Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 379–384
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre

Algèbres amassées et algèbres préprojectives : le cas non simplement lacé

Laurent Demonet

LMNO, université de Caen, esplanade de la Paix, 14000 Caen, France

Reçu le 27 novembre 2007 ; accepté après révision le 9 janvier 2008

Disponible sur Internet le 3 mars 2008

Présenté par Michel Duflo

Résumé

On généralise au cas non simplement lacé des résultats de Geiß, Leclerc et Schröer sur les structures amassées des algèbres de fonctions sur les sous-groupes unipotents maximaux des groupes de Lie simples. Cela permet en particulier de voir les structures amassées dans le cas non simplement lacé comme projections des structures amassées dans le cas simplement lacé. Cela permet aussi de montrer la liberté des monômes d'amas dans le cas non simplement lacé. ***Pour citer cet article : L. Demonet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Cluster algebras and preprojective algebras: the non simply-laced case. We generalize to the non simply-laced case results of Geiß, Leclerc and Schröer about the cluster structure of the coordinate ring of the maximal unipotent subgroups of simple Lie groups. In this way, cluster structures in the non simply-laced case can be seen as projections of cluster structures in the simply-laced case. This allows us to prove that cluster monomials are linearly independent in the non simply-laced case. ***To cite this article: L. Demonet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

Fomin and Zelevinsky [3] introduced cluster algebras and constructed with Berenstein [1] a cluster structure on the function algebras $\mathbb{C}[N]$ where N is a maximal unipotent subgroup of a simple Lie group G. This structure was interpreted in the simply-laced case (A, D, E) by Geiß, Leclerc and Schröer in terms of rigid representations of preprojective algebras [5]. Our aim is to extend these results to the non simply-laced case (B, C, F and G). There are some similarities between our approach and those of [2] and [12].

Let D be a simply-laced Dynkin diagram and a be an admissible automorphism of D. There are two natural ways to construct from D and a another Dynkin diagram: D' defined by Lusztig [10] and D'' defined by Kac [8]. All the non simply-laced Dynkin diagrams can be obtained in each of these two ways. For example, if $D = A_{2n-1}$ and a is the order 2 diagram automorphism, we have $D' = B_n$ and $D'' = C_n$.

Adresse e-mail : Laurent.Demonet@normalesup.org.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.02.007

Let G be the connected and simply connected complex Lie group of Dynkin diagram D and G'' be the connected and simply connected Lie group of Dynkin diagram D''. Let N and N'' be their maximal unipotent subgroups. Let $\mathfrak{n}$ and $\mathfrak{n}''$ be the Lie algebras of N and N''. There is a natural injective morphism from $\mathfrak{n}''$ into $\mathfrak{n}$ [8, 7.9]. Therefore $U(\mathfrak{n}'')$ can be identified with a subalgebra of $U(\mathfrak{n})$. As $U(\mathfrak{n})^* \simeq \mathbb{C}[N]$ and $U(\mathfrak{n}'')^* \simeq \mathbb{C}[N'']$ as Hopf algebras, this gives a surjection $p : \mathbb{C}[N] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[N'']$.

Let A be a ring and Γ be a group acting on A. The additive group $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\Gamma]$ can be endowed with a ring structure by defining $(a_1 \otimes g_1)(a_2 \otimes g_2) = (a_1 g_1(a_2) \otimes g_1 g_2)$ for all $(a_1, g_1), (a_2, g_2) \in A \times \Gamma$. This ring, called a skew-group ring of Γ in [11], will be denoted by $A\Gamma$. If A is a k-algebra, it induces a k-algebra structure on $A\Gamma$.

Let Δ be a Dynkin diagram with set of vertices I. Let Δ_1, Δ_2 be simply-laced Dynkin diagrams with sets of vertices I_1, I_2 and a_1, a_2 be admissible automorphisms of Δ_1 and Δ_2 such that $\Delta_1' = \Delta_2'' = \Delta$. Let n be the common order of a_1 and a_2. Let Λ_1 and Λ_2 be the preprojective algebras of some orientations of Δ_1 and Δ_2 compatible with a_1 and a_2 (see [4]). Let Γ_1 be the automorphism group of Δ_1 generated by a_1. Using methods of [11], one proves the following:

Proposition 1. *There is an equivalence of categories $\Phi : \operatorname{mod} \Lambda_1\Gamma_1 \to \operatorname{mod} \Lambda_2$.*

Let $F : \operatorname{mod} \Lambda_1\Gamma_1 \to \operatorname{mod} \Lambda_1$ be the forgetful functor. For $M \in \operatorname{mod} \Lambda_2$, set $S(M) = \bigoplus_{k=0}^{n-1} a_2^k(M)$ and $\Sigma(M)$ a maximal basic direct factor of $S(M)$.

Two Λ_2-modules M and N will be called a_2-isomorphic if $S(M) \simeq S(N)$.

A $\Lambda_1\Gamma_1$-module M will be called F-rigid (resp. F-basic) if $F(M)$ is rigid (resp. basic). A Λ_2-module M will be called a_2-rigid (resp. a_2-basic) if $S(M)$ is rigid (resp. if it does not have two direct summands which are a_2-isomorphic). An F-rigid $\Lambda_1\Gamma_1$-module (resp. a_2-rigid Λ_2-module) M will be called maximal F-rigid (resp. a_2-rigid) if for every $\Lambda_1\Gamma_1$-module (resp. Λ_2-module) X, if $M \oplus X$ is F-rigid (resp. a_2-rigid) then $F(X)$ (resp. $S(X)$) is a direct summand of $F(M)$ (resp. $S(M)$).

For $\mathbf{i} \in I = I_2/a_2$, define $Q_{\mathbf{i}} = \bigoplus_{i \in \mathbf{i}} Q_i$ where Q_i is the injective envelope of the simple Λ_2-module S_i and $\mathcal{E}_{\mathbf{i}}^\dagger = \prod_{i \in \mathbf{i}} \mathcal{E}_i^\dagger$ where the $\mathcal{E}_i^\dagger$ are defined in [7]. Let $\mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \cdots \mathbf{i}_k$ be a reduced expression of the longest element of the Weyl group associated to Δ. One can define the maximal rigid basic Λ_2-module

$$T_{\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\cdots\mathbf{i}_k} = \bigoplus_{\ell=1}^{k} \mathcal{E}_{\mathbf{i}_1}^\dagger \mathcal{E}_{\mathbf{i}_2}^\dagger \cdots \mathcal{E}_{\mathbf{i}_\ell}^\dagger (Q_{\mathbf{i}_\ell}) \oplus \bigoplus_{\mathbf{i} \in I} Q_{\mathbf{i}}.$$

Proposition 2.

(i) *Let $X, X' \in \operatorname{mod} \Lambda_1\Gamma_1$. Then $F(X) \simeq F(X')$ if and only if $S(\Phi(X)) \simeq S(\Phi(X'))$.*
(ii) *A $\Lambda_1\Gamma_1$-module X is F-rigid (resp. F-basic) if and only if $\Phi(X)$ is a_2-rigid (resp. a_2-basic).*
(iii) *Let $T_2 \in \operatorname{mod} \Lambda_2$ such that $\Sigma(T_2) = T_{\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\cdots\mathbf{i}_k}$. It is maximal a_2-rigid and has r non a_2-isomorphic indecomposable summands where r is the number of positive roots of Δ.*
(iv) *The a_2-rigid Λ_2-modules have at most r non a_2-isomorphic summands. The maximal ones have exactly r non a_2-isomorphic summands.*
(v) *A Λ_2-module is maximal a_2-rigid if and only if $\Sigma(X)$ is maximal rigid. Moreover, each maximal basic rigid a_2-stable Λ_2-module has at least one pre-image by Σ.*

Let $T = T_0 \oplus X$ be a maximal a_2-rigid a_2-basic Λ_2-module, such that X is a non projective indecomposable summand. If f is a minimal left $\operatorname{add}(S(T_0))$-approximation of X then f is injective and we will denote $\nu_X(T) = T_0 \oplus Y$ where $Y = \operatorname{coker} f$.

Proposition 3.

(i) *The module Y is indecomposable and $\nu_X(T)$ is maximal a_2-rigid a_2-basic.*
(ii) $\nu_Y(\nu_X(T)) = T$.
(iii) *$\Sigma(\nu_X(T))$ only depends on $\Sigma(T)$ and $\Sigma(X)$.*

Let G_2 and G be the connected and simply connected Lie groups of type Δ_2 and Δ. Let N_2 and N be their maximal unipotent subgroups. Each Λ_2-module X gives rise to $\varphi_X \in \mathbb{C}[N_2]$ ([9] and [6]). Let $\psi_X = p(\varphi_X)$, where $p : \mathbb{C}[N_2] \to \mathbb{C}[N]$ is defined as above.

Proposition 4.

(i) *If $X \in \operatorname{mod} \Lambda_2$ then ψ_X only depends on $\Sigma(X)$.*
(ii) *Let T be a maximal a_2-rigid Λ_2-module such that $\Sigma(T) = T_{\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\cdots\mathbf{i}_k}$. Then the ψ_X's where X runs over the indecomposable summands of T form an initial seed of* [1] *for the cluster algebra $\mathbb{C}[N]$.*
(iii) *Let $\mathcal{E}$ be the set of the maximal a_2-rigid a_2-basic Λ_2-modules that can be reached using mutations of type ν from T. There is a bijection between the isomorphism classes of $\Sigma(\mathcal{E})$ and the clusters of $\mathbb{C}[N]$.*

All previous results in terms of Λ_2 and Σ can be translated in terms of $\Lambda_1\Gamma_1$ and F.

Corollary 5. *The cluster variables of $\mathbb{C}[N]$ are $f \in \mathbb{C}[N]$ such that $p^{-1}(f)$ is a collection of cluster variables of the same cluster of $\mathbb{C}[N_2]$. The preimage by p of the clusters of $\mathbb{C}[N]$ are clusters of $\mathbb{C}[N_2]$.*

This allows us to prove a conjecture of Fomin and Zelevinsky which was proved in the simply-laced case by Geiß, Leclerc et Schröer:

Theorem 6. *The cluster monomials of $\mathbb{C}[N]$ are linearly independent.*

1. Définitions et notations

Soit un diagramme de Dynkin D simplement lacé d'ensemble de sommets I et a un automorphisme admissible de D (c'est-à-dire que deux sommets d'une même orbite ne sont jamais reliés par une flèche). Soit C la matrice de Cartan de D. Il y a deux façons naturelles de construire une nouvelle matrice de Cartan indexée par l'ensemble I/a des orbites :

$$C'_{\mathbf{ij}} = \frac{1}{\#\mathbf{i}} \sum_{(i,j)\in\mathbf{i}\times\mathbf{j}} C_{ij} \quad \text{et} \quad C''_{\mathbf{ij}} = \frac{1}{\#\mathbf{j}} \sum_{(i,j)\in\mathbf{i}\times\mathbf{j}} C_{ij}$$

où $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I/a$. On notera D' et D'' les diagrammes de Dynkin correspondants. Par exemple, si $D = A_{2n-1}$ et a est l'unique automorphisme d'ordre 2, alors $D' = B_n$ et $D'' = C_n$. On peut construire tous les diagrammes de Dynkin non simplement lacés de chacune de ces deux façons.

Soit G le groupe de Lie complexe, connexe et simplement connexe de diagramme de Dynkin D et G'' le groupe de Lie complexe, connexe et simplement connexe de diagramme de Dynkin D''. Soient N et N'' des sous-groupes unipotents maximaux de G et de G''. Soient aussi $\mathfrak{n}$ et $\mathfrak{n}''$ leurs algèbres de Lie. Il y a un unique morphime injectif ι de $\mathfrak{n}''$ dans $\mathfrak{n}$ vérifiant $\iota(e''_{\mathbf{i}}) = \sum_{i\in\mathbf{i}} e_i$ où les $e''_{\mathbf{i}}$ désignent les générateurs de Chevalley de $\mathfrak{n}''$ et les e_i ceux de $\mathfrak{n}$ (voir [8, 7.9]). On peut donc identifier $U(\mathfrak{n}'')$ à une sous-algèbre de $U(\mathfrak{n})$. Rappelons que $U(\mathfrak{n})^* \simeq \mathbb{C}[N]$ et $U(\mathfrak{n}'')^* \simeq \mathbb{C}[N'']$ comme algèbres de Hopf. Finalement, on a une surjection $p : \mathbb{C}[N] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[N'']$ qui correspond au fait que N'' est un sous-groupe algébrique de N.

Si A est un anneau et Γ est un groupe agissant sur A, on notera $A\Gamma$ l'anneau dont le groupe additif est $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\Gamma]$ et la multiplication prolonge $(a_1 \otimes g_1)(a_2 \otimes g_2) = (a_1 g_1(a_2) \otimes g_1 g_2)$ pour $(a_1, g_1), (a_2, g_2) \in A \times \Gamma$. Si A a une structure de k-algèbre, elle induit une structure de k-algèbre sur $A\Gamma$. Pour plus de détails sur cette construction, voir [11].

2. Modules rigides symétriques et mutations

Soit Δ un diagramme de Dynkin quelconque. Soient Δ_1 (resp. Δ_2) le diagramme de Dynkin simplement lacé et a_1 (resp. a_2) l'automorphisme de Δ_1 (resp. Δ_2) vérifiant $\Delta'_1 = \Delta$ (resp. $\Delta''_2 = \Delta$). Notons n l'ordre commun de a_1 et de a_2. Soient aussi $Q_1 = (I_1, F_1)$ et $Q_2 = (I_2, F_2)$ des orientations de Δ_1 et Δ_2 compatibles respectivement avec a_1 et a_2. Notons enfin Λ_1 et Λ_2 les algèbres préprojectives de Q_1 et Q_2 (voir [4] ou [9]).

Soit Γ_1 le groupe d'automorphismes de Δ_1 engendré par a_1. Ce groupe agit sur Λ_1 donc on peut former $\Lambda_1\Gamma_1$.

Proposition 1. *Il existe une équivalence de catégories* $\Phi : \operatorname{mod}\Lambda_1\Gamma_1 \to \operatorname{mod}\Lambda_2$.

On démontre ce résultat à l'aide des méthodes présentées en [11].

Notons $F : \operatorname{mod}\Lambda_1\Gamma_1 \to \operatorname{mod}\Lambda_1$ le foncteur d'oubli. Pour tout $M \in \operatorname{mod}\Lambda_2$, notons $S(M) = \bigoplus_{k=0}^{n-1} a_2^k(M)$ et $\Sigma(M)$ un facteur direct basique maximal de $S(M)$.

Deux Λ_2-modules M et N seront dits a_2-isomorphes si $S(M) \simeq S(N)$.

Un $\Lambda_1\Gamma_1$-module (resp. Λ_2-module) M sera appelé F-rigide (resp. a_2-rigide) si $F(M)$ (resp. $S(M)$) est rigide. Il sera dit F-rigide maximal (resp. a_2-rigide maximal) si pour tout $\Lambda_1\Gamma_1$-module (resp. Λ_2-module) indécomposable X, si $M \oplus X$ est F-rigide (resp. a_2-rigide) alors $F(X)$ (resp. $S(X)$) est un facteur indécomposable de $F(M)$ (resp. $S(M)$).

Un $\Lambda_1\Gamma_1$-module M sera appelé F-basique si $F(M)$ est basique. Un Λ_2-module M sera appelé a_2-basique si il n'a pas deux facteurs directs a_2-isomorphes.

Pour $\mathbf{i} \in I = I_2/a_2$, on définit $Q_{\mathbf{i}} = \bigoplus_{i\in\mathbf{i}} Q_i$ où les Q_i sont les enveloppes injectives des Λ_2-modules simples S_i et $\mathcal{E}_{\mathbf{i}}^\dagger = \prod_{i\in\mathbf{i}} \mathcal{E}_i^\dagger$ où les $\mathcal{E}_i^\dagger$ sont les foncteurs définis dans [7] ; $\mathcal{E}_{\mathbf{i}}^\dagger$ est bien défini car les $\mathcal{E}_i^\dagger$ intervenant commutent. Soit maintenant $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\cdots\mathbf{i}_k$ une expression réduite du mot de plus grande longueur du groupe de Weyl correspondant à Δ ; on peut lui associer le Λ_2-module

$$T_{\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\cdots\mathbf{i}_k} = \bigoplus_{\ell=1}^{k} \mathcal{E}_{\mathbf{i}_1}^\dagger \mathcal{E}_{\mathbf{i}_2}^\dagger \cdots \mathcal{E}_{\mathbf{i}_\ell}^\dagger (Q_{\mathbf{i}_\ell}) \oplus \bigoplus_{\mathbf{i}\in I} Q_{\mathbf{i}}.$$

C'est un module rigide basique maximal.

Proposition 2.

(i) *Soient* $X, X' \in \operatorname{mod}\Lambda_1\Gamma_1$. *Alors* $F(X) \simeq F(X')$ *si et seulement si* $S(\Phi(X)) \simeq S(\Phi(X'))$.
(ii) *Un* $\Lambda_1\Gamma_1$*-module* X *est* F*-rigide* (*resp.* F*-basique*) *si et seulement si* $\Phi(X)$ *est* a_2*-rigide* (*resp.* a_2*-basique*).
(iii) *Soit* $T_2 \in \operatorname{mod}\Lambda_2$ a_2*-basique tel que* $\Sigma(T_2) = T_{\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\cdots\mathbf{i}_k}$. *Ce module est* a_2*-rigide maximal et il a* r *facteurs directs indécomposables non* a_2*-isomorphes où* r *est le nombre de racines positives du système associé à* Δ.
(iv) *Les* Λ_2*-modules* a_2*-rigides ont au plus* r *facteurs directs non* a_2*-isomorphes. De plus, ceux qui sont maximaux ont exactement* r *facteurs directs non* a_2*-isomorphes.*
(v) *Un* Λ_2*-module* X *est* a_2*-rigide maximal si et seulement si* $\Sigma(X)$ *est rigide maximal. De plus, tout* Λ_2*-module rigide basique maximal* a_2*-stable admet au moins un antécédent par* Σ.

Soit $T = T_0 \oplus X$ un Λ_2-module a_2-rigide maximal et a_2-basique, tel que X soit un facteur indécomposable non projectif. Si f est une $\operatorname{add}(S(T_0))$-approximation minimale à gauche de X, alors f est injective et l'on notera $\nu_X(T) = T_0 \oplus Y$ où Y est le conoyau de f.

Proposition 3.

(i) *Le module* Y *est indécomposable et* $\nu_X(T)$ *est* a_2*-rigide maximal et* a_2*-basique.*
(ii) $\nu_Y(\nu_X(T)) = T$.
(iii) $\Sigma(\nu_X(T))$ *ne dépend que de* $\Sigma(T)$ *et* $\Sigma(X)$.

Le module $\Sigma(T)$ est un Λ_2-module rigide basique maximal invariant par l'action de a_2. On peut considérer, suivant [5], pour tout Λ_2-module rigide basique maximal T' et pour tout facteur indécomposable X' de T' le module $\mu_{X'}(T')$ obtenu par mutation. Notons $\tilde{X}$ l'ensemble des facteurs indécomposables de $\Sigma(X)$. On montre que les mutations ν s'expriment de la manière suivante à partir des mutations μ :

$$\Sigma\big(\nu_X(T)\big) = \prod_{X'\in\tilde{X}} \mu_{X'}\big(\Sigma(T)\big)$$

où le second membre ne dépend pas de l'ordre des mutations.

3. Algèbres amassées

Soient G_i et G les groupes de Lie complexes, connexes et simplement connexes de type Δ_i et Δ ($i \in \{1,2\}$). Soient N_i et N leurs sous groupes unipotents maximaux et $\mathfrak{n}_i$ et $\mathfrak{n}$ les algèbres de Lie de N_i et N. À chaque Λ_2-module X, on peut associer une fonction δ_X de $U(\mathfrak{n}_2)^*$ (voir [9]) et donc une fonction φ_X de $\mathbb{C}[N_2]$ (voir la Section 1). Notons $\psi_X = p(\varphi_X)$, où p est définie dans la Section 1. Si X' est un $\Lambda_1\Gamma_1$-module, on notera aussi $\psi_{X'} = \psi_{\Phi(X')}$.

Proposition 4.

(i) *Pour tout $X \in \operatorname{mod} \Lambda_2$, $\psi_X = \psi_{a_2(X)}$. Autrement dit ψ_X ne dépend que de $\Sigma(X)$.*
(ii) *Soit T un module a_2-rigide maximal tel que $\Sigma(T) = T_{\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\cdots\mathbf{i}_k}$. Alors l'ensemble des ψ_X où X est un facteur indécomposable de T forme l'une des graines initiales de* [1] *pour l'algèbre amassée $\mathbb{C}[N]$. Cette graine initiale ne dépend que du mot $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2\cdots\mathbf{i}_k$ et on obtient toutes les graines initiales de* [1] *de cette façon.*
(iii) *Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des Λ_2-modules a_2-rigides maximaux que l'on peut atteindre par la mutation ν à partir de T. Il y a une bijection entre les classes d'isomorphisme de $\Sigma(\mathcal{E})$ et les amas de l'algèbre amassée $\mathbb{C}[N]$.*

Tous les résultats précédents concernant Λ_2 et Σ se traduisent par des résultats équivalents concernant $\Lambda_1\Gamma_1$ et F. On obtient le corollaire suivant :

Corollaire 5. *Les variables d'amas de $\mathbb{C}[N]$ sont des fonctions f sur N telles que $p^{-1}(f)$ soit constituée de variables d'amas appartenant toutes à un même amas de $\mathbb{C}[N_2]$. L'image réciproque par p d'un amas de $\mathbb{C}[N]$ est un amas de $\mathbb{C}[N_2]$.*

De plus, si $\mathbf{x}$ est un amas de $\mathbb{C}[N]$, et $x \in \mathbf{x}$ n'est pas dans l'anneau des coefficients de l'algèbre amassée (*autrement dit s'il ne provient pas d'un Λ_2-module projectif*),

$$p^{-1}(\nu_x(\mathbf{x})) = \prod_{p(x_0)=x} \mu_{x_0}(p^{-1}(\mathbf{x}))$$

la composition étant bien définie car les μ_{x_0} commutent dans ce cas.

Ce corollaire peut aussi se démontrer directement avec les mêmes techniques que dans [2].

Si $M \in \operatorname{mod} \Lambda_1$ est stable par a_1 (i.e. vérifie $a_1 M \simeq M$) et $\mathbf{i} \in I = I_1/a_1$, on note $k_{\mathbf{i}}(M)$ la dimension du sous-module maximal de M supporté par $\mathbf{i}$. On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de Λ_1-modules rigides stables par a_1, et si $\mathbf{d}$ est un vecteur dimension stable par a_1, $\mathcal{R}_{\mathbf{d}}$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}$ de dimension $\mathbf{d}$ et $\mathcal{R}_{\mathbf{d},\mathbf{i},k} = \{M \in \mathcal{R}_{\mathbf{d}} \mid k_{\mathbf{i}}(M) = k\}$. On montre que $\mathcal{E}_{\mathbf{i}}^{\dagger}$ induit une injection de $\mathcal{R}_{\mathbf{d},\mathbf{i},k}$ dans $\mathcal{R}_{\mathbf{d}-k\mathbf{i},\mathbf{i},0}$.

Pour tout $M \in \operatorname{mod} \Lambda_1$ stable par a_1, notons ε_M l'élément de $U(\mathfrak{n})^*$ correspondant à ψ_M.

Théorème 6.

(i) *Pour tout $M \in \mathcal{R}_{\mathbf{d}}$, il existe $f_M \in U(\mathfrak{n})$ homogène de degré $\mathbf{d}$ tel que pour tout $N \in \mathcal{R}$, $\varepsilon_N(f_M) = \delta_{MN}$.*
(ii) *Les monômes d'amas* (*c'est-à-dire les produits de variables d'amas d'un même amas*) *de $\mathbb{C}[N]$ sont linéairement indépendants.*

Démonstration. (i) On construit f_M par récurrence sur $\mathbf{d}$. Pour $\mathbf{d} = 0$, $f_0 = 1$. Supposons $f_{M'}$ construit pour tout M' de dimension strictement inférieure à $\mathbf{d}$. Comme M est nilpotente, il existe $\mathbf{i}$ tel que $k_{\mathbf{i}}(M) > 0$. Raisonnons donc par récurrence descendante sur $k_{\mathbf{i}}(M)$. Supposons le résultat montré pour tous les M' de dimension $\mathbf{d}$ et tels que $k_{\mathbf{i}}(M) < k_{\mathbf{i}}(M') \leqslant \mathbf{d}_{\mathbf{i}}$. Soit $f_0 = f_{\mathcal{E}_{\mathbf{i}}^{\dagger}(M)} e_{\mathbf{i}}^{k_{\mathbf{i}}(M)}$. Alors

$$f_M = f_0 - \sum_{N \in \mathcal{R}_{\mathbf{d}} \mid k_{\mathbf{i}}(N) > k_{\mathbf{i}}(M)} \varepsilon_N(f_0) f_N$$

convient.

(ii) On déduit du point précédent que les ε_M sont linéairement indépendants, donc les ψ_M, et on conclut en observant que les monômes d'amas sont exactement les ψ_M, où M parcourt $\mathcal{R}$. $\square$

Le second point est une conjecture de Fomin et Zelevinsky, qui avait été montré dans le cas simplement lacé par Geiß, Leclerc et Schröer.

Références

[1] A. Berenstein, S. Fomin, A. Zelevinsky, Cluster algebras III: Upper bounds and double Bruhat cells, Duke Math. J. 126 (1) (2005) 1–52.
[2] G. Dupont, An approach to non simply laced cluster algebras, arXiv: math/0512043.
[3] S. Fomin, A. Zelevinsky, Cluster algebras I: Foundations, J. Amer. Math. Soc. 15 (2) (2002) 497–529.
[4] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, Semicanonical bases and preprojective algebras, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 38 (2) (2005) 193–253.
[5] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, Rigid modules over preprojective algebras, Invent. Math. 165 (3) (2006) 589–632.
[6] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, Semicanonical bases and preprojective algebras II: A multiplication formula, Compositio Math. 143 (5) (2007) 1313–1334.
[7] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, Partial flag varieties and preprojective algebras, arXiv: math/0609138, Ann. Inst. Fourier, à paraître.
[8] V.G. Kac, Infinite Dimensional Lie Algebras, Cambridge University Press, 1994.
[9] G. Lusztig, Semicanonical bases arising from enveloping algebras, Adv. Math. 151 (2) (2000) 129–139.
[10] G. Lusztig, Introduction to Quantum Groups, Progress in Mathematics, vol. 110, Birkhäuser, Boston, 1993.
[11] I. Reiten, C. Riedtmann, Skew group algebras in the representation theory of Artin algebras, J. Algebra 92 (1) (1985) 224–282.
[12] D. Yang, Non-simply-laced clusters of finite type via Frobenius morphism, arXiv: math/0608114.