Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 309–312

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie analytique

Une structure o-minimale sans décomposition cellulaire $\mathcal{C}^\infty$

Olivier Le Gal [a], Jean-Philippe Rolin [b]

[a] *I.R.M.A.R., université de Rennes, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France*
[b] *I.M.B., université de Bourgogne, 9, avenue Savary, B.P. 47870, 21078 Dijon cedex, France*

Reçu le 16 décembre 2007 ; accepté le 30 janvier 2008

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous construisons une extension o-minimale du corps des nombres réels qui n'admet pas la propriété de décomposition cellulaire en classe $\mathcal{C}^\infty$. ***Pour citer cet article : O. Le Gal, J.-P. Rolin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

An o-minimal structure which does not admit $\mathcal{C}^\infty$ cellular decomposition. We build an o-minimal expansion of the real field which does not admit $\mathcal{C}^\infty$ cellular decomposition. ***To cite this article: O. Le Gal, J.-P. Rolin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Soit $\mathcal{M}$ une extension o-minimale du corps ordonné des nombres réels. Il est connu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, tout ensemble définissable de $\mathcal{M}$ admet une décomposition en cellules définissables de classe $\mathcal{C}^k$ [4]. Dans [3], des structures o-minimales admettant la propriété de décomposition cellulaire en classe $\mathcal{C}^\infty$ mais pas analytique sont construites à partir des algèbres quasianalytiques de Denjoy–Carleman. Nous donnons dans cette note les idées principales de la démonstration du théorème suivant :

Théorème. *Il existe une extension o-minimale du corps des nombres réels qui n'admet pas la propriété de décomposition cellulaire en classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Une partie de la preuve de ce théorème s'appuie sur les relations entre quasianalyticité et o-minimalité développées dans [3]. Plus précisément, pour tout entier $n \geqslant 0$, désignons par $\mathcal{W}_n$ l'algèbre des germes ***faiblement*** $\mathcal{C}^\infty$ à l'origine de $\mathbb{R}^n$ (un germe est dit faiblement $\mathcal{C}^\infty$ s'il admet pour tout $k \geqslant 0$ un représentant de classe $\mathcal{C}^k$; de même, une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^n$ est dite faiblement $\mathcal{C}^\infty$ si son germe à l'origine est faiblement $\mathcal{C}^\infty$). Le développement de Taylor d'un germe g faiblement $\mathcal{C}^\infty$ est noté $\hat{g}$. Une algèbre $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{W}_n$ est dite ***quasianalytique*** si le seul élément $g \in \mathcal{A}_n$ tel que $\hat{g} = 0$ est le germe nul. Considérons maintenant une fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le germe à l'origine appartient

Adresses e-mail : olivier.legal@univ-rennes1.fr (O. Le Gal), rolin@u-bourgogne.fr (J.-P. Rolin).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.01.025

à $\mathcal{W}_1$. Nous associons à cette fonction la plus petite collection d'algèbres $\mathcal{A}_n(H) \subset \mathcal{W}_n$, avec $n \in \mathbb{N}$, satisfaisant les conditions suivantes :

1) Le germe de H appartient à $\mathcal{A}_1(H)$ et les germes polynomiaux appartiennent à $\mathcal{A}_n(H)$.
2) Si $f \in \mathcal{A}_n(H)$ et si, pour $i = 1, \ldots, n$, f_i désigne la restriction de f à l'hyperplan $x_i = 0$, alors le germe qui prolonge continûment $(f - f_i)/x_i$ en $0 \in \mathbb{R}^n$ appartient à $\mathcal{A}_n(H)$.
3) Si $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{A}_m(H)$ et $f \in \mathcal{A}_n(H)$, alors $f(g_1 - g_1(0), \ldots, g_n - g_n(0))$ appartient à $\mathcal{A}_m(H)$.
4) Si $n > 1$ et $f \in \mathcal{A}_n(H)$ posons $g(x) = f(x) - f(0) - x_n \partial f/\partial x_n(0) + x_n$ (de telle sorte que $\partial g/\partial x_n(0) = 1$). Alors le germe $\alpha \in \mathcal{W}_{n-1}$ défini par $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, \alpha(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0$ appartient à $\mathcal{A}_{n-1}(H)$.

Remarque. La condition 2) implique la stabilité des algèbres $\mathcal{A}_n(H)$ par différentiation partielle. De plus, ces définitions modifiées des opérateurs de composition ou de prise de fonction implicite permettent de les appliquer à tout germe faiblement $\mathcal{C}^\infty$, sans avoir à vérifier les hypothèses usuelles. Ces opérateurs, ainsi que les opérateurs algébriques classiques, sont dits ***élémentaires***. Les éléments des algèbres $\mathcal{A}_n(H)$ sont obtenus en appliquant un certain nombre d'opérateurs élémentaires au germe de H.

Le théorème principal est une conséquence immédiate des deux théorèmes suivants :

Théorème 1. *Il existe une fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ faiblement $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant les propriétés suivantes* :

1) *Le germe de H à l'origine n'est pas $\mathcal{C}^\infty$.*
2) *La restriction de H au complémentaire de tout voisinage de* 0 *est donnée par morceaux par un nombre fini de polynômes.*
3) *Les algèbres $\mathcal{A}_n(H)$, avec $n \in \mathbb{N}$, sont quasianalytiques.*

Pour une fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, nous désignons par $\mathbb{R}_H$ la plus petite structure sur $\mathbb{R}$ contenant le graphe de H et des applications polynomiales.

Théorème 2. *Soit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction faiblement $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant les propriétés* 2) *et* 3) *du Théorème* 1. *Alors la structure $\mathbb{R}_H$ est o-minimale.*

Nous expliquons la construction de la fonction H dans la Section 1. Puis nous rappelons dans la Section 2 comment déduire de la quasianalyticité des algèbres $\mathcal{A}_n(H)$ la o-minimalité de $\mathbb{R}_H$.

1. Transcendance et quasianalyticité

Soit (h_n) une suite de réels telle que $\operatorname{trdeg}_{\mathbb{Q}}(h_1, \ldots, h_k) = k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Une telle suite peut être obtenue explicitement. Désignons en effet par p_n le n-ième nombre premier. Les nombres $\sqrt{p_n}$ étant linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, il résulte du théorème de Lindemann-Weierstrass que la suite donnée par $h_n = \exp(\sqrt{p_n})$ vérifie la propriété de transcendance désirée.

A l'aide d'une modification de la méthode classique de Borel (voir par exemple [2]), nous produisons une fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ faiblement $\mathcal{C}^\infty$, vérifiant les points 1) et 2) du Théorème 1, et dont le développement de Taylor à l'origine est $\hat{H}(x) = \sum h_i x^i$. Nous construisons pour cela une suite $\varepsilon_i \to 0$ et des fonctions θ_i polynomiales par morceaux, de classe $\mathcal{C}^i$ et pas $\mathcal{C}^{i+1}$, dont le support est inclus dans $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$. La fonction H est donnée par $H(x) = \sum h_i x^i \theta_i(x)$.

Il suffit alors de prouver que la condition de transcendance implique le lemme suivant :

Lemme 1.1. *Les algèbres $\mathcal{A}_n(H)$, avec $n \in \mathbb{N}$, sont quasianalytiques.*

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{A}_n(H)$ tel que $\hat{g} = 0$. Il s'agit de montrer que $g = 0$.

Il existe une composée $\mathcal{L}$ d'opérateurs élémentaires telle que $g = \mathcal{L}(H)$. De plus, pour tout $f \in \mathcal{W}_1$, le développement de Taylor de $\mathcal{L}(f)$ ne dépend que de celui de f. On peut donc associer à $\mathcal{L}$ un "opérateur formel" $\hat{\mathcal{L}}$ agissant sur $\mathbb{R}[[X]]$, tel que, pour tout germe f de $\mathcal{W}_1$, $\hat{\mathcal{L}}(\hat{f}) = \widehat{\mathcal{L}(f)}$. Puisque $\hat{g} = 0$, on a $\hat{\mathcal{L}}(\hat{H}) = 0$.

Un calcul direct montre d'autre part qu'il existe une famille de polynômes $P_\alpha \in \mathbb{Q}[a, X_1, \dots, X_{i_\alpha}]$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$, et $a \in \mathbb{R}^p$, tels que pour toute série formelle $\hat{\varphi} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varphi_i x^i$,

$$\hat{\mathcal{L}}(\hat{\varphi}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} P_\alpha(a, \varphi_1, \dots, \varphi_{i_\alpha}) x^\alpha,$$

où a est donné par les coefficients des polynômes qui interviennent dans la définition de $\mathcal{L}$.

Puisque $\hat{\mathcal{L}}(\hat{H}) = 0$, les nombres $P_\alpha(a, h_1, \dots, h_{i_\alpha})$ sont tous nuls. Ceci n'implique pas que les polynômes P_α, donc l'opérateur formel $\hat{\mathcal{L}}$, soient nuls. En revanche, il existe un entier N tel que, si $\mathcal{M}$ est la composée d'opérateurs élémentaires définie sur $\mathcal{W}_1$ par

$$\mathcal{M}(f)(x) = \mathcal{L}\big(h_1 x + \cdots + h_N x^N + x^{N+1} f(x)\big),$$

on ait $\hat{\mathcal{M}} = 0$. Remarquons pour cela que, si $d_i = \mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}}(a, h_1, \dots, h_i)$, alors $d_i \geqslant i$ pour tout entier i. Le nombre d'indices i tels que $d_{i+1} = d_i$ est donc fini. Fixons un entier N, majorant strict de ces indices, et vérifions que $\hat{\mathcal{M}} = 0$.

Pour toute série $\hat{f} = \sum f_i x^i$, on a

$$\hat{\mathcal{M}}(\hat{f}) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} P_\alpha(a, h_1, \dots, h_N, f_1, \dots, f_{i_\alpha - N}) x^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n} Q_\alpha(f_1, \dots, f_{i_\alpha - N}) x^\alpha,$$

où l'on a posé $Q_\alpha(X_1, \dots, X_{i_\alpha - N}) = P_\alpha(a, h_1, \dots, h_N, X_1, \dots, X_{i_\alpha - N})$. En particulier,

$$Q_\alpha(h_{N+1}, \dots, h_{i_\alpha}) = P_\alpha(h_1, \dots, h_N, h_{N+1}, \dots, h_{i_\alpha}) = 0.$$

Or, par définition de N, pour tout entier k, on a $\mathrm{trdeg}_{\mathbb{Q}(a,h_1,\dots,h_N)}(h_{N+1}, \dots, h_{N+k}) = k$. Les familles $(h_{N+1}, \dots, h_{i_\alpha})$ sont donc algébriquement indépendantes sur $\mathbb{Q}(a, h_1, \dots, h_N)$. Étant à coefficients dans $\mathbb{Q}(a, h_1, \dots, h_N)$, les polynômes Q_α sont donc tous nuls. L'opérateur $\hat{\mathcal{M}}$ est bien nul.

Pour conclure la démonstration du lemme, il reste à montrer que si $\hat{\mathcal{M}} = 0$, alors $\mathcal{M} = 0$. Pour cela, remarquons que $\mathcal{M}$ agit également sur les fonctions : pour tout $f \in \mathcal{W}_1$, il existe un entier d, un voisinage compact U de 0 et un représentant $f_0 \in \mathcal{C}^d(U)$ de f tels que $\mathcal{M}$ est bien défini et continu sur un voisinage de f_0 dans $\mathcal{C}^d(U)$. Il existe une suite P_k de polynômes tendant vers f_0 dans $C^d(U)$. Or $\mathcal{M}(P_k)$ est analytique, avec $\widehat{\mathcal{M}(P_k)} = \hat{\mathcal{M}}(\hat{P}_k) = 0$. Donc $\mathcal{M}(P_k) = 0$. Par continuité, $\mathcal{M}(f_0)$ est nul sur un voisinage de 0, donc $\mathcal{M}(f) = 0$. L'opérateur $\mathcal{M}$ est donc nul.

Comme g est égal à $\mathcal{M}(H_1)$, avec H_1 donné par $H(x) = h_1 x + \cdots + h_N x^N + x^{N+1} H_1(x)$, g est nul. $\square$

2. Quasianalyticité et o-minimalité

Le Théorème 2 se démontre en reprenant les arguments de [3], que nous rappelons brièvement. Considérons les germes $f, g_1, \dots, g_p \in \mathcal{A}_n(H)$ et $F, G_1, \dots, G_p$ leurs représentants naturels sur un polydisque $[-r, r]^n$ avec $r > 0$. Ces représentants définissent l'ensemble ***H-basique***

$$A = \big\{x \in [-r, r]^n;\, F(x) = 0, G_1(x) > 0, \dots, G_p(x) > 0\big\}.$$

Un ***H-ensemble*** est une union finie d'ensembles ***H-basiques***, et un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est ***H-semianalytique*** si, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, il existe $r > 0$ tel que $(A - a) \cap [-r, r]^n$ soit un H-ensemble. Remarquons que, puisque la fonction H est semialgébrique hors de tout voisinage de l'origine, le graphe de H est bien H-semianalytique.

Il s'agit de montrer que les sous-ensembles H-semianalytiques de $[-1, 1]^n$ vérifient la ***propriété de Λ-Gabrielov***, qui implique un théorème du complémentaire pour leurs projections (voir [3,5]). Or les propriétés des algèbres $\mathcal{A}_n(H)$, notamment la quasianalyticité, permettent d'appliquer aux germes faiblement $\mathcal{C}^\infty$ les méthodes de résolution des singularités. Tout ensemble H-basique est donc localement la projection d'un nombre fini de graphes de représentants naturels d'éléments des algèbres $\mathcal{A}_n(H)$. En adaptant des arguments géométriques classiques, comme le ***fiber cutting lemma*** (voir [1]), on conclut grâce à la compacité du pavé $[-1, 1]^n$.

Références

[1] E. Bierstone, P. Milman, Semianalytic and subanalytic sets, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 67 (1988) 5–42.

[2] B. Malgrange, Idéaux de fonctions différentiables et division des distributions, in : Distributions, Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2003. With an Appendix : "Stanisław Łojasiewicz (1926–2002)", pp. 1–21.

[3] J.-P. Rolin, P. Speissegger, A.J. Wilkie, Quasianalytic Denjoy–Carleman classes and o-minimality, J. Amer. Math. Soc. 16 (4) (2003) 751–777.
[4] L. van den Dries, Tame Topology and o-Minimal Structures, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
[5] L. van den Dries, P. Speissegger, The real field with convergent generalized power series, Trans. Amer. Math. Soc. 350 (11) (1998) 4377–4421.