

## Équations aux dérivées partielles/Analyse numérique Sur un modèle non-linéaire pour le débruitage de l'image

R. Aboulaich<sup>a</sup>, S. Boujena<sup>b</sup>, E. El Guarmah<sup>a</sup>

<sup>a</sup> LERMA, École Mohammadia d'Ingénieurs, Université Mohamed V, avenue Ibn Sina, PB 765 Agdal, Rabat, Maroc

<sup>b</sup> Département de mathématiques et informatique, Faculté des Sciences Ain Chock, Km8 Route El Jadida, BP 5366 Maârif, Casablanca, Maroc

Reçu le 29 juin 2007 ; accepté après révision le 12 septembre 2007

Disponible sur Internet le 18 octobre 2007

Présenté par Philippe G. Ciarlet

### Résumé

Ce travail porte sur l'étude mathématique d'un modèle évolutif d'équations aux dérivées partielles non-linéaires qui sera utilisé pour le débruitage de l'image. L'existence et l'unicité de la solution sont établies, le modèle est ensuite testé numériquement.

Le rapport du signal à bruit (SNR) est utilisé pour estimer la qualité des images restaurées. *Pour citer cet article : R. Aboulaich et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**On a non-linear model for image noise reduction.** This work deals with a mathematical study for a proposed non-linear evolution partial differential equations model for image processing. The existence and the uniqueness of the solution are established, the model is numerically tested.

The Signal to Noise Ratio (SNR) number is used to estimate the quality of the restored images. *To cite this article: R. Aboulaich et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### Abridged English version

We are interested in restoring the noisy image  $u_0$  using the following nonlinear PDE problem:

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}[\mu(|\nabla u|)\nabla u] = 0 & \text{in } Q, \\ u(x, t) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \quad \forall t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0 & \forall x \in \Omega, \end{cases}$$

where  $\Omega$  is an open bounded subset of  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = 2$  or  $N = 3$ , with boundary  $\partial\Omega$ ,  $Q = \Omega \times [0, T]$  with some given  $T > 0$ , and  $\mu$  verifies the following hypothesis:

$$(1.1) \quad \mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

Adresses e-mail : [aboulaich@emi.ac.ma](mailto:aboulaich@emi.ac.ma) (R. Aboulaich), [boujena@yahoo.fr](mailto:boujena@yahoo.fr) (S. Boujena), [guarmah@gmail.com](mailto:guarmah@gmail.com) (E. El Guarmah).

- (1.2)  $\mu$  is continuous function,  
 (1.3)  $\lim_{s \rightarrow +\infty} [\mu(s)] = \mu_0$  with  $\mu_0 > 0$ ,  
 (1.4)  $\mu$  is differential continuous,  
 (1.5)  $s|\mu'(s)| \leq \mu(s) \forall s \in \mathbb{R}_+$ .

**Theorem 0.1.** Let  $u_0 \in H = \overline{D(\Omega)}^{L^2(\Omega)}$  and  $\mu$  satisfies (1.1)–(1.5). Then there exists a unique weak solution of problem (P) such that  $u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$  and  $u' = \frac{du}{dt} \in L^2(0, T, V')$ .

## 1. Introduction

La restauration de l'image par des équations aux dérivées partielles a connu un grand développement, plusieurs modèles ont été proposés [5, 10–12]. L'efficacité numérique de ces modèles a été prouvée dans plusieurs cas, cependant l'étude mathématique génère des difficultés mathématiques liées à la preuve de l'existence d'une solution du problème considéré. Dans [2, 3], on utilise un problème approché en considérant une méthode de régularisation et on prouve l'existence du problème régularisé. Dans [1], on montre l'existence d'une solution dans un espace d'Orlicz.

Ce travail porte sur l'étude mathématique d'un modèle d'EDP non-linéaire évolutif dont on se propose d'étudier l'existence et l'unicité ainsi que l'efficacité pour le lissage d'images bruitées. La discrétisation du problème EDP sera faite par un schéma de différences finies.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné ( $\subset \mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ ) de frontière  $\partial\Omega$  assez régulière,  $T \in \mathbb{R}_+^*$ . On cherche  $u(x, t)$  solution du problème non-linéaire instationnaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}[\mu(|\nabla u|)\nabla u] = 0 & \text{in } Q, \\ u(x, t) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \forall t \in [0, T], \\ u(x, 0) = u_0 & \forall x \in \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

$u_0$  est l'image à l'instant initial.

Dans ce qui suit on établit l'existence et l'unicité de (1) dans  $H^1(\Omega)$ , sous des hypothèses convenables sur la fonction  $\mu$ .

Le problème (1) est équivalent au problème variationnel suivant :

Trouver  $u \in V$  telle que :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u(t)}{\partial t} \cdot v \, dx + \int_{\Omega} \mu[|\nabla u(t)|] \nabla u(t) \cdot \nabla v \, dx = 0. \quad (2)$$

Posons  $\mathcal{V} = \mathcal{D}(\Omega)$  et notons par  $V = H_0^1(\Omega)$ , l'adhérence de  $\mathcal{V}$  dans  $H^1(\Omega)$ .  $H_0^1(\Omega)$  sera muni du produit scalaire  $((u, v)) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$  de norme associée  $\|\cdot\|$ . On désigne par  $H$  l'adhérence de  $\mathcal{V}$  dans  $L^2(\Omega)$ . L'espace  $H$  est muni du produit scalaire de  $L^2(\Omega)$  que l'on définit par :  $(u, v) = \int_{\Omega} uv \, dx$ . La norme associée est notée  $|\cdot|$  (voir [6–8]). Dans ce qui suit nous allons établir l'existence et l'unicité d'une solution faible de (1) sous les hypothèses suivantes sur  $\mu$  :

- (1.1)  $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  
 (1.2)  $\mu$  est continue,  
 (1.3)  $\lim_{s \rightarrow +\infty} [\mu(s)] = \mu_0$  avec  $\mu_0 > 0$ ,  
 (1.4)  $\mu$  est continûment différentiable,  
 (1.5)  $s|\mu'(s)| \leq \mu(s) \forall s \in \mathbb{R}_+$ .

Les hypothèses ((1.1)–(1.3)) entraînent que  $\mu$  est bornée. Posons  $\sup_{s \in \mathbb{R}_+} \mu(s) = a$  et  $\inf_{s \in \mathbb{R}_+} \mu(s) = b$ , avec  $a, b \geq 0$ .

On désigne par  $A$  l'opérateur défini par  $Au = -\operatorname{div}\{\mu[|\nabla u|]\nabla u\}$ , alors on a :

$$(Av, w) = \int_{\Omega} \mu[|\nabla v|] \nabla v \cdot \nabla w \, dx \quad \text{pour } v, w \in V. \quad (3)$$

Grâce aux hypothèses vérifiées par  $\mu$  on a  $Av \in V'$  pour tout  $v \in V$ , où  $V' = H^{-1}(\Omega)$  est l'espace dual de  $V$ . On démontre que  $A$  est un opérateur monotone hémicontinu, voir [4].

**2. Théorème d'existence**

**Théorème 2.1.** *Soit  $u_0 \in H$  et  $\mu$  vérifiant (1.1)–(1.5).*

*Alors le problème (1) admet au moins une solution faible  $u$  telle que  $u \in L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ .*

**Preuve.** Pour démontrer l'existence, on utilise la méthode de Faedo–Galerkin. On considère le problème spectral

$$((w, v)) = \lambda(w, v) \quad \forall v \in V, \tag{4}$$

où  $\lambda$  est une valeur propre associée au vecteur propre  $w$ .

L'injection de  $V$  dans  $H$  étant compacte, le problème (4) admet une suite de valeurs propres  $\lambda_j$  associées aux vecteurs propres  $w_j$

$$((w_j, v)) = \lambda_j(w_j, v) \quad \forall v \in V \tag{5}$$

et  $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  est orthonormale dans  $H$  et orthogonale dans  $V$ . On désigne par  $u_N(t)$  la fonction définie par

$$u_N(x, t) = u_N(t)(x) \in [w_1, \dots, w_N], \quad u_N(x, t) = \sum_{j=1}^N C_j^N(t)w_j(x). \tag{6}$$

Considérons l'équation

$$(u'_N(t), w_j) - [\operatorname{div}(\mu(|\nabla u_N(t)|))\nabla u_N(t), w_j] = 0, \quad 1 \leq j \leq N, \tag{7}$$

avec  $u_N(\cdot, 0) = u_{0N}(\cdot) \in [w_1, \dots, w_N]$  et  $u_{0N} \rightarrow u_0$  dans  $V$ .

Les équations (7) constituent alors un système d'équations différentielles ordinaires en  $C_j^N(t)$  de la forme

$$\frac{dC_j^N(t)}{dt} = -G_j(t, C_1^N(t), \dots, C_N^N(t)).$$

Par le théorème de Cauchy–Péano, il existe une solution de cette équation, donc il existe  $u_N(t)$  définie sur  $[0, T_N]$ .

En multipliant (7) par  $C_j^N(t)$  et en sommant, on déduit que :

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_N(t)}{\partial t} \cdot u_N(t) \, dx + \int_{\Omega} \mu[|\nabla u_N(t)|] \nabla^2[u_N(t)] \, dx = 0$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_N(t)|^2 + \int_{\Omega} \mu[|\nabla u_N(t)|] \nabla^2[u_N(t)] \, dx = 0. \tag{8}$$

Comme

$$\int_{\Omega} \mu[|\nabla u_N(t)|] \nabla^2[u_N(t)] \, dx \geq b \int_{\Omega} \nabla^2[u_N(t)] \, dx,$$

il résulte alors de (8)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_N(t)|^2 + b \int_{\Omega} \nabla^2[u_N(t)] \, dx \leq 0,$$

d'où

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_N(t)|^2 + b \|u_N(t)\|^2 \leq 0,$$

il existe donc une constante  $C_1 > 0$  et une constante  $C_2 > 0$  dépendants de  $b$ , de  $T$  et de  $u_0$  telles que

$$|u_N(t)| \leq C_1 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \|u_N(t)\|^2 \leq C_2 \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent  $T_N = T$  et le problème (7) admet une solution globale qui est unique grâce à la monotonie de l'opérateur  $A$ . La suite  $(u_N)_N$ , ainsi obtenue, est bornée dans  $L^2(0, T, V) \cap L^\infty(0, T, H)$ . Moyennant la monotonie et l'hémicontinuité de l'opérateur  $A$ , on montre que les solutions  $u_N$  des problèmes approchés (7) convergent vers  $u$  solution faible du problème (1) (voir [4,9]).  $\square$

### 3. Théorème d'unicité

**Théorème 3.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 1, la solution faible  $u$  du problème (1) est unique et de plus  $u' \in L^2(0, T, V')$ .*

**Preuve.** Soient  $u_1$  et  $u_2$  deux solutions faibles du problème (1), on a alors pour tout  $v \in V$

$$\left( \frac{\partial u_1}{\partial t}(t) - \frac{\partial u_2}{\partial t}(t), v \right) + (Au_1(t) - Au_2(t), v) = 0. \quad (9)$$

On pose  $u_1 - u_2 = w$  et on prend  $v = w(t)$  dans (9), on a donc :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |w(t)|^2 = -(Au_1(t) - Au_2(t), w(t)) \leq 0.$$

Alors  $|w(t)|^2 \leq |w(0)|^2 = 0$ . Donc  $w(t) = u_1(t) - u_2(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$ . D'où l'unicité de la solution.

Par ailleurs  $u'(t) = -Au(t)$  dans  $V'$ , de (3), on déduit alors que pour tout  $v \in V$ , on a

$$(Au(t), v) \leq 2a \|u(t)\| \|v\|$$

d'où  $\|Au(t)\|_{V'} \leq 2a \|u(t)\| \quad \forall t \in [0, T]$ .

Ainsi  $Au \in L^2(0, T, V')$  donc  $u' \in L^2(0, T, V')$ .  $\square$

### 4. Simulation numérique

On s'intéresse dans ce qui suit au débruitage d'une image donnée  $u_0$ , l'image débruitée sera solution du problème d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$(N) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} \left( \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (|\nabla u|/\beta)^2}} + \alpha \right) \nabla u \right) = 0 & \text{dans } Q = \Omega \times [0, T], \\ u(x, 0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \quad u(x, t) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \times [0, T]. \end{cases}$$

$\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes strictement positives. Pour approcher le problème (N) on utilise la méthode des différences finies. Le problème discret s'écrit alors :

$$u^{k+1}(i, j) = u^k(i, j) + \delta t (\operatorname{div}(c_\gamma(x, \nabla u))^k(i, j)), \quad 1 \leq k \leq M, \quad 1 \leq i \leq N_1, \quad 1 \leq j \leq N_2$$

où

$$c_\gamma(x, \nabla u) = \left( \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (|\nabla u|/\beta)^2}} + \alpha \right) \nabla u \right),$$

$u^k(i, j) = u(x_i, y_j, t_k)$ ,  $x_i = i\delta x$ ,  $y_j = j\delta y$ ,  $t_k = k\delta t$  et  $\delta t = \frac{T}{M}$ . Parmi les critères quantitatifs les plus courants pour évaluer les performances d'un algorithme de débruitage, nous avons retenu le rapport signal à bruit (Signal to Noise Ration, SNR), il s'exprime en décibels par le rapport entre l'image de référence  $I_1$  et l'image  $I_2$  après l'analyse :

$$SNR(I_1/I_2) = 10 \log_{10} \left[ \frac{\sigma^2(I_1)}{\sigma^2(I_1 - I_2)} \right]$$

où  $\sigma$  est la variance [3]. Pour un pas de discrétisation suivant le temps  $\delta t = 0.1$ , un pas de discrétisation suivant l'espace  $\delta x = \delta y = 1$  et un nombre d'itérations  $M = 300$ , la Fig. 1 montre que la qualité de l'image débruitée s'améliore pour des valeurs de  $\alpha$  assez petites.

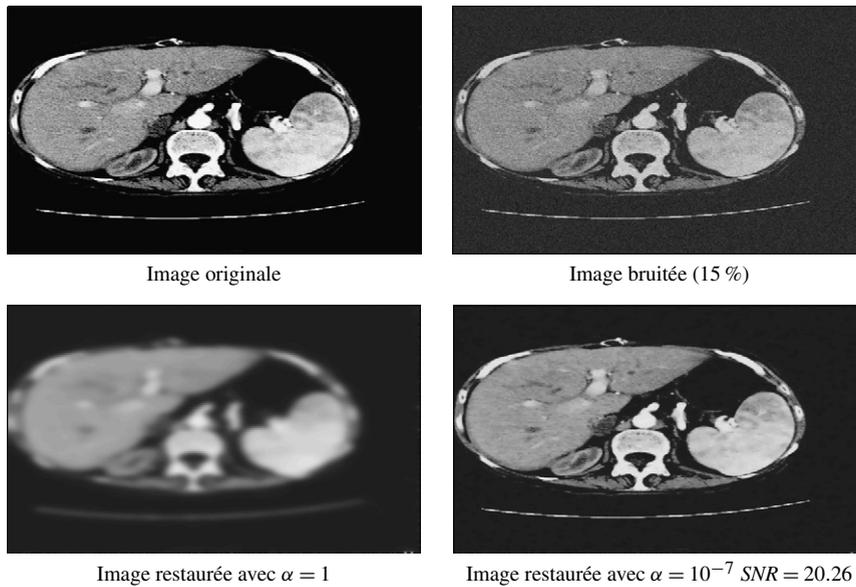


Fig. 1. Influence du paramètre  $\alpha$  sur le débruitage d'image.

Fig. 1. Influence of the parameter  $\alpha$  on noise suppression in an image.

## 5. Conclusion

Nous avons proposé dans ce travail un modèle évolutif d'EDP non-linéaire pour le traitement d'images. Nous avons établi l'existence et l'unicité de la solution et nous avons testé numériquement le modèle. Les résultats obtenus montrent l'efficacité de l'approche. En effet, le rapport *SNR* obtenu est élevé, il est de l'ordre de 20.26 (db) et la qualité du débruitage est très bonne.

## Références

- [1] R. Aboulaich, D. Meskine, A. Souissi, New diffusion models in image processing, *Computers and Mathematics with Applications* (2007), in press.
- [2] L. Alvarez, P.-L. Lions, J.-M. Morel, Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. II. *SIAM Journal on Numerical Analysis* 29 (3) (1992) 845–866.
- [3] G. Aubert, P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [4] S. Boujena, Etude d'une classe de fluides non newtoniens, les fluides newtoniens généralisés, thèse de 3ème cycle, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, 1986.
- [5] F. Catté, P.L. Lions, J.M. Morel, T. Coll, Image selective smoothing and edge detection by nonlinear, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 29 (1992) 182–193.
- [6] J. Duvaut, J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [7] O.A. Ladyshenskaya, *Mathematical Problems in the Dynamic of Viscous Incompressible Fluid*, 2ème éd., Gordon and Breach, New York, 1969.
- [8] J.L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod et Gauthier Villard, Paris, 1969.
- [9] V.G. Litvinov, *The Motion of a Non Linearly Viscous Fluid*, Nank, Mouscou, Russe, 1982.
- [10] S. Osher, L. Rudin, Feature-oriented image enhancing using shock filter, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 27 (4) (1990) 919–940.
- [11] S. Osher, L. Rudin, E. Fatemi, Non linear total variation based noise removal algorithms, *Physica D* 60 (1992) 259–268.
- [12] P. Perona, J. Malik, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 12 (1990) 629–639.