

Available online at www.sciencedirect.com



C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1103-1108

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse numérique

Stabilité numérique d'une formulation mixte pour les coques

Hanen Ferchichi^a, Saloua Mani Aouadi^b

^a École polytechnique de Tunisie, B.P. 743, 2078 La Marsa, Tunisie ^b Faculté des sciences de Tunis, campus universitaire, 1060 Tunis, Tunisie

Reçu le 17 juin 2008 ; accepté après révision le 4 septembre 2008

Disponible sur Internet le 2 octobre 2008

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

On étudie la stabilité numérique d'une formulation mixte face au verrouillage membranaire des coques minces. On présente des résultats numériques qui mettent en évidence le déverrouillage par cette formulation pour des coques particulières. *Pour citer cet article : H. Ferchichi, S.M. Aouadi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Numerical stability of a mixed formulation for a non-inhibited shells. We study the numerical stability of a mixed formulation for bending dominated shells. We present some numerical results which confirm the theoretical estimates and prove that locking can be overcome in particular cases. *To cite this article: H. Ferchichi, S.M. Aouadi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).* © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

We study the numerical stability of the mixed formulation proposed in [1] to ovoid the membrane locking of thin shells. This formulation is based on a partial reduced integration on membrane and shear energy by introducing a partition energy parameter c_0 (FM). It allows to overcome the locking, when a mixed finite element is well chosen, for shells having a first and second fundamental forms piecewise constant. We implement this mixed and the classical variational formulations with FreeFem++. We first validate our two codes on the standard example of the Scordelis–Lo roof. We then study their sensitivity in front of the locking. Our survey is firstly based on a detection of the locking which consists on carrying out computations on non-inhibited shells for various thickness of the same structure. Our selected tests are those of [3] used in [5] to test the robustness of the MITC triangular elements. Namely, the cylinder and the hyperboloïd. The results confirm the theoretical predictions on the stability for the cylinder and prove a better sensitivity of the mixed formulation for the hyperboloïd. We observe (Tables 1 and 3) a good convergence properties for the mixed scheme and a degradation of the approximation and presence of locking for the standard scheme. We also observe the bending dominated deformation on the mixed scheme and an excessive domination of the membrane energy for low thickness for the standard scheme.

Adresses e-mail: ferchichihanen@gmail.com (H. Ferchichi), saloua.mani@fst.rnu.tn (S.M. Aouadi).

¹⁶³¹⁻⁰⁷³X/\$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés. doi:10.1016/j.crma.2008.09.007

1. Introduction

Le verrouillage numérique est une pathologie qui affecte les méthodes des éléments finis standards pour les coques minces. Il se manifeste par une dégradation de l'erreur d'approximation lorsque l'épaisseur de la coque est faible et empèche une bonne représentation des différents modes des énergies [3,6]. Les méthodes mixtes présentent une alternative pour échapper au verrouillage par l'introduction de nouvelles inconnues. Une condition inf-sup discrète est alors à vérifier. Cette condition, bien que établie pour les plaques et les poutres [3,1], est difficile à réaliser pour les coques. Une condition inf-sup relaxée est proposée dans [2]. Des méthodes mixtes stabilisées sont proposées dans [4]. Dans ce travail, on s'intéresse à la formulation introduite dans [1] qui se base sur une intégration partielle des contraintes membranaires et de cisaillement. La stabilité numérique est réalisée pour une classe restreinte de géométries en particulier pour les coques cylindriques. Nous faisons une validation des prédictions théoriques et faisons une étude comparative avec l'élément MITC4 [5].

2. Formulation mixte de Arnold et Brezzi

Les indices latins varient de 1 à 3 et les indices grecs de 1 à 2, on fait la convention de la sommation sur les indices répétés. On considère une coque d'épaisseur *t* et de surface moyenne *S* décrite à l'aide d'une carte $\varphi : \omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. On note $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = (\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|})$ la base locale covariante et $(\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3)$ la base contravariante associée. On définit le tenseur d'élasticité, qu'on suppose uniformément, elliptique par :

$$a^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + a^{\alpha\delta} a^{\beta\gamma} + \frac{2\nu}{1-\nu} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} \right) \tag{1}$$

où *E* est le module de Young, ν le coefficient de Poisson et $a^{\alpha\beta} = \vec{a}^{\alpha} \cdot \vec{a}^{\beta}$. On note $(a_{\alpha\beta\gamma\delta})_{\alpha\beta\gamma\delta} = ((a^{\alpha\beta\gamma\delta})_{\alpha\beta\gamma\delta})^{-1}$ l'inverse du tenseur d'élasticité et $\Upsilon = (\Upsilon_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$, $\Phi = (\Phi_{\alpha})_{\alpha}$, $\Lambda = (\Lambda_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ les tenseurs linéarisés respectifs de changement de courbure, de cisaillement et de membrane. Arnold et Brezzi proposent dans [1] une formulation mixte pour une coque de Naghdi à flexion dominante. Ils introduisent, en plus du déplacement \vec{u} des points de la surface moyenne et de la rotation θ de la normale, de nouvelles inconnues pour $c_0 \in [0, t^{-2}]$ par :

$$\lambda^{\gamma\delta} = a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} \lambda_{\alpha\beta} = (t^{-2} - c_0) a^{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda_{\alpha\beta}(\vec{u}), \qquad \phi_{\alpha} = (t^{-2} - c_0) \frac{E}{2(1+\nu)} \Phi_{\alpha}(\vec{u},\theta).$$

Cette formulation s'écrit sous la forme :

(FM)
$$\begin{cases} \text{Trouver } (\vec{u}, \theta) \in V, (\phi, \lambda) \in W \text{ tels que :} \\ A(\vec{u}, \theta; \vec{v}, \psi) + B(\vec{v}, \psi; \phi, \lambda) = F(\vec{v}) \quad \forall (\vec{v}, \psi) \in V, \\ B(\vec{u}, \theta; \eta, \chi) - \frac{t^2}{1 - c_0 t^2} C(\phi, \lambda; \eta, \chi) = 0 \quad \forall (\eta, \chi) \in W, \end{cases}$$

où

$$\begin{split} A(\vec{u},\theta;\vec{v},\psi) &= \frac{1}{12} \int_{\omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \Upsilon_{\alpha\beta}(\vec{u},\theta) \Upsilon_{\gamma\delta}(\vec{v},\psi) \sqrt{a} \, \mathrm{d}x + c_0 \int_{\omega} a^{\alpha\beta} \frac{E}{2(1+\nu)} \varPhi_{\alpha}(\vec{u},\theta) \varPhi_{\beta}(\vec{v},\psi) \sqrt{a} \, \mathrm{d}x \\ &+ c_0 \int_{\omega} a^{\alpha\beta\gamma\delta} \Lambda_{\alpha\beta}(\vec{u}) \Lambda_{\gamma\delta}(\vec{v}) \sqrt{a} \, \mathrm{d}x, \\ B(\vec{v},\psi;\eta,\chi) &= \int_{\omega} a^{\alpha\beta} \varPhi_{\alpha}(\vec{v},\psi) \eta_{\beta} \sqrt{a} \, \mathrm{d}x + \int_{\omega} a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} \Lambda_{\alpha\beta}(\vec{v}) \chi_{\gamma\delta} \sqrt{a} \, \mathrm{d}x, \\ C(\phi,\lambda;\eta,\chi) &= \frac{2(1+\nu)}{E} \int_{\omega} a^{\alpha\beta} \varPhi_{\alpha} \eta_{\beta} \sqrt{a} \, \mathrm{d}x + \int_{\omega} a^{p\alpha} a^{q\beta} a^{r\gamma} a^{s\delta} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \lambda_{pq} \chi_{rs} \sqrt{a} \, \mathrm{d}x, \\ F(v) &= \int_{\omega} f^i v_i \sqrt{a} \, \mathrm{d}x, \quad f = (f^i) \text{ est la charge appliquée à la surface moyenne, } \sqrt{a} = |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|, \\ V &= \left\{ (\vec{v}, \psi), v_i, \psi_{\alpha} \in H^1(\omega), v_i/\Gamma_d = \psi_{\alpha}/\Gamma_d = 0, \ \Gamma_d \varsubsetneq \partial \omega \right\}, \qquad W = \left\{ (\eta, \chi), \ \eta_{\alpha}, \chi_{\alpha\beta} \in L^2(\omega) \right\}. \end{split}$$

3. Approximation

On suppose que ω est polygonal, on considère une triangulation régulière τ^h de ω et on introduit les espaces

$$L_h^1 = \left\{ v \in H^1(\omega), \ v_{/T} \in P_2(T) \ \forall T \in \tau^h, v_{/\Gamma_d} = 0 \right\},$$

$$B_h^1 = \left\{ v \in H^1(\omega), \ v_{/T} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 p, \ p \in P_0(T) \ \forall T \in \tau^h \right\}, \qquad H_h^1 = L_h^1 \oplus B_h^1.$$
(2)

Ci-dessus, λ_1 , λ_2 et λ_3 désignent les coordonnées barycentriques pour chaque triangle *T*. On introduit les espaces discrets des déplacements et des multiplicateurs et une semi norme sur *W* par :

$$V_{h} = \left\{ (v_{h}, \psi_{h}) \in V, \ v_{hi}, \psi_{h\alpha} \in H_{h}^{1} \right\}, \qquad W_{h} = \left\{ (\eta_{h}, \chi_{h}) \in W, \ \eta_{h\alpha}, \chi_{h\alpha\beta} \in P_{0}(T) \ \forall T \right\},$$
$$\||\lambda|\| = \sup_{0 \neq v \in V_{h}} \frac{B(v; \lambda)}{\|v\|}.$$

Il est prouvé dans [1] que si la première et la seconde formes fondamentales de la surface moyenne sont constantes par morceaux, alors il existe une constante \tilde{C} indépendante de *h* telle que

$$\inf_{0 \neq \lambda \in W_h} \sup_{0 \neq v \in V_h} \frac{B(v; \lambda)}{\|v\| \cdot \|\lambda\|} \ge \widetilde{C}$$
(3)

et la solution du problème mixte discret converge uniformément par rapport à l'épaisseur vers la solution de (FM).

4. Résultats numériques

La programmation est réalisée sur FreeFem++. On appellera codeM notre code associé à la formulation (FM) et codeV notre code associé à la formulation variationnelle classique de la coque de Naghdi à flexion dominante.

4.1. Test de validation

On considère la toiture de Scordelis chargée par son propre poids et dont la surface moyenne S occupe au repos :

$$S = \left\{ M = \left(R \sin\left(\frac{x}{R}\right), y, R \cos\left(\frac{x}{R}\right) \right) \in \mathbf{R}^3; (x, y) \in \left[-\frac{2\pi R}{9}, \frac{2\pi R}{9} \right] \times \left[-R, R \right] \right\}.$$
(4)

On suppose que la surface moyenne est maintenue à ses extrémités courbées par des diaphragmes rigides. Pour R = 25 in, t = 0.25 in, $E = 4.32 \times 10^8$ psi, v = 0 et un poids de densité 90 lb/sqin, la solution analytique pour le déplacement vertical du point *B* milieu du bord libre donne $U_z(B) = -0.3024$ in. Dans la Fig. 1, on représente le déplacement du point *B* en fonction du pas de maillage obtenu par le codeM pour différentes valeurs de c_0 ainsi que par le codeV. On y remarque la convergence des solutions des deux codes vers la solution analytique.

4.2. Stabilité numérique du codeM

Notre étude de la stabilité se base d'abord sur la détection du verrouillage en faisant les calculs sur une même coque non inhibée pour différentes valeurs de l'épaisseur. On évalue nos codes à travers les énergies discrètes E_s , E_m , E_b et E respectives de cisaillement, de membrane, de flexion et totale. On compare nos résultats avec ceux de [5] obtenus en utilisant l'élément *MITC*4.

4.2.1. Coque cylindrique

On considère une coque chargée par une pression périodique normale p, de surface moyenne au repos donnée par (4) avec $(x, y) \in]-\pi R, \pi R[\times]-R, R[$. On prend $p = t^{-3} p_0 \cos(\frac{2x}{R}), R = 1 \text{ mm}, E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}, v = \frac{1}{3}, p_0 = 1 \text{ MPa}$ et un maillage uniforme à 20 noeuds. Les tableaux (Tableau 1) présentent les partitions de l'énergie obtenues par le codeV ($c_0 = t^{-2}$) et le codeM en faisant varier l'épaisseur. Ces partitions prouvent le caractère verrouillant



Fig. 1. Déplacement vertical du point *B*. Fig. 1. Vertical displacement of the point *B*.

Tableau 1 Partition de l'énergie pour le cylindre : codeV et codeM

Table 1

Energy partition for the cylinder, code + and codern							
$c_0 = t^{-2}$	$t = 10^{-2}$	$t = 10^{-3}$	$t = 10^{-4}$	$c_0 = 10$	$t = 10^{-2}$	$t = 10^{-3}$	$t = 10^{-4}$
$E_b(\vec{u}, \theta)$	2,29759	722,072	362,004	$E_b(\vec{u},\theta)$	2,34683	2344,26	$2,34423 \times 10^{6}$
$E_m(\vec{u},\theta)$	0,0235068	573,263	28555,8	$E_m(\vec{u},\theta)$	0,00598717	4,82489	4809,22
$E_s(\vec{u},\theta)$	0,0017529	0,580015	24,4264	$E_s(\vec{u},\theta)$	0,000850946	0,855809	857,913
$E(\vec{u}, \theta)$	2,32285	1295,92	28942,2	$E(\vec{u}, \theta)$	2,35366	2349,94	$2,3499 \times 10^{6}$

Tableau 2

Partition de l'énergie pour le cylindre : codeM et *MITC*4, $t = 10^{-2}$ et $t = 10^{-4}$ Table 2

Energy partition for the cylinder: codeM and *MITC*4, $t = 10^{-2}$ and $t = 10^{-4}$

0,1		,							
$t = 10^{-2}$	$E_b(\vec{u},\theta)$	$E_m(\vec{u},\theta)$	$E_s(\vec{u},\theta)$	$E(\vec{u},\theta)$	$t = 10^{-4}$	$E_b(\vec{u},\theta)$	$E_m(\vec{u},\theta)$	$E_s(\vec{u},\theta)$	$E(\vec{u}, \theta)$
$c_0 = 0, 1$	2,38068	0,0211134	0,00895237	2,41074	$c_0 = 0, 1$	$2,38057 \times 10^{6}$	20986,6	8712,31	$2,41027 \times 10^{6}$
$c_0 = 1$	2,35782	0,0095495	0,00215537	2,36952	$c_0 = 1$	$2,35726 \times 10^{6}$	9204,54	1973,13	$2,36844 \times 10^{6}$
$c_0 = 100$	2,34313	0,00526922	0,000661576	2,34906	$c_0 = 100$	$2,33715 \times 10^{6}$	2415,47	691,67	$2,34025 \times 10^{6}$
$c_0 = 1000$	2,33597	0,00686455	0,0018877	2,34472	$c_0 = 1000$	$2,32836 \times 10^{6}$	2593,36	1811,9	$2,33277 \times 10^{6}$
MITC4	2,34147	0,00513031	$2,85136909 \times 10^{-4}$	2,34677	MITC4	$2,327144026 \times 10^{6}$	549,7055218	13,82879987	$2,3276885 \times 10^{6}$

de la formulation variationnelle pour les faibles épaisseurs, la dominance de l'énergie membranaire et le déverrouillage par la formulation mixte. Les tableaux (Tableau 2) présentent une comparaison des partitions de l'énergie avec celles obtenues par l'élément fini *MITC4* avec un maillage uniforme N = 96 [5]. Ils traduisent le caractère de la flexion dominante pour la déformation. Sur la Fig. 2, on trace les courbes représentant les erreurs relatives sur l'énergie totale $|\frac{E(20)-E(i)}{E(20)}|$ en fonction du nombre de pas de maillage *i*, en prenant comme référence la valeur calculée pour le maillage le plus fin E(20) et ce pour différentes valeurs de l'épaisseur. Cette erreur est inférieure à 1 % pour $c_0 = 100$ et N = 10. Ceci met en évidence la stabilité numérique du codeM pour le cylindre.

4.2.2. Hyperboloïde

On considère une hyperboloïde axisymétrique occupant au repos la région $S \times]\frac{-t}{2}, \frac{t}{2}[, où :$

$$S = \left\{ M = \left(\sqrt{R^2 + y^2} \sin\left(\frac{x}{R}\right), y, \sqrt{R^2 + y^2} \cos\left(\frac{x}{R}\right) \right) \in \mathbf{R}^3, \ (x, y) \in \left] - R\pi, R\pi\left[\times\right] - R, R\left[\right\}.$$

On suppose que la coque est à bords libres chargée par une pression périodique normale $p = t^{-3}p_0 \cos(\frac{2x}{R})$. On prend $v = \frac{1}{3}$, $E = 2 \times 10^{11}$ MPa, R = 1 mm, $p_0 = 1$ MPa. En fait il existe pour cette structure une couche limite de largeur $0.5\sqrt{tR}$ [5]. Pour éviter les singularités causées par cette couche limite, il faudrait adapter le maillage en



Fig. 2. Variation de l'erreur relative de l'énergie pour le cylindre, codeM. Fig. 2. Energy error for the cylinder, codeM.

Tableau 3

Partition de l'énergie pour l'hyperboloïde : codeV et codeM

Table 3

Energy partition for the hyperboloid: codeV and codeM

CodeV	$t = 10^{-2}$	$t = 10^{-3}$	$t = 10^{-4}$	$c_0 = 100$	$t = 10^{-2}$	$t = 10^{-3}$	$t = 10^{-4}$
$E_b(u, \theta)$	$6,35802 \times 10^{-7}$	$6,71194 \times 10^{-5}$	$1,56805 \times 10^{-5}$	$E_b(u,\theta)$	$4,4856 \times 10^{-7}$	0,000448239	0,448184
$E_m(u,\theta)$	$1,5207 \times 10^{-8}$	$9,07687 \times 10^{-5}$	0,00195652	$E_m(u,\theta)$	$4,13338 \times 10^{-9}$	$4,23142 \times 10^{-7}$	0,000377696
$E_s(u, \theta)$	$5,52352 \times 10^{-9}$	$4,40619 \times 10^{-5}$	0,00102192	$E_s(u,\theta)$	$3,47272 \times 10^{-10}$	$1,18971 \times 10^{-7}$	0,000109922
$E(u, \theta)$	$6,56533 \times 10^{-7}$	0,00020195	0,00299412	$E(u, \theta)$	$4,53041 \times 10^{-7}$	0,000448781	0,448672

Tableau 4

Partition de l'énergie pour l'hyperboloïde : codeM et *MITC*4, $t = 10^{-2}$ et $t = 10^{-4}$

Table 4

Energy partition for the hyperboloid: codeM and *MITC*4, $t = 10^{-2}$ and $t = 10^{-4}$

$t = 10^{-2}$	$E_b(u,\theta)$	$E_m(u,\theta)$	$E_{s}(u,\theta)$	$E(u, \theta)$
$c_0 = 0, 1$	$4,79086 \times 10^{-7}$	$1,45449 \times 10^{-7}$	$4,91983 \times 10^{-9}$	$6,29455 \times 10^{-7}$
$c_0 = 1$	$4,5086 \times 10^{-7}$	$2,59099 \times 10^{-8}$	$6,99096 \times 10^{-10}$	$4,77469 \times 10^{-7}$
$c_0 = 10$	$4,48932 \times 10^{-7}$	$6,59129 \times 10^{-9}$	$2,98699 \times 10^{-10}$	$4,55822 \times 10^{-7}$
$c_0 = 1000$	$4,45954 \times 10^{-7}$	$4,45906 \times 10^{-9}$	$9,71709 \times 10^{-10}$	$4,51384 \times 10^{-7}$
MITC4	$4,48832 \times 10^{-7}$	$3,754967 \times 10^{-9}$	$2,69677 imes 10^{-10}$	$4,52806 imes 10^{-7}$
$t = 10^{-4}$	$E_b(u,\theta)$	$E_m(u,\theta)$	$E_s(u,\theta)$	$E(u, \theta)$
$c_0 = 0, 1$	0,48594	0,131755	0,00472812	0,622424
$c_0 = 1$	0,450993	0,0218627	0,000553755	0,473409
$c_0 = 10$	0,448627	0,00276773	$6,45363 \times 10^{-5}$	0,451459
$c_0 = 1000$	0,445446	0,00074499	0,000762162	0,446953
MITC4	0,44850549	$1,70951246 \times 10^{-5}$	$2,4873649 \times 10^{-6}$	0,4485263

choisissant par exemple 2N pas dans chacune des directions axiale et circulaire en dehors de la surface de la couche limite et N pas dans la direction axiale avec 2N pas dans la direction circulaire à l'intérieur. Les résultats obtenus par le codeV montrent la dominance de l'énergie membranaire et ceux obtenus par le codeM pour $c_0 = 100$ traduisent le caractère non verrouillant de la formulation mixte (Tableau 3). Dans le Tableau 4, on compare nos résultats avec ceux obtenus par l'élément *MITC*4 [5]. On remarque une compatibilité des résultats pour $c_0 = 1, 10, 100, 1000$.

Les courbes des erreurs montrent une convergence rapide et une stabilité par rapport à la variation de l'épaisseur, Fig. 3. Cependant, on détecte une dégradation des résultats, par rapport à ceux de [5], pour les faibles valeurs de c_0 ($c_0 = 0,1$). L'énergie membranaire et de cisaillement n'est plus négligeable devant l'énergie de flexion (Tableau 4).



Fig. 4. Hyperboloïde après déformation $c_0 = 0, 1, 1, 100$ de gauche à droite. Fig. 4. Hyperboloid after deformation, $c_0 = 0.1, 1, 100$ from left to right.

Sur la Fig. 4, on remarque des oscillations de la coque déformée pour $c_0 = 0, 1$. Les singularités observées peuvent traduire la présence de valeurs propres polluantes dépendant de c_0 dans le spectre discret, la condition infsup discrète (3) n'étant pas vérifiée. Mais en dépassant le cadre de la preuve de (3) et en s'appuyant sur nos résultats numériques, on peut affirmer que la formulation (FM) est moins sensible au verrouillage pour l'hyperboloïde, la restriction sur la géométrie dans [1] étant uniquement un artifice de calcul.

5. Conclusion

Le codeM présente de bonnes propriétés de convergence pour les coques non inhibées étudiées. Il est non verrouillant pour le cylindre conformément aux prédictions théoriques et moins sensible au verrouillage, non verrouillant pour un choix convenable de c₀ pour l'hyperboloïde.

Références

- [1] D.N. Arnold, F. Brezzi, Locking-free finite element methods for shells, Math. Comput. 66 (217) (1997) 1–14.
- [2] J.H. Bramble, T. Sun, A locking-free finite element method for Naghdi shells, J. Comput. Appl. Math. 89 (1997) 119–133.
- [3] D. Chapelle, K.J. Bathe, The Finite Element Analysis of Shells-Fundamentals, Springer-Verlag, 2003.
- [4] D. Chapelle, R. Stenberg, Stabilized finite element formulations for shells in a bending dominated state, SIAM J. Numer. Anal. 36 (1) (1999) 32–73.
- [5] I. Paris, PhD Robustesse des éléments finis triangulaires de coques, Université Paris 6, Novembre, 2006.
- [6] J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, Coques Elastiques Minces Propriétés Asymptotiques, Masson, 1997.