scalaire sur $L(V)$: $\langle \xi, \eta \rangle(g) = \int_V \bar{\xi} \wedge *(g^{-1})^* \eta$ pour $\xi, \eta \in L(V)$, $g \in G$. Alors le complété de l'espace $L(V)$ pour la norme issue de ce produit scalaire est un module de Hilbert E sur $C_r^*(G)$ la C*-algèbre réduite de G.

L'opérateur de différentiation extérieure sur $L(V)$ détermine alors un opérateur non borné d sur E.

Proposition 5.1. *Il existe deux morphismes compacts t et k sur le module de Hilbert E, vérifiant* : $\operatorname{im} t \subset \operatorname{dom} d$, $\operatorname{im} k \subset \operatorname{dom} d$ *et* $dt + td = 1 + k$,*sur le domaine de* d.

Démonstration. Un slice U_x en x [7], voisinage de x invariant par le stabilisateur $G(x)$ de x et vérifiant $\{g \in G;\, U_x \cap U_x.g \neq \emptyset\} = G(x)$, permet d'écrire $U_x.G$ comme réunion disjointe des $U_x.g$ où g parcourt $G/G(x)$. On construit un homomorphisme involutif r de la sous-C*-algèbre B de $\mathcal{L}(L(V))$ composée des opérateurs invariants par $G(x)$ et à support dans U_x, dans la C*-algèbre $\mathrm{Mor}(E)$: soit $a \in B$, on définit $r(a)$ sur les formes de $L(V)$ à support compact dans $U_x.G$ comme suit : sur chaque $U_x.g$, on pose : $r(a) = r(a)_g = g^* a (g^{-1})^*$. $r(a)$ s'étend sur E.

Du recouvrement $\{U_x.G, x \in G\}$ et de la compacité de V/G, on extrait un sous-recouvrement fini auquel on associe une partition de l'unité lipschitzienne $\{\varphi_i\}$ où φ_i est $G(x_i)$-invariante. Pour chaque i, on exhibe deux opérateurs pseudo-différentiels à support dans U_{x_i}, t_i de degré -1 et k_i régularisant vérifiant $dt_i + t_i d = M_{\varphi_i} + k_i$ sur le domaine de d (M_{φ_i} désigne l'opérateur de multiplication par φ_i). L'égalité s'étend avec r sur $U_{x_i}.G$, puis sur V avec la partition de l'unité. □

Ainsi, d'après 4.4, l'opérateur de signature sur une variété lipschitzienne, munie de l'action propre d'un groupe discret G, détermine une classe de K-théorie de $C_r^*(G)$.

Références

[1] S. Baaj, P. Julg, Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les modules hilbertiens, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. 296 (21) (1983) 875–878.

[2] A. Connes, Noncommutative Geometry, Academic Press, 1994.

[3] M. Hilsum, Signature operator on Lipschitz manifolds and unbounded Kasparov bimodules, in: Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory, in: Lecture Notes in Math., vol. 1132, Springer, 1985, pp. 254–288.

[4] M. Hilsum, Fonctorialité en K-théorie bivariante pour les variétés lipschitziennes, K-theory 3 (1989) 401–440.

[5] E.C. Lance, Hilbert C^*-Modules, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 210, Cambridge University Press, 1994.

[6] A.S. Mishchenko, A.T. Fomenko, The index of elliptic operators over C*-algebras, Math. USSR Izv. 15 (1980) 87–112.

[7] R. Palais, On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, Ann. of Math. 73 (2) (1961) 295–323.

[8] N. Teleman, The index of the signature operator on Lipschitz manifolds, Publ. Math. I.H.E.S. 58 (1983) 39–78.