

Équations aux dérivées partielles

Le problème infrarouge pour l'électron habillé non relativiste dans un champ magnétique

Laurent Amour^a, Jérémy Faupin^{b,1}, Benoît Grébert^c, Jean-Claude Guillot^d

^a Laboratoire de mathématiques EDPPM, FRE-CNRS 3111, Université de Reims, Moulin de la Housse, BP 1039, 51687 Reims cedex 2, France

^b Institut for Matematiske Fag, Aarhus Universitet, Ny Munkegade, D-8000 Aarhus C, Denmark

^c Laboratoire de mathématiques Jean-Leray, UMR-CNRS 6629, Université de Nantes, 2, rue de la Houssinière, 44072 Nantes cedex 3, France

^d Centre de mathématiques appliquées, UMR-CNRS 7641, École polytechnique, 99128 Palaiseau cedex, France

Reçu le 2 mai 2008 ; accepté le 11 septembre 2008

Présenté par Jean-Michel Bony

Résumé

Nous considérons un électron non relativiste interagissant avec un champ magnétique classique dans la direction x_3 et un champ électromagnétique quantifié. Le système est invariant par translation suivant x_3 et l'Hamiltonien correspondant admet une décomposition $H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H(P_3) dP_3$. Pour une impulsion P_3 fixée suffisamment petite, nous montrons que $H(P_3)$ possède un état fondamental dans la représentation Fock si et seulement si $E'(P_3) = 0$, où $P_3 \mapsto E'(P_3)$ est la dérivée de l'application $P_3 \mapsto E(P_3) = \inf \sigma(H(P_3))$. Lorsque $E'(P_3) \neq 0$, nous obtenons l'existence d'un état fondamental dans une représentation non équivalente à la représentation Fock. Ce résultat est valable pour des valeurs suffisamment petites de la constante de couplage. **Pour citer cet article :** L. Amour et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

The infrared problem for the dressed non-relativistic electron in a magnetic field. We consider a non-relativistic electron interacting with a classical magnetic field pointing along the x_3 -axis and with a quantized electromagnetic field. The system is translation invariant in the x_3 -direction and the corresponding Hamiltonian has a decomposition $H \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H(P_3) dP_3$. For a fixed momentum P_3 sufficiently small, we prove that $H(P_3)$ has a ground state in the Fock representation if and only if $E'(P_3) = 0$, where $P_3 \mapsto E'(P_3)$ is the derivative of the map $P_3 \mapsto E(P_3) = \inf \sigma(H(P_3))$. If $E'(P_3) \neq 0$, we obtain the existence of a ground state in a non-Fock representation. This result holds for sufficiently small values of the coupling constant. **To cite this article:** L. Amour et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Adresses e-mail : laurent.amour@univ-reims.fr (L. Amour), jeremy.faupin@math.u-bordeaux1.fr (J. Faupin), benoit.grebert@univ-nantes.fr (B. Grébert), guillot@cmapx.polytechnique.fr (J.-C. Guillot).

¹ New address: Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR-CNRS 5251, Université de Bordeaux 1, 351 cours de la libération, 33405 Talence Cedex, France.

Supported by the Centre for Theory in Natural Science.

Abridged English version

We consider a non-relativistic electron of charge e and mass m interacting with a classical magnetic field pointing along the x_3 -axis, an electrostatic potential, and the quantized electromagnetic field in the Coulomb gauge. The position and the momentum of the electron are denoted respectively by $x = (x_1, x_2, x_3)$ and $p = (p_1, p_2, p_3) = -i\nabla_x$. The classical magnetic field is of the form $(0, 0, b(x'))$, where $x' = (x_1, x_2)$ and $b(x') = (\partial a_2/\partial x_1)(x') - (\partial a_1/\partial x_2)(x')$. Here $a(x')$ is a vector potential. The electrostatic potential is denoted by $V(x')$. The quantized electromagnetic field in the Coulomb gauge is defined by (2), where ρ is a real ultraviolet cutoff function satisfying (3), $\epsilon_1(k)$ and $\epsilon_2(k)$ are polarization vectors orthogonal to each other and to k , and $a_\lambda^*(k)$ and $a_\lambda(k)$ are the usual creation and annihilation operators obeying the canonical commutation relations (5). The Pauli Hamiltonian H_g associated to the system we consider acts on $\mathcal{H}_{el} \otimes \mathcal{H}_{ph}$, where $\mathcal{H}_{el} = L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ is the Hilbert space for the electron, and \mathcal{H}_{ph} is the symmetric Fock space constructed over $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ for the photons. The Hamiltonian H_g is then formally given by (1), where the charge of the electron e is replaced by a coupling parameter g in the terms containing the quantized electromagnetic field. The Hamiltonian for the photons in the Coulomb gauge is given by (4), and $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ is the 3-component vector of the Pauli matrices. Noting that H_g formally commutes with the operator of total momentum in the direction x_3 , $P_3 = p_3 + d\Gamma(k_3)$, one can show (see [3]) that H_g has a decomposition

$$H_g = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_g(P_3) dP_3.$$

If P_3 is fixed, $H_g(P_3)$ acts on $L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_2) \otimes \mathcal{H}_{ph}$ and is formally given by (6). The infrared cutoff Hamiltonian $H_{g,\sigma}(P_3)$ is defined by replacing the integral over $\{k \in \mathbb{R}^3\}$ in (2) by the integral over $\{k \in \mathbb{R}^3, |k| \geq \sigma\}$. We set $E_g(P_3) = \inf \sigma(H_g(P_3))$ and $E_{g,\sigma}(P_3) = \inf \sigma(H_{g,\sigma}(P_3))$. The electronic Hamiltonian is $h(b, V) = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m} (p_j - ea_j(x'))^2 - \frac{e}{2m} \sigma_3 b(x') + V(x')$, and we define $e_0 = \inf \sigma(h(b, V))$ and $e_1 = \inf[\sigma(h(b, V)) \setminus \{e_0\}]$. We make the following hypothesis:

(H₀) e_0 is an isolated eigenvalue of multiplicity 1.

Proposition. Assume that **(H₀)** holds. Then there exist $g_0 > 0$ and $P_0 > 0$ such that for all $0 < |g| \leq g_0$, for all $P_3, k_3 \in \mathbb{R}$ such that $|P_3| \leq P_0, |P_3 + k_3| \leq P_0$, for all $0 \leq \sigma \leq (e_1 - e_0)/2$, for all $\delta > 0$,

$$|E'_{g,\sigma}(P_3 + k_3) - E'_{g,\sigma}(P_3)| \leq C_\delta |k_3|^{1/4-\delta}, \tag{*}$$

where C_δ is a positive constant depending on δ but independent of σ .

Remark. Our proof follows the scheme of [17,8].

Let us define a function $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ by

$$f(k, \lambda) = \frac{g}{2m} \frac{\rho(k)\epsilon_\lambda^3(k)}{k_3|k|^{1/2}} \frac{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3)}{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) + |k|}.$$

We note that if $P_3 \mapsto E_g(P_3)$ is of class $C^{1+\delta}$ with $\delta > 0$, the property $E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) \geq -3|k|/4$ (see [3]) implies that the function f is in $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ if and only if the derivative $E'_g(P_3)$ vanishes. As in [4], we consider a renormalized Hamiltonian $H_g^{\text{ren}}(P_3)$, defined by the formal expression $H_g^{\text{ren}}(P_3) = W(if)H_g(P_3)W(if)^*$, where for $h \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$, $W(h)$ is the Weyl operator, $W(h) = e^{i\Phi(h)}$, with $\Phi(h) = (a^*(h) + a(h))/\sqrt{2}$. We then obtain Eq. (9) which defines $H_g^{\text{ren}}(P_3)$ no matter whether f is in $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ or not. Note that in (9) we have set $A_j(x', 0) = \Phi(h_j(x'))$ and $B_j(x', 0) = \Phi(\tilde{h}_j(x'))$. Our main result is the following:

Theorem. Assume that **(H₀)** holds. Then there exist $g_0 > 0$ and $P_0 > 0$ such that for all $0 < |g| \leq g_0$ and $0 \leq |P_3| \leq P_0$,

- (i) $H_g(P_3)$ has a ground state if and only if $E'_g(P_3) = 0$.
- (ii) $H_g^{\text{ren}}(P_3)$ has a ground state.

Remark.

1. The previous proposition is used both in the proof of (i) and in the proof of (ii). More precisely, we use (*) with $\sigma = 0$ to show the absence of a ground state for $H_g(P_3)$ when $E'_g(P_3) \neq 0$: arguing as in [11, Lemma 2.6], the key point of our proof is to obtain a contradiction when assuming the existence of a ground state $\Phi_g(P_3)$, thanks to the property (10). On the other hand, to prove the existence of a ground state for $H_g^{\text{ren}}(P_3)$, and for $H_g(P_3)$ in the case $E'_g(P_3) = 0$, we follow [3], using (*) with $\sigma > 0$ in order to bound the number of photons in the state $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$ uniformly in σ . Here $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$ denotes a ground state of the infrared cutoff Hamiltonian $H_{g,\sigma}(P_3)$.
2. Our result extends to the Pauli–Fierz model describing dressed mobile atoms and ions (see [1,2,15]), replacing the condition $E'_g(P_3) = 0$ in the theorem by $Q\nabla E_g(P) = 0$, where Q is the total charge of the atomic system, and $E_g(P)$ is the infimum of the spectrum of the reduced Hamiltonian $H_g(P)$ at a fixed total momentum P .

1. Définition du modèle et hypothèses

Nous considérons un électron, traité comme une particule quantique non relativiste, en interaction avec un champ magnétique classique dans la direction x_3 et le champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb. L'espace de Hilbert pour l'électron est $\mathcal{H}_{\text{el}} := L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$. L'espace de Hilbert pour le champ de photons est l'espace de Fock symétrique construit à partir de $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$, c'est-à-dire $\mathcal{H}_{\text{ph}} := \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} S_n[L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)^{\otimes n}]$, où S_n désigne la projection orthogonale sur l'espace des fonctions symétriques. Le système que l'on considère est associé à l'opérateur hamiltonien de Pauli H_g agissant dans $\mathcal{H}_{\text{el}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$, défini formellement par

$$H_g = \frac{1}{2m}(p - ea(x') - gA(x))^2 - \frac{e}{2m}\sigma_3 b(x') - \frac{g}{2m}\sigma \cdot B(x) + V(x') + H_{\text{ph}}. \tag{1}$$

Dans cette définition, les unités sont choisies de telle façon que $\hbar = c = 1$, où \hbar est la constante de Planck divisée par 2π et c est la vitesse de la lumière. Les paramètres e et m représentent respectivement la charge et la masse de l'électron, et dans les termes contenant le champ électromagnétique quantifié, e est remplacé par une constante de couplage notée g . Les opérateurs position et impulsion de l'électron sont notés respectivement $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $p = (p_1, p_2, p_3) = -i\nabla_x$. La variable x' est définie par $x' = (x_1, x_2)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ désigne le vecteur des matrices de Pauli, et $V(x')$ est un potentiel électrique. Le champ magnétique classique est de la forme $(0, 0, b(x'))$, où $b(x') = (\partial a_2 / \partial x_1)(x_1, x_2) - (\partial a_1 / \partial x_2)(x_1, x_2)$ et $a(x')$ est un potentiel vecteur. Le champ électromagnétique quantifié en jauge de Coulomb s'écrit

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{\epsilon_{\lambda}(k)}{|k|^{1/2}} \rho(k) [e^{-ik \cdot x} a_{\lambda}^*(k) + e^{ik \cdot x} a_{\lambda}(k)] d^3k, \\ B(x) &= -\frac{i}{2\pi} \sum_{\lambda=1,2} \int |k|^{1/2} \left(\frac{k}{|k|} \wedge \epsilon_{\lambda}(k) \right) \rho(k) [e^{-ik \cdot x} a_{\lambda}^*(k) - e^{ik \cdot x} a_{\lambda}(k)] d^3k, \end{aligned} \tag{2}$$

où $\epsilon_1(k), \epsilon_2(k)$ sont des vecteurs de polarisation, $\epsilon_{\lambda} = (\epsilon_{\lambda}^1, \epsilon_{\lambda}^2, \epsilon_{\lambda}^3)$, satisfaisant $\epsilon_{\lambda}(k) \cdot \epsilon_{\lambda'}(k) = \delta_{\lambda\lambda'}$ et $k \cdot \epsilon_{\lambda}(k) = 0$. La fonction ρ est une fonction de troncature ultraviolette, choisie à valeurs réelles, et telle que

$$\int_{|k| \leq 1} \frac{|\rho(k)|^2}{|k|^2} d^3k + \int_{|k| \geq 1} |k| |\rho(k)|^2 d^3k < \infty. \tag{3}$$

Enfin l'opérateur hamiltonien pour les photons en jauge de Coulomb est donné par

$$H_{\text{ph}} = \sum_{\lambda=1,2} \int |k| a_{\lambda}^*(k) a_{\lambda}(k) d^3k. \tag{4}$$

Dans (2) et (4), $a_{\lambda}^*(k)$ et $a_{\lambda}(k)$ sont les opérateurs usuels de création et d'annihilation obéissant aux relations canoniques de commutation ($a^{\#} = a^*$ ou a) :

$$[a_{\lambda}^{\#}(k), a_{\lambda'}^{\#}(k')] = 0, \quad [a_{\lambda}(k), a_{\lambda'}^*(k')] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(k - k'). \tag{5}$$

L'opérateur H_g est invariant par translation dans la direction x_3 , dans le sens où il commute formellement avec l'opérateur $P_3 = p_3 + d\Gamma(k_3)$, où $d\Gamma(k_3)$ est la seconde quantification de l'opérateur de multiplication par $k_3 \in \mathbb{R}$.

Aussi H_g admet une décomposition en intégrale directe, $H_g \simeq \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} H_g(P_3) dP_3$, où $H_g(P_3)$ opère dans $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}_2) \otimes \mathcal{H}_{\text{ph}}$, et (voir [3])

$$H_g(P_3) = \frac{1}{2m} \sum_{j=1,2} (p_j - ea_j(x') - gA_j(x', 0))^2 + \frac{1}{2m} (P_3 - d\Gamma(k_3) - gA_3(x', 0))^2 - \frac{e}{2m} \sigma_3 b(x') - \frac{g}{2m} \sigma \cdot B(x', 0) + V(x') + H_{\text{ph}}. \quad (6)$$

Soient $h(b, V) = \sum_{j=1,2} \frac{1}{2m} (p_j - ea_j(x'))^2 - \frac{e}{2m} \sigma_3 b(x') + V(x')$ et $e_0 = \inf \sigma(h(b, V))$. Nous supposons que b et V sont choisis de telle façon que e_0 est une valeur propre isolée et de multiplicité finie (nous renvoyons à [5,14,18,19] pour des choix possibles de couples (b, V) satisfaisant cette propriété). Nous faisons de plus l'hypothèse suivante :

(H₀) e_0 est une valeur propre isolée de multiplicité 1.

Nous posons également $e_1 = \inf[\sigma(h(b, V)) \setminus \{e_0\}]$. Définissons $H_{g,\sigma}(P_3)$ l'opérateur obtenu en introduisant dans $H_g(P_3)$ une troncature infrarouge, c'est-à-dire en remplaçant l'intégrale sur \mathbb{R}^3 définissant $A(x)$ dans (2) par l'intégrale sur $\{k \in \mathbb{R}^3, |k| \geq \sigma\}$. Il est établi dans [3] que, pour g et P_3 suffisamment petits, et pour tout $\sigma \geq 0$, $H_{g,\sigma}(P_3)$ est auto-adjoint et semi-borné inférieurement. Nous notons $E_{g,\sigma}(P_3) = \inf \sigma(H_{g,\sigma}(P_3))$ l'infimum du spectre de $H_{g,\sigma}(P_3)$ pour $\sigma > 0$, et $E_g(P_3) = \inf \sigma(H_g(P_3))$ pour $\sigma = 0$. D'après [3], pour tout $\sigma > 0$, $H_{g,\sigma}(P_3)$ possède un état fondamental $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$, et, si l'on suppose de plus l'hypothèse **(H₀)** vérifiée, $\Phi_{g,\sigma}(P_3)$ est non dégénéré.

2. Résultats et remarques

Notre résultat principal (voir le Théorème 2.3 plus bas) fournit une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'un état fondamental pour $H_g(P_3)$. L'une des propriétés cruciales que nous utilisons pour obtenir ce résultat est la régularité de l'application $P_3 \mapsto E_g(P_3)$.

Proposition 2.1. *Supposons l'hypothèse **(H₀)** satisfaite. Alors il existe $g_0 > 0$ et $P_0 > 0$ tels que pour tout $0 < |g| \leq g_0$, pour tous $P_3, k_3 \in \mathbb{R}$ tels que $|P_3| \leq P_0$, $|P_3 + k_3| \leq P_0$, pour tout $0 \leq \sigma \leq (e_1 - e_0)/2$, pour tout $\delta > 0$,*

$$|E'_{g,\sigma}(P_3 + k_3) - E'_{g,\sigma}(P_3)| \leq C_\delta |k_3|^{1/4-\delta}, \quad (7)$$

où C_δ est une constante dépendant de δ mais ne dépendant pas de σ .

Remarque 2.2.

1. Le cas d'un électron libre interagissant avec le champ électromagnétique quantifié a été étudié récemment (cf. [7–9]). Le modèle correspondant présente des similarités avec le nôtre, dans la mesure où il est invariant par translation et conduit à l'étude d'un Hamiltonien $H_g(P)$ pour une impulsion totale fixée $P \in \mathbb{R}^3$. Il est toutefois à noter que pour ce modèle où un seul électron est considéré, $H_g(P)$ ne contient pas de partie électronique $h(b, V)$ ($H_g(P)$ agit dans \mathcal{H}_{ph} uniquement), ce qui, dans une certaine mesure, simplifie l'étude par rapport au modèle envisagé ici. Dans [7], pour un électron avec spin, le caractère C^2 de l'application $P \mapsto E_g(P) = \inf \sigma(H_g(P))$ est obtenu à partir d'une méthode basée sur l'utilisation d'un groupe de renormalisation (voir aussi [6]). L'auteur montre de plus que $\nabla E_g(P) = 0$ si et seulement si $P = 0$. Dans [8], à partir du travail antérieur de A. Pizzo sur le modèle de Nelson, [17], il est établi que $P \mapsto E_g(P)$ est de classe $C^{1+\delta}$ pour tout $0 \leq \delta < 1/4$. Nous avons pu adapter cette dernière méthode à notre modèle.
2. La preuve de la Proposition 2.1 s'adapte au cas des atomes et des ions habillés non relativistes en interaction avec le champ électromagnétique quantifié (voir [1]), mais toujours sous une hypothèse de simplicité du type de **(H₀)**. Le problème paraît plus difficile dans le cas dégénéré.

Posons $\Phi(h) = (a^*(h) + a(h))/\sqrt{2}$ pour $h \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$, où $a^*(h) = \sum_{\lambda=1,2} \int h(k, \lambda) a_\lambda^*(k) d^3k$ et $a(h) = \sum_{\lambda=1,2} \int \bar{h}(k, \lambda) a_\lambda(k) d^3k$. Le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ est défini par

$$(h_1, h_2) = \sum_{\lambda=1,2} \int \bar{h}_1(k, \lambda) h_2(k, \lambda) d^3k.$$

Soit $W(h) = e^{i\Phi(h)}$ l'opérateur de Weyl, et soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(k, \lambda) = \frac{g}{2m} \frac{\rho(k) \epsilon_\lambda^3(k)}{k_3 |k|^{1/2}} \frac{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3)}{E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) + |k|}. \tag{8}$$

Notons que, si $P_3 \mapsto E_g(P_3)$ est de classe $C^{1+\alpha}$ avec $\alpha > 0$, en utilisant le fait que pour g et P_3 suffisamment petits, $E_g(P_3 - k_3) - E_g(P_3) \geq -3|k|/4$ (cf. [3, Lemma 4.3]), on a $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ si et seulement si $E'_g(P_3) = 0$. Introduisons, de la même façon que dans [4], un opérateur "renormalisé" $H_g^{\text{ren}}(P_3)$ à partir de l'expression formelle $H_g^{\text{ren}}(P_3) = W(if)H_g(P_3)W(if)^*$. Nous obtenons (voir par exemple [10]) :

$$\begin{aligned} H_g^{\text{ren}}(P_3) &= \frac{1}{2m} \sum_{j=1,2} (p_j - ea_j(x') - gA_j(x', 0) + g \operatorname{Re}(h_j(x'), f))^2 \\ &\quad + \frac{1}{2m} \left(P_3 - d\Gamma(k_3) - \Phi(k_3 f) + \frac{1}{2}(k_3 f, f) - gA_3(x', 0) + g \operatorname{Re}(h_3(x'), f) \right)^2 \\ &\quad - \frac{e}{2m} \sigma_3 b(x') - \frac{g}{2m} \sigma \cdot (B(x', 0) - \operatorname{Re}(\tilde{h}_j(x'), f)) + V(x') + H_{\text{ph}} + \Phi(|k|f) - \frac{1}{2}(|k|f, f), \end{aligned} \tag{9}$$

où l'on a posé $A_j(x', 0) = \Phi(h_j(x'))$ et $B_j(x', 0) = \Phi(\tilde{h}_j(x'))$. Remarquons que $H_g^{\text{ren}}(P_3)$ est unitairement équivalent à $H_g(P_3)$ si et seulement si $f \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$. Notre principal résultat est alors :

Théorème 2.3. *Supposons l'hypothèse (H₀) satisfaite. Alors il existe $g_0 > 0$ et $P_0 > 0$ tels que pour tous $0 < |g| \leq g_0$ et $0 \leq |P_3| \leq P_0$,*

- (i) $H_g(P_3)$ possède un état fondamental si et seulement si $E'_g(P_3) = 0$.
- (ii) $H_g^{\text{ren}}(P_3)$ possède un état fondamental.

Remarque 2.4.

1. L'inégalité (7) est utilisée à la fois dans la preuve de (i) et dans celle de (ii). Plus précisément, nous utilisons (7) avec $\sigma = 0$ afin d'obtenir l'absence d'état fondamental de $H_g(P_3)$ lorsque $E'_g(P_3) \neq 0$: nous basant sur [11, Lemme 2.6], nous obtenons une contradiction en supposant l'existence d'un état fondamental $\Phi_g(P_3)$, grâce à la propriété

$$(k, \lambda) \mapsto \|[a_\lambda(k) - f(k, \lambda)]\Phi_g(P_3)\| \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2). \tag{10}$$

L'existence d'un état fondamental pour $H_g^{\text{ren}}(P_3)$, ou pour $H_g(P_3)$ lorsque $E'(P_3) = 0$, s'obtient quant à elle de la même façon que dans [3], en utilisant de plus (7) avec $\sigma > 0$ pour contrôler le nombre de photons dans l'état fondamental de $H_{g,\sigma}(P_3)$.

2. La preuve du Théorème 2.3 s'adapte au cas des atomes et des ions (voir [1]), en remplaçant la condition $E'_g(P_3) = 0$ dans (i) par $Q \nabla E_g(P) = 0$, où Q représente la charge totale du système atomique. Le cas des atomes, $Q = 0$, est traité dans [2]. Pour toute valeur de la constante de couplage, l'existence d'un état fondamental pour $Q = 0$ est également obtenue dans [15], en adaptant la méthode de [12], mais sous l'hypothèse $E_g(P) \geq E_g(0)$ qui, jusqu'à maintenant, n'a pas pu être vérifiée pour une valeur quelconque de g . Dans [13], les auteurs montrent l'absence d'état fondamental pour $H_g(P)$ dans le cas $Q < 0$, en supposant que $\nabla E_g(P)$ est différent de 0. Ainsi, par rapport à ces résultats, la méthode que nous employons permet en plus d'obtenir l'existence d'un état fondamental pour $H_g^{\text{ren}}(P)$ et pour $H_g(P)$ lorsque $\nabla E_g(P) = 0$.
3. Si $E'_g(P_3) \neq 0$, (ii) fournit l'existence d'un état fondamental dans une représentation non équivalente à la représentation Fock des relations canoniques de commutation, comme dans le cas du modèle de Nelson pour un système atomique confiné (voir [4,11,16]).

Références

- [1] L. Amour, J. Faupin, B. Grébert, J.-C. Guillot, The infrared problem for the dressed mobile ions, in preparation.
- [2] L. Amour, B. Grébert, J.-C. Guillot, The dressed mobile atoms and ions, *J. Math. Pures Appl.* (9) 86 (3) (2006) 177–200.
- [3] L. Amour, B. Grébert, J.-C. Guillot, The dressed nonrelativistic electron in a magnetic field, *Math. Methods Appl. Sci.* 29 (10) (2006) 1121–1146.
- [4] A. Arai, Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation, *Rev. Math. Phys.* 13 (9) (2001) 1075–1094.
- [5] J. Avron, I. Herbst, B. Simon, Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions, *Duke Math. J.* 45 (4) (1978) 847–883.
- [6] V. Bach, T. Chen, J. Fröhlich, I.M. Sigal, The renormalized electron mass in non-relativistic quantum electrodynamics, *J. Funct. Anal.* 243 (2) (2007) 426–535.
- [7] T. Chen, Infrared renormalization in non-relativistic qed and scaling criticality, *J. Funct. Anal.* (2008), doi:10.1016/j.jfa.2008.01.001.
- [8] T. Chen, J. Fröhlich, A. Pizzo, Infraparticle scattering states in non-relativistic QED II. Mass shell properties, arxiv.org, math-ph/07092812, 2007.
- [9] T. Chen, J. Fröhlich, Coherent infrared representations in non-relativistic QED, in: *Spectral Theory and Mathematical Physics: A Festschrift in Honor of Barry Simon's 60th Birthday*, in: *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 76, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 25–45.
- [10] J. Dereziński, C. Gérard, Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli–Fierz Hamiltonians, *Rev. Math. Phys.* 11 (4) (1999) 383–450.
- [11] J. Dereziński, C. Gérard, Scattering theory of infrared divergent Pauli–Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré* 5 (3) (2004) 523–577.
- [12] M. Griesemer, E.H. Lieb, M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* 145 (3) (2001) 557–595.
- [13] D. Hasler, I. Herbst, Absence of ground states for a class of translation invariant models of non-relativistic QED, arxiv.org, math-ph/0702096, 2007.
- [14] A. Iwatsuka, H. Tamura, Asymptotics distribution of eigenvalues for Pauli operators with non-constant magnetic fields, *Duke Math. J.* 93 (1998) 535–574.
- [15] M. Loss, T. Miyao, H. Spohn, Lowest energy states in nonrelativistic QED: atoms and ions in motion, *J. Funct. Anal.* 243 (2) (2007) 353–393.
- [16] A. Panati, Existence and non existence of a ground state for the massless Nelson model under binding condition, preprint, arxiv.org, math-ph/0609065, 2006.
- [17] A. Pizzo, One-particle (improper) states in Nelson's massless model, *Ann. Henri Poincaré* 4 (3) (2003) 439–486.
- [18] G.D. Raikov, Eigenvalue asymptotics for the Pauli operator in strong non-constant magnetic fields, *Ann. Inst. Fourier* 49 (1999) 1603–1636.
- [19] A.V. Sobolev, On the Lieb–Thirring estimates for the Pauli operator, *Duke Math. J.* 82 (3) (1996) 607–635.