



Systemes dynamiques

Modèles pour les applications fibrées et les polysystèmes

Jean-Pierre Marco

Institut de mathématiques de Jussieu, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France

Reçu le 9 avril 2007 ; accepté le 22 novembre 2007

Disponible sur Internet le 9 janvier 2008

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

Cette Note donne un analogue du classique «fer à cheval» de Smale, adapté à l'étude des propriétés dynamiques des difféomorphismes possédant des variétés normalement hyperboliques avec intersections homoclines convenables. Notre modèle abstrait donne lieu à l'existence d'applications fibrées au-dessus du décalage de Bernoulli, dont un cas particulier intéressant est celui des polysystèmes, que nous définissons ici, qui peuvent être vus comme itération simultanée de plusieurs applications sur un même espace, dans un ordre quelconque. *Pour citer cet article : J.-P. Marco, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Models for skew-products and polysystems. We introduce a fibered version of the classical 'horseshoe' of Smale, that one can use to analyze the dynamical properties of diffeomorphisms with a normally hyperbolic invariant manifold and suitable homoclinic intersections. Our abstract model gives rise to fibered dynamics over the Bernoulli shift and to the more particular case of polysystems that we define here, which can be seen as the simultaneous iteration of several maps on the same space in any prescribed order. *To cite this article: J.-P. Marco, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We introduce here a fibered version of the classical 'horseshoe' of Smale, that one can use to analyze the dynamical properties of diffeomorphisms with a normally hyperbolic invariant manifold and suitable homoclinic intersections. Our aim is to provide a general abstract setting which can be embedded in concrete systems, this last embedding problem being the main subject of a subsequent paper [4].

1. As is well-known, if a diffeomorphism \mathcal{F} on a manifold admits a hyperbolic fixed point O with transverse homoclinic intersection, then there exists in the neighborhood of O an invariant set \mathcal{I} for a suitable iterate \mathcal{F}^n , homeomorphic to a Cantor set, such that the restriction $\mathcal{F}^n|_{\mathcal{I}}$ is conjugate to the Bernoulli shift. When O is replaced with a normally hyperbolic invariant manifold N , under suitable homoclinic assumptions, one can expect to obtain an invariant set which locally appears as the product of the manifold N by a Cantor set, on which the iterate \mathcal{F}^n acts in a fibered way. Let us be more precise and introduce some definitions. Let $\Omega = \{0, 1, \dots, m-1\}^{\mathbb{N}}$ be the Cantor

Adresse e-mail : marco@math.jussieu.fr.

space on m symbols and denote by σ the left Bernoulli shift on Ω . If A is a topological space, a continuous map $F : \Omega \times A \rightarrow \Omega \times A$ is said to be fibered over σ (or simply fibered) when it has the form $F(\omega, x) = (\sigma(\omega), f(\omega, x))$. We say that such a fibered map F is a *polysystem* (or a *m-system*) if there exists m continuous maps f_0, \dots, f_{m-1} from A to A satisfying

$$f(\omega, x) = f_{\omega_0}(x).$$

In this case, we write $F = f_0|f_1|\dots|f_{m-1}$. The positive orbit of a point $(\omega, x) \in \Omega \times A$ under this polysystem reads $(\omega, x), (\sigma(\omega), f_{\omega_0}(x)), (\sigma^2(\omega), f_{\omega_1} \circ f_{\omega_0}(x)), \dots, (\sigma^{n+1}(\omega), f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_0}(x)), \dots$ and therefore its projection on A reduces to the iteration of the maps f_0, \dots, f_{m-1} under the order given by the sequence ω . This type of dynamics has very rich properties (see [5,3,6]), in particular in connection with diffusion properties of nearly integrable Hamiltonian systems.

2. Our first model gives an abstract way to obtain interesting fibered maps. Our construction is based on two recent papers by M. Chaperon [1,2]. Consider two complete metric spaces (X, d_X) and (E, d_E) , with X locally compact. Let U be a closed bounded subset of E , and set $B = X \times U$. Finally, let U_0, U_1 be two disjoint closed subsets of U , set $H_j = X \times U_j$, $j \in \{0, 1\}$ and $H = H_0 \cup H_1$. The set B is to be thought of as a ‘block’, H_0 and H_1 are two ‘horizontal’ slices in B , and we will deal with maps which send these strips on ‘vertical’ ones (see Fig. 1).

Consider a map $\mathcal{F} : H \rightarrow X \times E$, and set $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}|_{H_j}$. We write $\mathcal{F} = (\phi, \varphi)$ with $\phi : H \rightarrow X$ and $\varphi : H \rightarrow E$, and analogously $\mathcal{F}_j = (\phi_j, \varphi_j)$. Assume that \mathcal{F} is a Lipschitz map, and that there furthermore exists $\rho > 0$ such that for $j \in \{0, 1\}$ and for any $x \in X$:

$$\forall (u, u') \in U_j^2, \quad d_E(\varphi_j(x, u), \varphi_j(x, u')) \geq \rho d_E(u, u'). \quad (C1)$$

We also assume that for $j \in \{0, 1\}$ and for any $x \in X$

$$U \subset \varphi_j(x, U_j). \quad (C2)$$

It is then clear that the maps φ_j admit ‘right inverses’ $\psi_j : B \rightarrow U_j$ characterized by the property

$$\forall x \in X, \forall v \in U, \quad \varphi_j(x, \psi_j(x, v)) = v,$$

and it is easy to see that they are Lipschitz maps. We denote by $\text{Lip } \phi$ the Lipschitz constant of a map between two metric spaces.

Theorem 0.1. *Set $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, and with the same notation as above consider a map $\mathcal{F} : H \rightarrow M$ such that conditions (C1) and (C2) hold true. Assume moreover that the right inverses ψ_j satisfy the relation*

$$(\text{Max}(\text{Lip } \psi_1, \text{Lip } \psi_2)) \cdot \text{Max}(1, \text{Lip } \phi) < 1.$$

Then there exists a subset \mathcal{I} of H , positively invariant under \mathcal{F} , a homeomorphism $\Psi : \mathcal{I} \rightarrow \Omega \times X$ and a fibered map $F : \Omega \times X \rightarrow \Omega \times X$ such that $\Psi \circ \mathcal{F} = F \circ \Psi$.

3. Next one can state a refined version yielding to polysystems instead of fibered maps:

Theorem 0.2. *With the same assumptions as in the theorem above, suppose that there moreover exist a metric space N and a continuous projection $\pi : X \rightarrow N$ such that if $\Pi : X \times E \rightarrow N$ is defined by $\Pi(x, u) = \pi(x)$ for $(x, u) \in X \times E$, there exist two continuous maps $f_j : N \rightarrow N$, $j \in \{0, 1\}$, such that the two maps \mathcal{F}_j are semi-conjugate to f_j by Π , that is $\Pi \circ \mathcal{F}_j = f_j \circ \Pi$, $j \in \{0, 1\}$. Then the restriction $\mathcal{F}|_{\mathcal{I}}$ is semi-conjugate to the bisystem $f_0|f_1$.*

4. The main interest of the previous two models is that they can be used to prove the existence of fibered maps or polysystems as subsystems of diffeomorphisms with normally hyperbolic manifolds with suitable homoclinic properties. We will give an extensive study of this question in [4].

1. Introduction

Le but de cette Note est de donner une construction analogue à celle du « fer à cheval » de Smale dans un cadre fibré, en vue de de l’étude semi-locale des propriétés homoclines des difféomorphismes possédant des variétés invariantes normalement hyperboliques.

Un théorème classique (Birkhoff–Alexeiev–Smale) affirme que si un difféomorphisme f d’une variété M possède un point fixe hyperbolique O avec un point homocline transverse, il existe au voisinage de O un ensemble \mathcal{I} , invariant par une itérée convenable f^n , sur lequel f^n est conjugué au décalage de Bernoulli. Dans le cas où le point fixe O est remplacé par une variété normalement hyperbolique, on s’attend à retrouver une situation « produit », dans laquelle apparaissent des ensembles globalement invariants de *feuilles* (dont la topologie est à préciser), indexées par l’ensemble de Cantor. Ces feuilles sont échangées suivant le décalage de Bernoulli par le difféomorphisme et portent une dynamique qu’il est intéressant d’analyser (elle apparaît notamment dans les systèmes hamiltoniens presque intégrables et donne une voie d’accès à leurs propriétés de diffusion). On introduit ici un modèle abstrait pour une telle analyse, réservant à [4] les problèmes de réalisation concrète de ce modèle au voisinage de variétés hyperboliques.

2. Applications fibrées et polysystèmes

Soit $\Omega = \{0, 1, \dots, m - 1\}^{\mathbb{N}}$ l’espace de Cantor sur m symboles. On note σ le décalage de Bernoulli, qui à $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega$ associe la suite $\sigma(\omega) = \omega'$ définie par $\omega'_n = \omega_{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit A un espace topologique, on munit $\Omega \times A$ de la topologie produit. On dit qu’une application continue \mathcal{F} de $\Omega \times A$ dans $\Omega \times A$ est fibrée au-dessus de σ , ou simplement fibrée, lorsqu’elle a la forme

$$\mathcal{F}(\omega, x) = (\sigma(\omega), f(\omega, x)).$$

On dit qu’une application fibrée sur $\Omega \times A$ est un *polysystème* (ou un *m-système*) s’il existe m applications f_0, \dots, f_{m-1} continues de A dans A telles que $f(\omega, x) = f_{\omega_0}(x)$ pour $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$ et $x \in A$. On écrit alors $F = f_0 | f_1 | \dots | f_{m-1}$. Pour un tel polysystème, l’orbite positive d’un point (ω, x) s’écrit

$$(\omega, x), (\sigma(\omega), f_{\omega_0}(x)), (\sigma^2(\omega), f_{\omega_1} \circ f_{\omega_0}(x)), \dots, (\sigma^{n+1}(\omega), f_{\omega_n} \circ \dots \circ f_{\omega_0}(x)), \dots$$

et sa projection sur le facteur A correspond à l’itération des applications f_0, \dots, f_{m-1} dans l’ordre prescrit par la suite ω . Ce type de dynamique a des propriétés très riches (voir par exemple [5,3,6]). Notre but ici est de donner un contexte général abstrait dans lequel de telles dynamiques apparaissent. Notre construction est basée sur deux articles récents de M. Chaperon [1,2], nous nous limitons comme dans ces articles au cas des applications lipschitziennes, le plus intéressant pour les études de bifurcation et de perturbations singulières que nous avons en vue pour l’étude des systèmes presque intégrables.

3. Modèles pour les applications fibrées

Soient (X, d_X) et (E, d_E) des espaces métriques complets, avec X localement compact. On munit $X \times E$ de la distance produit d . Soit U une partie fermée et bornée de E , on note $B = X \times U$. Soient U_0, U_1 deux parties fermées disjointes de U , on note $H_j = X \times U_j$ pour $j \in \{0, 1\}$ et on pose $H = H_0 \cup H_1$. La partie B est à imaginer comme un « bloc », H_0 et H_1 sont des bandes « horizontales » et nous allons nous intéresser à des applications qui envoient ces horizontales sur des bandes « verticales » ayant de bonnes conditions d’intersection avec B .

Soit \mathcal{F} une application de H dans $X \times E$, on note $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}|_{H_j}$. On écrit $\mathcal{F} = (\phi, \varphi)$, avec $\phi : H \rightarrow X$ et $\varphi : H \rightarrow E$, et on note de manière analogue $\mathcal{F}_j = (\phi_j, \varphi_j)$. On suppose que \mathcal{F} est lipschitzienne. On suppose de plus qu’il existe $\rho > 0$ tel que pour $j \in \{0, 1\}$ et pour tout $x \in X$:

$$\forall (u, u') \in U_j^2, \quad d_E(\varphi_j(x, u), \varphi_j(x, u')) \geq \rho d_E(u, u'). \tag{C1}$$

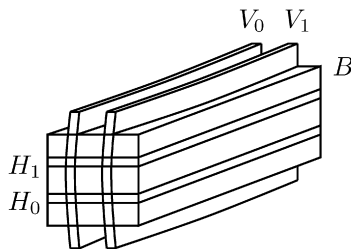
On suppose aussi, pour $j \in \{0, 1\}$, que pour tout $x \in X$

$$U \subset \varphi_j(x, U_j). \tag{C2}$$

Dans ces conditions, les applications φ_j possèdent des « inverses à droite » $\psi_j : B \rightarrow U_j$ caractérisés par la propriété

$$\forall x \in X, \forall u_j \in U_j, \forall v \in U, \quad [\varphi_j(x, u_j) = v] \Leftrightarrow [u_j = \psi_j(x, v)]. \tag{D}$$

Il est facile de voir que les applications ψ_j sont lipschitziennes. Si les conditions (C1) et (C2) précédentes sont vérifiées, on dit que \mathcal{F} coupe proprement B . Le rapport de Lipschitz d’une application lipschitzienne ϕ entre deux espaces métriques sera noté $\text{Lip } \phi$. On peut maintenant énoncer le résultat principal :

Fig. 1. $V_j = \mathcal{F}_j(H_j)$, \mathcal{F} coupe proprement B .Fig. 1. \mathcal{F} intersects B properly.

Théorème 3.1. On pose $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, muni de la topologie produit. On conserve les notations précédentes, et on suppose que \mathcal{F} coupe proprement B . On suppose de plus que les inverses à droite ψ_j satisfont la relation

$$(\text{Max}(\text{Lip } \psi_1, \text{Lip } \psi_2)) \cdot \text{Max}(1, \text{Lip } \phi) < 1.$$

Alors il existe un ensemble $\mathcal{I} \subset H$ positivement invariant par \mathcal{F} , un homéomorphisme Δ de \mathcal{I} sur $\Omega \times X$, et une application fibrée $F : \Omega \times X \rightarrow \Omega \times X$ tels que $\Delta \circ \mathcal{F} = F \circ \Delta$. L'ensemble \mathcal{I} est l'union disjointe des ensembles $\mathcal{I}_\omega = \Delta^{-1}(\{\omega\} \times X)$ pour $\omega \in \Omega$, et chaque ensemble \mathcal{I}_ω est le graphe d'une application lipschitzienne $h_\omega : X \rightarrow U_{\omega_0}$.

Preuve. Nous allons pour simplifier supposer X borné, le cas X non borné se traitant ensuite comme dans [1]. Soit κ un réel vérifiant $\text{Max}(1, \text{Lip } \phi) < \kappa < (\text{Max}_{j \in \{0,1\}} \text{Lip } \psi_j)^{-1}$ (donc $\kappa > 1$). On introduit les espaces de suites $\mathcal{B} = \{(z_n)_{n \geq 1} \mid z_n \in B, \forall n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\hat{\mathcal{B}} = \{(z_n)_{n \geq 0} \mid z_n \in B, \forall n \in \mathbb{N}\}$, munis des distances $\delta((z_n)_{n \geq 1}, (z'_n)_{n \geq 1}) = \text{Sup}_{n \geq 1} \kappa^{-n} d(z_n, z'_n)$ et $\hat{\delta}((z_n)_{n \geq 0}, (z'_n)_{n \geq 0}) = \text{Sup}_{n \geq 0} \kappa^{-n} d(z_n, z'_n)$. Dans la suite, les espaces produit seront munis de la distance produit. En particulier, $\hat{\mathcal{B}} = X \times U \times \mathcal{B}$. On introduit l'application $\mathcal{C} : \Omega \times X \times (U \times \mathcal{B}) \rightarrow U \times \mathcal{B}$ définie par

$$\mathcal{C}(\omega, x_0, u_0, (z_n)_{n \geq 1}) \mapsto (\psi_{\omega_0}(x_0, u_1), (\phi(z_{n-1}), \psi_{\omega_n}(x_n, u_{n+1}))_{n \geq 1})$$

où $z_n = (x_n, u_n)$ pour $n \geq 1$, et où l'on a posé $z_0 = (x_0, u_0)$. Pour $\omega \in \Omega$ donné, on voit en utilisant (D) qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit une orbite de \mathcal{F} (c'est-à-dire tel que $z_{n+1} = \mathcal{F}(z_n)$) qui vérifie de plus $\forall n \in \mathbb{N}, z_n \in H_{\omega_n}$, est que

$$\mathcal{C}(\omega, x_0, u_0, (z_n)_{n \geq 1}) = (u_0, (z_n)_{n \geq 1}).$$

La preuve du théorème repose alors sur une suite de remarques simples, variantes du théorème du point fixe de Picard avec paramètres.

- Pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $\mathcal{C}^\omega : X \times (U \times \mathcal{B}) \rightarrow U \times \mathcal{B}$, déduite de \mathcal{C} en fixant ω , est une contraction. On montre en effet immédiatement que si $\zeta = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\zeta' = (z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dans $\hat{\mathcal{B}}$:

$$\kappa^{-n} d_X(\phi(z_{n-1}), \phi(z'_{n-1})) \leq (\kappa^{-1} \text{Lip } \phi) \hat{\delta}(\zeta, \zeta'), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\kappa^{-n} d_E(\psi_{\omega_n}(x_n, u_{n+1}), \psi_{\omega'_n}(x'_n, u'_{n+1})) \leq (\kappa \text{Lip } \psi_{\omega_n}) \hat{\delta}(\zeta, \zeta'), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Il en résulte que \mathcal{C}^ω est contractante, puisque $\text{Lip } \mathcal{C}^\omega \leq \text{Max}(\kappa^{-1} \text{Lip } \phi, \kappa \text{Lip } \psi_0, \kappa \text{Lip } \psi_1) < 1$.

- En particulier, l'application $\mathcal{C}^{(\omega, x_0)} : U \times \mathcal{B} \rightarrow U \times \mathcal{B}$, obtenue en fixant les variables ω et x_0 , est une contraction. On note $\hat{\Phi}(\omega, x_0)$ son point fixe, définissant ainsi une application $\Phi : \Omega \times X \rightarrow U \times \mathcal{B}$. On note Φ_u sa composante suivant U .

- Pour tout $(u_0, (z_n)_{n \geq 1})$, l'application $\mathcal{C}_{(u_0, (z_n)_{n \geq 1})} : \Omega \times X \rightarrow U \times \mathcal{B}$, obtenue en fixant les variables u_0 et $(z_n)_{n \geq 1}$, est continue. En effet, si $\omega = (\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\omega' = (\omega'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, x_0 et x'_0 sont donnés, avec $\omega_k = \omega'_k$ pour $0 \leq k \leq n_0$ (et $n_0 \geq 1$), on voit que

$$d_E(\psi_{\omega_0}(x_0, u_1), \psi_{\omega'_0}(x'_0, u_1)) \leq \text{Lip } \psi_{\omega_0} d_X(x_0, x'_0),$$

$$\kappa^{-1} d_X(\phi(z_0), \phi(z'_0)) \leq \kappa^{-1} \text{Lip } \phi d_X(x_0, x'_0),$$

$$\kappa^{-n} d_E(\psi_{\omega_n}(x_n, u_{n+1}), \psi_{\omega'_n}(x_n, u_{n+1})) \leq \kappa^{-n} \text{diam } U, \quad \text{si } n > n_0.$$

• Il en résulte en particulier que l'application Φ est continue. On définit une nouvelle application $\Psi : \Omega \times X \rightarrow X \times U$ par $\Psi(\omega, x) = (x, \Phi_u(\omega, x))$, Ψ est clairement continue. On note $\mathcal{I} = \Psi(\Omega \times X)$.

• L'application Ψ est un homéomorphisme de $\Omega \times X$ sur \mathcal{I} . Pour voir que Ψ est injective, notons d'abord que si $\omega \in \Omega$ et $x_0 \in X$ sont donnés et si $u_0 = \Phi_u(\omega, x_0)$, alors $\Phi(\omega, x_0) = (u_0, (\mathcal{F}^n(x_0, u_0)_{n \geq 1}))$ est complètement déterminé. Si maintenant $\Psi(\omega, x_0) = \Psi(\omega', x'_0)$ on a d'abord $x_0 = x'_0$ et $\Phi_u(\omega, x_0) = \Phi_u(\omega', x_0)$ et donc $\Phi(\omega, x_0) = \Phi(\omega', x_0)$. Mais ceci entraîne que $\omega = \omega'$, puisque par construction $\mathcal{F}^n(x_0, u_0) \in H_{\omega_n} \cap H_{\omega'_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\omega_n = \omega'_n$ puisque $H_0 \cap H_1 = \emptyset$.

L'application Ψ est clairement continue. Pour montrer que c'est un homéomorphisme sur \mathcal{I} , notons que si X_0 est une partie de X , $\Psi(\Omega \times X_0) = \mathcal{I} \cap (X_0 \times E)$. Considérons une exhaustion compacte $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de l'espace (localement compact) X . Alors $\Psi|_{\Omega \times X_n}$ est un homéomorphisme sur son image $\mathcal{I} \cap (X_n \times E)$, ce qui montre en particulier que $\Psi|_{\mathcal{I} \cap (\text{Int } X_n \times E)}$ est continue. On en déduit que Ψ^{-1} est continue puisque $(\mathcal{I} \cap (\text{Int } X_n \times E))_{n \in \mathbb{N}}$ forme un recouvrement ouvert de \mathcal{I} . On pose enfin $\Delta = \Psi^{-1}$ pour retrouver l'énoncé du théorème.

• L'ensemble \mathcal{I} est positivement invariant par \mathcal{F} , et Δ conjugue $\mathcal{F}|_{\mathcal{I}}$ à une application fibrée. En effet, ce qui précède montre que $\mathcal{I} = \coprod_{\omega \in \Omega} \mathcal{I}_\omega$, où $\mathcal{I}_\omega = \Delta^{-1}(\{\omega\} \times X)$. On note que \mathcal{I}_ω est le graphe de l'application $h_\omega : X \rightarrow H_{\omega_0}$ définie par $h_\omega(x) = \Phi_u(\omega, x)$, il est facile de voir que h_ω est lipschitzienne (voir [1] et [4]). Un point $z_0 = (x_0, u_0) \in H$ est dans \mathcal{I}_ω si et seulement si $\mathcal{F}^n(z_0) \in H_{\omega_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il en résulte donc que $\mathcal{F}(z_0) \in \mathcal{I}_{\sigma(\omega)}$, et les « feuilles » \mathcal{I}_ω sont échangées par \mathcal{F} suivant le décalage σ . L'ensemble \mathcal{I} est donc invariant par \mathcal{F} et la conjugaison à une application fibrée en découle directement. Ceci termine la preuve du théorème. \square

Il nous sera utile de préciser la forme de l'application $F : \Omega \times X \rightarrow \Omega \times X$ précédente, elle s'écrit

$$F(\omega, x) = (\sigma(\omega), \phi_{\omega_0}(x, \Phi_u(\omega, x))). \tag{*}$$

4. Modèles pour les polysystèmes

Nous allons maintenant décrire un cas particulier du modèle précédent, lorsque les applications \mathcal{F}_0 et \mathcal{F}_1 fibrées au-dessus de deux applications f_0 et f_1 , ce qui conduit à une semi-conjugaison de $\mathcal{F}|_{\mathcal{I}}$ au bisystème $f_0|f_1$. Rappelons la notation $\mathcal{F}_j = (\phi_j, \varphi_j)$, avec $\phi_j : H_j \rightarrow X$ et $\varphi_j : H_j \rightarrow E$.

Théorème 4.1. *On conserve les hypothèses et notations du Théorème 3.1. On suppose de plus qu'il existe une application continue π de X sur un espace métrique (N, d_N) telle que les deux applications ϕ_0 et ϕ_1 soient semi-conjuguées à deux applications f_0 et f_1 de N dans N , au sens où pour $j \in \{0, 1\}$,*

$$\pi \circ \phi_j(x, u) = f_j \circ \pi(x), \quad \forall x \in X, \forall u \in U_j. \tag{**}$$

Alors, si $\Theta = \text{Id} \times \pi : \Omega \times X \rightarrow \Omega \times N$, la restriction de \mathcal{F} à l'ensemble invariant \mathcal{I} est semi-conjuguée au bisystème $f_0|f_1$ par l'application $\Xi = \Theta \circ \Delta : \mathcal{I} \rightarrow \Omega \times N$, c'est-à-dire que

$$\Xi \circ \mathcal{F}|_{\mathcal{I}} = (f_0|f_1) \circ \Xi.$$

Preuve. Pour montrer que $\mathcal{F}|_{\mathcal{I}}$ est semi-conjuguée par Ξ à $f_0|f_1$, il suffit de montrer que F est semi-conjuguée par Θ à $f_0|f_1$. Si $(\omega, x) \in \Omega \times X$, on obtient avec (*) et (**)

$$\begin{aligned} \Theta \circ F(\omega, x) &= \Theta(\sigma(\omega), \phi_{\omega_0}(x, \Phi_u(\omega, x))) = (\sigma(\omega), \pi \circ \phi_{\omega_0}(x, \Phi_u(\omega, x))) \\ &= (\sigma(\omega), f_{\omega_0}(x)) = (f_0|f_1)(\omega, \pi(x)) = (f_0|f_1) \circ \Theta(\omega, x). \end{aligned}$$

ce qui montre notre assertion. \square

Dans les applications au cas d'un difféomorphisme possédant une variété invariante hyperbolique N , on choisit pour X un voisinage tubulaire de N dans sa variété stable (convenablement redressée) et pour E la direction fortement instable. Ainsi B est un voisinage de N dans la variété ambiante, et l'ensemble \mathcal{I} est une lamination en graphes d'applications de X dans E , contenue dans H , et positivement invariante par \mathcal{F} . On peut bien entendu dans ce cas utiliser aussi une construction analogue pour \mathcal{F}^{-1} , et obtenir ainsi une lamination invariante par intersection de la lamination « horizontale » précédente et de la lamination « verticale » associée à \mathcal{F}^{-1} . Dans les cas homoclines

convenables (non génériques), les feuilles de cette lamination sont homéomorphes à la variété N . Pour obtenir des énoncés avec conditions homoclines génériques, il est nécessaire de remplacer dans les polysystèmes les applications par des *correspondances*. Ces questions seront développées dans [4].

Notons aussi que l'un des intérêts majeurs de notre construction est qu'elle rend facilement accessibles les propriétés de régularité des feuilles de la lamination, ainsi que celles des polysystèmes associés, ce qui est par exemple indispensable dans le cas de difféomorphismes symplectiques.

Références

- [1] M. Chaperon, Stable manifolds and the Perron–Irwin method, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 24 (2004).
- [2] M. Chaperon, The lipschitzian core of some invariant manifold theorem, Preprint, 2005.
- [3] P. Le Calvez, Drift orbits for families of twist maps of the annulus, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 27 (3) (2007) 869–879.
- [4] J.-P. Marco, Skew-products and polysystems in the neighborhood of normally hyperbolic manifolds, en préparation.
- [5] R. Moeckel, Generic drift on Cantor sets of annuli, in: A. Chenciner, R. Cushman, C. Robinson, Z.J. Xia (Eds.), *Celestial Mechanics, Dedicated to Donald Saari for his 60th Birthday*, Proc. Int. Conf. on Celest. Mech., Northwestern University, December 15–19, 1999, *Contemporary Mathematics*, vol. 292, 2002, pp. 163–171.
- [6] D. Sauzin, Random iteration of maps on the annulus, en préparation.