

## Géométrie

# Un théorème de convexité réel pour les applications moment à valeurs dans un groupe de Lie

Florent Schaffhauser

*Department of Mathematics, Keio University, Hiyoshi 3-14-1, Kohoku-ku 223-8522, Yokohama, Japan*

Reçu le 14 août 2006 ; accepté après révision le 29 mai 2007

Présenté par Michel Duflou

---

### Résumé

Dans cette Note, nous présentons l'énoncé et les principales idées de la démonstration d'un théorème de convexité réel pour les applications moment à valeurs dans un groupe de Lie. Ce résultat est un analogue quasi-hamiltonien du théorème de O'Shea et Sjamaar dans le cadre hamiltonien usuel. On démontre que l'image par l'application moment du lieu des points fixes d'une involution renversant la 2-forme de structure d'un espace quasi-hamiltonien est un polytope convexe, et l'on décrit ce polytope comme sous-polytope du polytope moment. *Pour citer cet article : F. Schaffhauser, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**A real convexity theorem for group-valued momentum maps.** In this Note, we state and give the main ideas of the proof of a real convexity theorem for group-valued momentum maps. This result is a quasi-Hamiltonian analogue of the O'Shea–Sjamaar theorem in the usual Hamiltonian setting. We prove here that the image under the momentum map of the fixed-point set of a form-reversing involution defined on a quasi-Hamiltonian space is a convex polytope, that we describe as a subpolytope of the momentum polytope. *To cite this article: F. Schaffhauser, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

---

### Abridged English version

Let  $(G, (\cdot | \cdot))$  be a compact connected Lie group whose Lie algebra  $\mathfrak{g} := \text{Lie}(G)$  is endowed with an  $Ad$ -invariant (positive definite) scalar product  $(\cdot | \cdot)$ . We denote by  $\theta^L = g^{-1}.dg$  and by  $\theta^R = dg.g^{-1}$  the Maurer–Cartan 1-forms on  $G$  and by  $\chi$  the Cartan 3-form, that is to say the bi-invariant 3-form defined for  $X, Y, Z \in \mathfrak{g} = T_1G$  by  $\chi_1(X, Y, Z) := ([X, Y] | Z)$ . When  $G$  acts on a manifold  $M$ , we denote by  $X_x^\sharp := \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(tX).x)$  the fundamental vector field associated to  $X \in \mathfrak{g}$  by the action of  $G$  on  $M$ . A quasi-Hamiltonian  $G$ -space  $(M, \omega, \mu : M \rightarrow U)$  is a manifold  $M$ , acted upon by the group  $G$ , endowed with an invariant 2-form  $\omega$  such that there exists an equivariant map  $\mu : M \rightarrow G$  (for the conjugacy action of  $G$  on itself) satisfying:

---

Adresse e-mail : [florent@math.jussieu.fr](mailto:florent@math.jussieu.fr).

- (i)  $d\omega = -\mu^*\chi$ ;
- (ii) for all  $x \in M$ ,  $\ker \omega_x = \{X_x^\sharp : X \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad } \mu(x).X = -X\}$ ;
- (iii) for all  $X \in \mathfrak{g}$ , the interior product  $\iota_{X^\sharp}\omega$  satisfies  $\iota_{X^\sharp}\omega = \frac{1}{2}\mu^*(\theta^L + \theta^R \mid X)$ .

This notion was introduced by Alekseev, Malkin and Meinrenken in [1] and basic examples include the conjugacy classes of the Lie group  $G$ . The map  $\mu$  is called the *momentum map*, underlining the important analogies with usual Hamiltonian spaces that one encounters in the study of quasi-Hamiltonian spaces. In the rest of this paper, the compact connected Lie group  $G$  will be assumed to be simply connected as well. In [1], Alekseev, Malkin and Meinrenken showed that in this case the intersection of the image  $\mu(M)$  of the momentum map  $\mu$  with a fundamental domain  $\exp(\overline{\mathcal{W}})$  for the conjugacy action ( $\mathcal{W} \subset \mathfrak{g}$  is a Weyl alcove in the Lie algebra of  $G$ ) is a convex polytope (a result which they derived from Meinrenken and Woodward in [12]). Here, we study the image  $\mu(M^\beta)$  under the momentum map of the fixed-point set  $M^\beta$  of an involution  $\beta$  defined on  $M$  satisfying  $\beta^*\omega = -\omega$  (we shall say that  $\beta$  reverses the structural 2-form  $\omega$ ) and additional compatibility relations with the action and the momentum map (see Theorem 2.1). To formulate these compatibility conditions, the group  $G$  is assumed to be endowed with an involutive automorphism  $\tau$ . Additionally, we assume that the involution  $\tau^-(g) := \tau(g^{-1})$  leaves a *maximal* torus  $T$  of  $G$  *pointwise* fixed. Such an involution always exists on a compact connected simply connected Lie group (see [11]). Under this assumption, we show (Theorem 2.1) that the set  $\mu(M^\beta) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$  is a convex set, and that it is in fact equal to the whole momentum polytope  $\mu(M) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$ . The proof is sketched in Section 3 and details are available in [14]. It rests on the existence of a symplectic cross-section  $N \subset M$ , to which one applies Duistermaat theorem in [6] to show that:

$$\mu(M^\beta) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}}) = \overline{\mu(N^\beta)} = \overline{\mu(N)} = \mu(M) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}}).$$

In a forthcoming paper, we shall try to show that when we drop the assumption that  $\tau^-$  leaves pointwise fixed a *maximal* torus  $T$  of  $G$ , we still have that  $\mu(M^\beta) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$  is a convex subpolytope of the momentum polytope  $\mu(M) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$ , obtained, in an exact analogy with the usual Hamiltonian case treated in [13], by intersecting it with  $\text{Fix}(\tau^-)$ . Applications of Theorem 2.1 include the construction of Lagrangian submanifolds in representation spaces of surface groups, for which we refer to [14], where we give an example of an involution  $\beta$  satisfying the assumptions of the theorem.

## 1. Introduction

Les propriétés de convexité de l'image d'une application moment, qu'elle soit à valeurs dans le dual d'une algèbre de Lie (cas hamiltonien usuel) ou à valeurs dans un groupe de Lie (cas quasi-hamiltonien) ont été étudiées de divers points de vue depuis le début des années 1980. Le premier résultat a été obtenu indépendamment par Atiyah dans [2] et par Guillemin et Sternberg dans [7], et concerne les actions hamiltoniennes de groupes compacts connexes *abéliens*, c'est-à-dire des actions hamiltoniennes de tores, sur des variétés symplectiques connexes compactes. Le cas des actions hamiltoniennes de tores sur des variétés symplectiques connexes non nécessairement compactes (l'application moment est alors supposée propre) a été traité plus tard par Condevaux, Dazord et Molino dans [5]; leurs idées ont été reprises et développées par Hilgert, Neeb et Plank dans [9]. Le cas des actions hamiltoniennes de groupes compacts connexes *non-abéliens* a été traité par Kirwan dans [10], prouvant une conjecture de Guillemin et Sternberg dans [8] (où est traité le cas kählérien). Le théorème de Kirwan a ensuite été étendu aux variétés symplectiques connexes non nécessairement compactes dans [5,9] et [15]. Si l'on s'intéresse maintenant aux actions quasi-hamiltoniennes de groupes compacts connexes, il faut, pour pouvoir parler de convexité, supposer de plus que le groupe considéré est *simplement connexe*. En effet, le cas hamiltonien montre que les propriétés de convexité de l'image de l'application moment sont obtenues en considérant l'intersection de cette image avec un domaine fondamental pour l'action co-adjointe (c'est-à-dire l'action du groupe sur l'espace où l'application moment prend ses valeurs), y compris dans le cas abélien, où l'action co-adjointe est triviale. En procédant de même dans le cas quasi-hamiltonien, c'est-à-dire en considérant l'intersection de l'image du moment avec un domaine fondamental de l'action du groupe sur lui-même par conjugaison, on constate qu'un tel domaine fondamental s'identifie à une partie convexe de l'algèbre de Lie du groupe considéré si et seulement si celui-ci est simplement connexe (voir par exemple [4] ou [11]). En conséquence, pour que la notion de convexité ait un sens pour les applications moment à valeurs dans un groupe compact, on se limitera aux groupes compacts connexes et simplement connexes.

Fixons un tel groupe  $G$ , compact connexe et simplement connexe. Le cas hamiltonien usuel distingue deux types de résultats : le théorème de convexité de Guillemin–Sternberg–Kirwan et le théorème de convexité dit *réel* de O’Shea et Sjamaar [13] où l’on étudie l’image par l’application moment du lieu des points fixes d’une involution anti-symplectique  $\beta$  définie sur l’espace hamiltonien  $M$  considéré. Le lieu des points fixes  $M^\beta := \text{Fix}(\beta)$  (supposé non vide) d’une telle involution est en particulier une sous-variété lagrangienne de  $M$ . En référence à une idée d’Atiyah exposée dans [6] (où Duistermaat étudie le cas des actions hamiltoniennes de tores en présence d’une involution anti-symplectique) consistant à voir les grassmaniennes réelles comme sous-variétés lagrangiennes des grassmaniennes complexes, les résultats de convexité concernant l’image par l’application moment de la sous-variété  $M^\beta$  portent le nom de théorèmes de convexité *réels*. Si un tel résultat est connu dans le cadre hamiltonien usuel (voir [13]), ce n’est à notre connaissance pas le cas dans le cadre quasi-hamiltonien, où l’on dispose uniquement d’un résultat de convexité concernant l’image par le moment de la variété  $M$  tout entière, dû à Meinrenken et Woodward (voir [12] et [1]).

Le but de la présente Note est de donner l’énoncé et le principe de la preuve d’un tel théorème de convexité réel pour les actions quasi-hamiltoniennes de groupes de Lie compact connexes et simplement connexes (Théorème 2.1).

## 2. Énoncé du théorème

Le théorème suivant est démontré en détail dans [14]. Nous indiquons dans la Section 3 les principales idées et étapes de la démonstration. Dans toute la suite, on se donne un groupe de Lie compact connexe et simplement connexe  $G$ , dont l’algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  est supposée munie d’un produit scalaire (défini positif)  $Ad$ -invariant  $(\cdot | \cdot)$ , et un  $G$ -espace quasi-hamiltonien connexe  $(M, \omega, \mu : M \rightarrow G)$  (notion introduite dans [1]). Pour pouvoir étudier les propriétés de convexité de l’application moment  $\mu$ , on se donne un domaine fondamental de l’action de  $G$  sur lui-même par conjugaison. Un tel domaine est de la forme  $\exp(\overline{\mathcal{W}})$  où  $\mathcal{W}$  est une *alcôve de Weyl* de l’algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  (voir [4] ou [11]). Pour obtenir un tel domaine fondamental, on fixe un tore maximal  $T \subset G$  du groupe compact connexe  $G$ , et on note  $R$  le système de racines associé ; le choix d’une chambre de Weyl  $\mathfrak{t}_+ \subset \mathfrak{t} := \text{Lie}(T)$  (rappelons que le produit scalaire  $Ad$ -invariant de  $\mathfrak{g}$  permet d’identifier les algèbres de Lie considérés à leurs duaux respectifs), ou de manière équivalente celui d’un système de racines positives  $R^+ \subset R$ , détermine alors une unique alcôve de Weyl  $\mathcal{W} \subset \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$  dont l’adhérence contient  $0 \in \mathfrak{t}$ . L’application exponentielle  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  induit un homéomorphisme du polytope convexe compact  $\overline{\mathcal{W}}$  sur le sous-ensemble fermé  $\exp(\overline{\mathcal{W}}) \subset G$  et une partie  $A \subset \exp(\overline{\mathcal{W}})$  est dite convexe si elle s’identifie, via l’homéomorphisme  $\exp : \overline{\mathcal{W}} \rightarrow \exp(\overline{\mathcal{W}})$ , à une partie convexe de  $\overline{\mathcal{W}} \subset \mathfrak{g}$ .

Pour obtenir un théorème de convexité *réel*, on suppose le groupe  $G$  muni d’un automorphisme involutif  $\tau$  et on note  $\tau^-$  l’involution de  $G$  définie par  $\tau^-(g) := \tau(g^{-1})$ . L’hypothèse cruciale pour le théorème que nous présentons dans cette note consiste à supposer que l’involution  $\tau^-$  vérifie la propriété (P) suivante :

(P) Il existe un tore *maximal*  $T$  de  $G$  fixé *point par point* par l’involution  $\tau^-$ .

Un tore de  $G$  fixé *point par point* par  $\tau^-$  existe toujours mais ce n’est pas nécessairement un tore *maximal* de  $G$ . Dans ce dernier cas, la paire symétrique  $(G, \tau)$  est dite *de rang maximal* dans [11]. Une involution  $\tau$  telle que  $\tau^-$  vérifie la propriété (P) existe toujours sur un groupe de Lie compact connexe simplement connexe  $G$  donné (même sans l’hypothèse de simple connexité, voir [11]), et pour un exemple considérer  $SU(n)$  ou  $U(n)$  muni de l’involution  $\tau(u) = \bar{u}$ . Si  $T$  est un tore maximal de  $G$  fixé *point par point* par  $\tau^-$ , on a en particulier  $\exp(\overline{\mathcal{W}}) \subset T \subset \text{Fix}(\tau^-)$ . On a alors le théorème suivant :

**Théorème 2.1** (*Un théorème de convexité réel dans le cadre quasi-hamiltonien*). Soit  $(G, \tau)$  un groupe de Lie compact connexe et simplement connexe muni d’un automorphisme involutif  $\tau$  tel que l’involution  $\tau^- : g \mapsto \tau(g^{-1})$  laisse fixe *point par point* un tore maximal  $T$  de  $G$  et soit  $\mathcal{W} \subset \mathfrak{t} := \text{Lie}(T)$  une alcôve de Weyl. Soit  $(M, \omega, \mu : M \rightarrow G)$  un  $G$ -espace quasi-hamiltonien connexe dont l’application moment  $\mu : M \rightarrow G$  est propre et soit  $\beta : M \rightarrow M$  une involution de  $M$  vérifiant :

- (i)  $\beta^* \omega = -\omega$ ,
- (ii)  $\beta(g.x) = \tau(g). \beta(x)$  pour tout  $x \in M$  et tout  $g \in G$ ,
- (iii)  $\mu \circ \beta = \tau^- \circ \mu$ ,

- (iv)  $M^\beta := \text{Fix}(\beta) \neq \emptyset$ ,
- (v)  $\mu(M^\beta)$  a une intersection non vide avec la composante connexe  $Q_0$  de 1 dans  $\text{Fix}(\tau^-) \subset G$ .

Alors :

$$\mu(M^\beta) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}}) = \mu(M) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}}).$$

En particulier,  $\mu(M^\beta) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$  est un sous-polytope convexe de  $\exp(\overline{\mathcal{W}}) \simeq \overline{\mathcal{W}} \subset \mathfrak{t}$ , égal au polytope moment  $\mu(M) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$  tout entier.

L'hypothèse (v), de nature topologique, nous est imposée par le fait que, même lorsque  $G$  est simplement connexe,  $\text{Fix}(\tau^-)$  n'est pas nécessairement connexe (voir [11]). Ce problème ne se présente pas dans le cas hamiltonien usuel traité dans [13] car  $\text{Fix}(\tau^-) \subset \mathfrak{g}^*$  est alors un espace vectoriel et est donc connexe.

### 3. Principe de la preuve

#### 3.1. Existence d'une tranche symplectique

La preuve du Théorème 2.1 repose sur l'existence d'une *tranche symplectique*  $N \subset M$  qui permet de ramener l'étude de  $\mu(M) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$  à celle de  $\mu(N)$ , où  $N$  est un espace *hamiltonien usuel* pour l'action du *tore maximal*  $T \subset G$  fixé dans l'énoncé du Théorème 2.1. Cette idée, due à Guillemin et Sternberg dans [7], est reprise dans [5] et [9] : elle permet, dans le cas hamiltonien usuel, de prouver le théorème de Kirwan en se ramenant au théorème de Atiyah–Guillemin–Sternberg. C'est cette même idée qui permet à Meinrenken et Woodward de montrer la convexité de  $\mu(M) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$  dans le cas quasi-hamiltonien (voir [1]). Nous poursuivons ici cette approche géométrique pour obtenir la convexité de  $\mu(M^\beta) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$ . Notons que la démonstration de O'Shea et Sjamaar d'un théorème de convexité réel dans le cadre hamiltonien usuel repose sur idées différentes (voir notamment [15]), si bien que la stratégie que nous suivons ici suggère la possibilité d'obtenir une preuve différente du théorème de O'Shea et Sjamaar. Précisons ce que signifie l'existence d'une tranche symplectique :

**Proposition 3.1** (*Existence d'une tranche symplectique, [1]*). *Soit  $G$  un groupe de Lie compact connexe et simplement connexe et soit  $(M, \omega, \mu : M \rightarrow G)$  un  $G$ -espace quasi-hamiltonien. On suppose que l'application moment  $\mu : M \rightarrow G$  est propre. Soit  $T \subset G$  un tore maximal de  $G$  et soit  $\mathcal{W} \subset \mathfrak{t} := \text{Lie}(T)$  une alcôve de Weyl. On note  $p : G \rightarrow G/\text{Int}(G)$  la projection de  $G$  sur l'espace des classes de conjugaison et on rappelle que l'exponentielle  $\exp : \mathfrak{t} \rightarrow T$  induit un homéomorphisme  $\overline{\mathcal{W}} \simeq G/\text{Int}(G)$  (c'est-à-dire que  $\exp(\overline{\mathcal{W}}) \subset G$  est un domaine fondamental pour l'action par conjugaison).*

Alors il existe une sous-variété  $N \subset M$  telle que :

- (i)  $N$  est connexe,
- (ii)  $N$  est stable par l'action de  $T$ ,
- (iii) la 2-forme  $\omega|_N$  est symplectique,
- (iv) l'action de  $T$  sur  $(N, \omega|_N)$  est hamiltonienne avec pour application moment

$$\tilde{\mu} := p \circ \mu|_N : N \longrightarrow G/\text{Int}(G) \simeq \overline{\mathcal{W}} \subset \mathfrak{t},$$

- (v) l'ensemble  $G \cdot N := \{g \cdot x : x \in N, g \in G\}$  est dense dans  $M$  et l'ensemble  $\mu(N)$  est dense dans  $\mu(M) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$ .

La sous-variété  $N$  dont l'existence est garantie par la Proposition 3.1 est appelée une *tranche symplectique* car c'est une variété symplectique vérifiant  $\overline{G \cdot N} = M$ . Ainsi qu'indiqué, ce résultat a sa source dans [1]. Cependant, la preuve qui en est donnée dans [14] est de nature différente : on y suit la démarche de [9] pour montrer qu'il est possible d'obtenir une telle tranche symplectique  $N \subset M$  qui soit de la forme  $N = \mu^{-1}(\exp(\mathcal{W}_S))$  où  $\mathcal{W}_S$  est une *face* du polytope convexe  $\overline{\mathcal{W}}$ . Précisément, la face  $\mathcal{W}_S$  est celle qui contient les points de  $\mu(M)$  dont la classe de conjugaison est de dimension la plus grande possible (on montre en particulier qu'une telle face est unique).

Le fait que  $\mu(N)$  soit dense dans  $\mu(M) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$  montre qu'il suffit, pour montrer la convexité de  $\mu(M) \cap \exp(\overline{\mathcal{W}})$ , de montrer celle de  $\mu(N)$ . Puisque, d'après la Proposition 3.1,  $N$  est un espace hamiltonien au sens usuel pour l'action

du tore  $T$ , on est ramené au théorème d’Atiyah–Guillemin–Sternberg. En réalité, la preuve est techniquement plus subtile car l’application moment  $\mu|_N$  n’est pas nécessairement propre, mais on peut lever ces difficultés de nature topologique grâce à l’application du *principe local-global* (voir [9]), que nous ne détaillerons pas ici (voir aussi [3]).

### 3.2. Image du lieu des points fixes d’une involution

Pour montrer la convexité de  $\mu(M^\beta) \cap \exp(\overline{W})$  (et décrire cet ensemble comme sous-polytope du polytope moment  $\mu(M) \cap \exp(\overline{W})$ ), l’idée, dans la logique de la construction ci-dessus, est d’appliquer le théorème de Duistermaat à la tranche symplectique  $N \subset M$  obtenue dans la Proposition 3.1. La première difficulté est de montrer que  $N^\beta \neq \emptyset$ . C’est ici qu’intervient l’hypothèse que  $\exp(\overline{W}) \subset T \subset \text{Fix}(\tau^-)$ . En effet,  $N$  étant de la forme  $\mu^{-1}(\exp(\mathcal{W}_S))$  avec  $\mathcal{W}_S \subset \overline{W}$ , la relation  $\mu \circ \beta = \tau^- \circ \mu$  du Théorème 2.1, jointe au fait que  $T$  est fixé *point par point* par  $\tau^-$ , implique  $\mu \circ \beta = \mu$ , ce qui est l’une des hypothèses du théorème de Duistermaat (voir [6]) et montre en particulier que  $\beta(N) \subset N$ . Il reste alors à montrer que  $N^\beta$  est non-vide, ce qui n’est pas immédiat. Plus précisément, l’étape cruciale de notre raisonnement est le résultat suivant :

**Lemme 3.2.** *Soit  $(M, \omega, \mu : M \rightarrow G)$  un  $G$ -espace quasi-hamiltonien muni d’une involution  $\beta$  vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1 et soit  $N \subset M$  une tranche symplectique comme dans la Proposition 3.1. D’après l’hypothèse (v) du Théorème 2.1, il existe  $x_0 \in M^\beta$  tel que  $\mu(x_0)$  soit contenu dans la composante connexe  $Q_0$  de 1 dans  $\text{Fix}(\tau^-) \subset G$ . Notons  $L_0$  la composante connexe de  $x_0$  dans  $M^\beta$ . Remarquons que l’on a également  $\exp(\overline{W}) \subset Q_0 \subset \text{Fix}(\tau^-)$ . Alors, on a :*

- (i)  $N$  est stable par  $\beta$  et  $N^\beta \neq \emptyset$ ,
- (ii)  $\mu(N^\beta)$  est dense dans  $\mu(L_0) \cap \exp(\overline{W})$ .

Comme pour montrer la convexité de  $\mu(N)$ , il faut ensuite appliquer le théorème de Duistermaat de manière appropriée pour montrer que  $\mu(N^\beta) = \mu(N)$ . On déduit alors de la Proposition 3.1 et du Lemme 3.2 que :

$$\mu(M^\beta) \cap \exp(\overline{W}) \supset \mu(L_0) \cap \exp(\overline{W}) = \overline{\mu(N^\beta)} = \overline{\mu(N)} = \mu(M) \cap \exp(\overline{W})$$

ce qui prouve le Théorème 2.1, l’inclusion réciproque étant évidente. La preuve du fait que  $N^\beta \neq \emptyset$  repose sur le fait que  $N$  est de la forme  $\mu^{-1}(\exp(\mathcal{W}_S))$  où  $\mathcal{W}_S$  est une face du polytope convexe  $\overline{W} \subset \mathfrak{t}$  et sur le fait que  $\exp(\overline{W}) \subset \text{Fix}(\tau^-)$ . Sans cette dernière hypothèse, qui est notre hypothèse (P) page 27, rien ne garantit que  $\exp(\mathcal{W}_S)$  contienne des points de  $\mu(M^\beta)$  : la relation  $\mu \circ \beta = \tau^- \circ \mu$  du Théorème 2.1 entraîne que  $\mu(M^\beta) \subset \text{Fix}(\tau^-)$  mais si le domaine fondamental  $\exp(\overline{W})$  n’est pas fixé tout entier par  $\tau^-$  on peut par exemple avoir, selon la dimension de la face  $\exp(\mathcal{W}_S)$ , une intersection vide  $\exp(\mathcal{W}_S) \cap \text{Fix}(\tau^-) = \emptyset$  avec le lieu des points fixes de  $\tau^-$ .

Un exemple d’involution  $\beta$  vérifiant les hypothèses du Théorème 2.1 est donné dans [14]. En guise d’application, on montre comment déduire de ce résultat l’existence d’une sous-variété lagrangienne remarquable dans l’espace des représentations  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\pi, G)/G$  du groupe fondamental  $\pi := \pi_1(S^2 \setminus \{s_1, \dots, s_l\})$  dans le groupe de Lie compact connexe et simplement connexe  $G$  fixé initialement.

## Références

- [1] A. Alekseev, A. Malkin, E. Meinrenken, Lie group valued moment maps, *J. Differential Geom.* 48 (3) (1998) 445–495.
- [2] M.F. Atiyah, Convexity and commuting Hamiltonians, *Bull. London Math. Soc.* 14 (1) (1982) 1–15.
- [3] Y. Benoist, Actions symplectiques de groupes compacts, *Geom. Dedicata* 89 (2002) 182–245.
- [4] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie. Chapitre 9. Groupes de Lie réels compacts, Masson, 1982.
- [5] M. Condevaux, P. Dazord, P. Molino, Géométrie du moment, in : *Travaux du séminaire Sud-Rhodanien de géométrie*, vol. I, Université Claude Bernard, Lyon, 1988, pp. 131–160.
- [6] J.J. Duistermaat, Convexity and tightness for restrictions of Hamiltonian functions to fixed point sets of an antisymplectic involution, *Trans. Amer. Math. Soc.* 275 (1) (1983) 417–429.
- [7] V. Guillemin, S. Sternberg, Convexity properties of the moment mapping, *Invent. Math.* 67 (3) (1982) 491–513.
- [8] V. Guillemin, S. Sternberg, Convexity properties of the moment mapping ii, *Invent. Math.* 77 (3) (1984) 533–546.
- [9] J. Hilgert, K.H. Neeb, W. Plank, Symplectic convexity theorems and coadjoint orbits, *Compositio Math.* 94 (2) (1994) 129–180.
- [10] F. Kirwan, Convexity properties of the moment mapping iii, *Invent. Math.* 77 (3) (1984) 547–552.
- [11] O. Loos, *Symmetric Spaces, II: Compact Spaces and Classification*, W.A. Benjamin, Inc., 1969.

- [12] E. Meinrenken, C. Woodward, Hamiltonian loop group actions and Verlinde factorization, *J. Differential Geom.* 50 (3) (1998) 417–469.
- [13] L. O’Shea, R. Sjamaar, Moment maps and Riemannian symmetric pairs, *Math. Ann.* 317 (3) (2000) 415–457.
- [14] F. Schaffhauser, A real convexity theorem for quasi-hamiltonian actions, 25 pages, submitted for publication, arXiv: 0705.0858.
- [15] R. Sjamaar, Convexity properties of the moment mapping re-examined, *Adv. Math.* 138 (1) (1998) 46–91.