



Dynamical Systems/Ordinary Differential Equations

Birth of attracting compact invariant submanifolds diffeomorphic to moment-angle manifolds in generic families of dynamics

Marc Chaperon ^a, Santiago López De Medrano ^b

^a Institut de mathématiques de Jussieu & Université Paris 7, UFR de mathématiques, site Chevaleret, case 7012, 75205 Paris cedex 13, France

^b Facultad de Ciencias & Instituto de Matemáticas, UNAM, Ciudad Universitaria, México, D.F., 04510, Mexico

Received 25 May 2008; accepted 16 September 2008

Presented by Étienne Ghys

Abstract

All the compact intersections of quadrics known as moment-angle manifolds appear as attractors in generalized Hopf bifurcations. *To cite this article:* M. Chaperon, S. López De Medrano, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).

© 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Résumé

Naissance de sous-variétés invariantes compactes attractives diffeomorphes à des variétés moment-angle dans les familles génériques de dynamiques. Toutes les intersections compactes de quadriques connues sous le nom de variétés moment-angle apparaissent comme attracteurs dans des bifurcations de Hopf généralisées. *Pour citer cet article :* M. Chaperon, S. López De Medrano, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).

© 2008 Académie des sciences. Published by Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

Version française abrégée

Nous appelons *variété moment-angle* une sous-variété algébrique réelle non vide S de \mathbf{C}^n de la forme $S = Q^{-1}(b)$, où $b \in \mathbf{R}^c$ est une valeur régulière d'une application quadratique $Q(z) = \Lambda_1|z_1|^2 + \dots + \Lambda_n|z_n|^2$ telle que l'enveloppe convexe des $\Lambda_j \in \mathbf{R}^c$ ne contienne pas l'origine.

Cette dernière condition entraîne que S est compacte ; en outre, comme elle est non vide et que b est valeur régulière de Q , les Λ_j engendrent \mathbf{R}^c . La topologie de telles variétés est extrêmement variée [11,1].¹ En posant $F(x) = \Lambda_1 x_1^2 + \dots + \Lambda_n x_n^2$, $x \in \mathbf{R}^n$, la variété S est l'image réciproque de $\Sigma = F^{-1}(b)$ par l'application $\rho : z \mapsto (|z_1|, \dots, |z_n|)$. Comme b est une valeur régulière de F , le compact Σ est une sous-variété. En désignant par \cdot le produit scalaire dans \mathbf{R}^c , cette Note repose sur le résultat suivant, prouvé ci-après :

Lemme. *Sous ces hypothèses, le champ de vecteurs $X(x) = \sum_{j=1}^n x_j \Lambda_j \cdot (b - F(x)) \partial_j$ sur \mathbf{R}^n admet Σ pour variété (ponctuellement) invariante normalement hyperbolique [9,10] et attractive.*

E-mail addresses: chaperon@math.jussieu.fr (M. Chaperon), santiago@matem.unam.mx (S. López De Medrano).

¹ C'est un exercice d'algèbre linéaire de se ramener au cas où $b = (1, 0, \dots, 0)$ et $\Lambda_j = (1, \lambda_j)$, considéré dans [11,1].

Application. Étant données deux variétés U, M , soit $(u, x) \mapsto Z_u(x)$ une famille assez différentiable de champs de vecteurs sur M à paramètre $u \in U$. On suppose $(u_0, x_0) \in U \times M$ tel que $Z_{u_0}(x_0) = 0$ et que les valeurs propres de $DZ_{u_0}(x_0)$ soient imaginaires pures, simples et différentes de 0. Les valeurs propres de partie imaginaire positive étant notées $i\beta_1, \dots, i\beta_n$, on fait en outre l'hypothèse que, pour $1 \leq j \leq n$, l'équation $\beta_j = \sum_1^n (p_\ell - q_\ell)\beta_\ell$ avec $(p, q) \in (\mathbf{N}^n)^2$ et $\sum (p_\ell + q_\ell) \leq 4$ n'a que les solutions évidentes $p_j = q_j + 1$ et $p_\ell = q_\ell$ pour $\ell \neq j$.

Une famille de cartes locales $(u, x) \mapsto (u, g_u(x))$ ramène alors localement au cas où $M = \mathbf{C}^n$, où $Z_u(0) \equiv 0$ pour u voisin de u_0 , où $DZ_{u_0}(0)$ est de la forme $z \mapsto (i\beta_1 z_1, \dots, i\beta_n z_n)$ et où $Z_u = N_u + R_u$, où R_u s'annule à l'ordre 4 en 0 et N_u est donnée par (2). Dans cette formule, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ et $\lambda_j, \mu_j, a_{j\ell}, b_{j\ell}$ sont des fonctions réelles différentiables telles que $\lambda_j(u_0) = 0$ et $\mu_j(u_0) = \beta_j$. Il en résulte que l'application ρ précédente envoie N_u sur $V_u = \sum_j (\lambda_j(u) - \sum_\ell a_{j\ell}(u)r_\ell^2)r_j \frac{\partial}{\partial r_j}$. Sous ces hypothèses et avec ces notations, le lemme de naissance [5] entraîne alors immédiatement le suivant :

Théorème. *S'il existe $v_0 \in T_{u_0}U$ non nul tel que le champ $\sum_j x_j(D\lambda_j(u_0)v_0 - \sum_\ell a_{j\ell}(u_0)x_\ell^2) \frac{\partial}{\partial x_j}$ sur \mathbf{R}^n soit un champ de vecteurs X comme celui du lemme précédent,² il existe un ouvert U_{v_0} de U dont l'adhérence contient u_0 et dont le cône tangent³ en u_0 est un cône ouvert de sommet 0 contenant $\mathbf{R}_+^* V_{v_0}$, tel que chacun des Z_u avec $u \in U_{v_0}$ admette une variété invariante compacte normalement hyperbolique attractive S_u difféomorphe à $S = \rho^{-1}(\Sigma)$, dépendant de manière au moins $C^{1+\alpha}$ de u et tendant vers $\{x_0\}$ quand $u \rightarrow u_0$.*

Le lemme de naissance pour les applications [5] entraîne un énoncé analogue pour les familles de transformations. Nous renvoyons à [6] pour un exposé détaillé de tels résultats.

Note. De telles intersections de quadriques apparaissent dans [3] comme « quasi-quotients » d'actions linéaires de \mathbf{R}^k , et indépendamment dans [11,13] (voir aussi [4]) dans le cas d'actions holomorphes de \mathbf{C}^k . Elles ont une action naturelle du tore \mathbf{T}^n dont le quotient est un polytope convexe simple arbitraire et leur topologie a été étudiée dans [11, 13,1]. Indépendamment, dans [8], section 4.1, on construit des variétés maintenant connues sous le nom de « variétés moment-angle ». Nos variétés comprennent, en plus de celles-ci, leurs produits par des tores arbitraires. Les variétés dites de LVM [12,13], projections dans \mathbf{CP}^{n-1} de ces intersections pour c pair, fournissent divers exemples de variétés holomorphes compactes non symplectiques. D'autres quotients, construits dans [8], sont appelés variétés quasitoriques et leur topologie a fait l'objet d'amples recherches (voir [2]).

1. Introduction

We call *moment-angle manifold* a nonempty submanifold S of \mathbf{C}^n of the form $S = Q^{-1}(b)$, where $b \in \mathbf{R}^c$ is a regular value of a quadratic map $Q(z) = \Lambda_1|z_1|^2 + \dots + \Lambda_n|z_n|^2$ such that the convex hull of the vectors $\Lambda_j \in \mathbf{R}^c$ does not contain the origin. The last condition implies that S is compact; moreover, as it is nonempty and b is a regular value of Q , the vectors Λ_j generate \mathbf{R}^c . Such manifolds can have extremely diverse topologies [11,1].⁴

Setting $F(x) = \Lambda_1 x_1^2 + \dots + \Lambda_n x_n^2$, $x \in \mathbf{R}^n$, the manifold S is the inverse image of $\Sigma := F^{-1}(b)$ by $\rho : z \mapsto (|z_1|, \dots, |z_n|)$. As b is a regular value of F , the nonempty compact subset Σ is a submanifold. Denoting by \cdot the standard scalar product of \mathbf{R}^c , this Note relies on the following result:

Lemma. *Under these hypotheses, the vectorfield $X(x) = \sum_{j=1}^n x_j \Lambda_j \cdot (b - F(x)) \partial_j$ on \mathbf{R}^n admits Σ as an attracting normally hyperbolic [9,10] (pointwise) invariant manifold.*

Proof. As X vanishes on $\Sigma = F^{-1}(b)$, the latter is pointwise invariant and, for all $x \in \Sigma$ and $v \in \mathbf{R}^n$,

$$DX(x)v = - \sum_{j=1}^n x_j \Lambda_j \cdot DF(x)v \partial_j = - \frac{1}{2} DF(x)^* DF(x)v,$$

² Ce qui peut se produire de manière stable si la dimension de l'espace de paramètres U est assez grande, d'où notre titre.

³ Ensemble des vitesses $\dot{\gamma}(0)$ de chemins dérivables $\gamma : (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (U, u_0)$ vérifiant $\gamma(\varepsilon) \in U_{v_0}$ pour $\varepsilon > 0$.

⁴ It is an exercise to reduce our situation to the case where $b = (1, 0, \dots, 0)$ and $\Lambda_j = (1, \lambda_j)$, considered in [11,1].

where $DF(x)^* : \mathbf{R}^c \rightarrow \mathbf{R}^n$ is the adjoint of $DF(x)$ for the standard scalar products. Thus, the differential $DX(x)$ is the symmetric operator $-\frac{1}{2}DF(x)^* \circ DF(x)$, hence

$$v \cdot DX(x)v = -\frac{1}{2} \|DF(x)v\|^2 \tag{1}$$

for all $v \in \mathbf{R}^n$. It follows that the kernel of $DX(x)$ is the kernel $T_x\Sigma$ of $DF(x)$ and that the symmetric operator $DX(x)$ leaves the normal space $\nu_x\Sigma = (T_x\Sigma)^\perp$ invariant.

Denoting by $C(x)$ the largest constant such that $\|DF(x)v\| \geq C(x)\|v\|$ for all $v \in \nu_x\Sigma$, namely $C(x) = \|(DF(x)|_{\nu_x\Sigma})^{-1}\|^{-1}$, the identity (1) yields

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|e^{tDX(x)}v\|^2 &= 2(DX(x)e^{tDX(x)}v) \cdot e^{tDX(x)}v = -\|DF(x)e^{tDX(x)}v\|^2 \\ &\leq -C(x)^2 \|e^{tDX(x)}v\|^2 \quad \text{for } v \in \nu_x\Sigma, \end{aligned}$$

hence $\|e^{tDX(x)}v\|^2 \leq e^{-tC(x)^2} \|v\|^2$ for all $x \in \Sigma$, $v \in \nu_x\Sigma$ and $t \geq 0$, implying our result since $C(x) > 0$. \square

2. Application

Given manifolds U, M , let $(u, x) \mapsto Z_u(x)$ be a smooth enough family of vectorfields on M with parameter $u \in U$. Assume $(u_0, x_0) \in U \times M$ such that $Z_{u_0}(x_0) = 0$ and that the eigenvalues of $DZ_{u_0}(x_0)$ are pure imaginary, simple and different from 0. Denoting the eigenvalues with positive imaginary part by $i\beta_1, \dots, i\beta_n$, we also assume that, for $1 \leq j \leq n$, the equation $\beta_j = \sum_1^n (p_\ell - q_\ell)\beta_\ell$ with $(p, q) \in (\mathbf{N}^n)^2$ and $\sum(p_\ell + q_\ell) \leq 4$ admits only the obvious solutions $p_j = q_j + 1$ et $p_\ell = q_\ell$ for $\ell \neq j$.

Via a family of local charts $(u, x) \mapsto (u, g_u(x))$, we may assume that $M = \mathbf{C}^n$, that $Z_u(0) \equiv 0$ for u close to u_0 , that $DZ_{u_0}(0)$ is of the form $z \mapsto (i\beta_1 z_1, \dots, i\beta_n z_n)$ and that $Z_u = N_u + R_u$, where R_u vanishes at order 4 at 0 and N_u is given by

$$N_u(z) = \left(z_j \left(\lambda_j(u) + i\mu_j(u) - \sum_{\ell=1}^n (a_{j\ell}(u) + ib_{j\ell}(u))|z_\ell|^2 \right) \right)_{1 \leq j \leq n} . \tag{2}$$

In this formula, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ and $\lambda_j, \mu_j, a_{j\ell}, b_{j\ell}$ are differentiable real functions with $\lambda_j(u_0) = 0$ and $\mu_j(u_0) = \beta_j$. Hence, the previous map ρ sends N_u onto $V_u = \sum_j (\lambda_j(u) - \sum_\ell a_{j\ell}(u)r_\ell^2)r_j \frac{\partial}{\partial r_j}$. Under those hypotheses, the birth lemma [5] implies at once the following:

Theorem. *If there exists $v_0 \neq 0$ in $T_{u_0}U$ such that $\sum_{j=1}^n x_j(D\lambda_j(u_0)v_0 - \sum_\ell a_{j\ell}(u_0)x_\ell^2) \frac{\partial}{\partial x_j}$ is a vectorfield X on \mathbf{R}^n as in the previous lemma,⁵ then there is an open subset U_{v_0} of U whose closure contains u_0 and whose tangent cone⁶ at u_0 is an open cone with vertex 0 containing $\mathbf{R}_+^* V_{v_0}$, such that every Z_u with $u \in U_{v_0}$ has an attractive compact normally hyperbolic manifold S_u diffeomorphic to $S = \rho^{-1}(\Sigma)$, depending at least $C^{1+\alpha}$ on u and tending to $\{x_0\}$ when $u \rightarrow u_0$.*

The birth lemma for maps [5] yields an analogous statement for families of transformations. We refer to [6] for a detailed account of our results.

Note. The generic intersections of special quadrics in \mathbf{C}^n considered in this Note were introduced in [3] as “quasi-quotients” of linear \mathbf{R}^k -actions, and independently in [11,13] (see also [4]) in the case of holomorphic \mathbf{C}^k -actions. They have a natural action of the torus \mathbf{T}^n whose quotient is an arbitrary simple convex polytope and their topology has been studied in [11,13,1]. Independently, in [8], Section 4.1, manifolds were defined which are now widely known as “moment-angle manifolds”. Our manifolds include, in addition to these, their products by arbitrary tori. The so-called *LVM manifolds* [12,13], projections into \mathbf{CP}^{n-1} of these intersections when c is even, provide various examples of

⁵ Which can happen in a stable way if the dimension of the parameter space U is large enough, hence our title.

⁶ Set of velocities $\dot{\gamma}(0)$ of derivable paths $\gamma : (\mathbf{R}, 0) \rightarrow (U, u_0)$ such that $\gamma(\varepsilon) \in U_{v_0}$ for $\varepsilon > 0$.

nonsymplectic compact holomorphic manifolds. Other quotients, constructed in [8], are known as quasitoric manifolds and their topology has been the subject of ample research (see [2]).

Acknowledgements

This work, inspired by [7], owes much to conversations with Mathilde Kammerer-Colin de Verdière and Alain Chenciner. We are grateful to François Laudénbach, Laurent Meersseman, Robert Moussu, Laurent Stolovitch and Eduard Zehnder for their encouragements. During the preparation of this paper, the second author was partially supported by Conacyt Grant 58612.

References

- [1] F. Bosio, L. Meersseman, Real quadrics in \mathbf{C}^n , complex manifolds and convex polytopes, *Acta Math.* 197 (1) (2006) 53–127.
- [2] V. Bukhshtaber, T. Panov, *Torus Actions and Their Applications in Topology and Combinatorics*, University Lecture Series, vol. 24, Amer. Math. Soc., 2002.
- [3] M. Chaperon, Géométrie différentielle et singularités de systèmes dynamiques, *Astérisque* (1986) 138–139.
- [4] M. Chaperon, C^k -conjugacy of holomorphic flows near a singularity, *Publ. Math. I.H.E.S.* 64 (1987) 143–183.
- [5] M. Chaperon, Birth control in generalized Hopf bifurcations, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 345 (2007) 453–458.
- [6] M. Chaperon, S. López de Medrano, Generalized Hopf bifurcations, in press.
- [7] M. Chaperon, M. Kammerer-Colin de Verdière, S. López de Medrano, More compact invariant manifolds appearing in the non-linear coupling of oscillators, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 342 (2006) 301–305.
- [8] M. Davis, T. Januszkiewicz, Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions, *Duke Math. J.* 62 (2) (1991) 417–451.
- [9] N. Fenichel, Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows, *Indiana Univ. Math. J.* 21 (1971) 193–225.
- [10] M.W. Hirsch, C.C. Pugh, M. Shub, *Invariant Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 583, Springer-Verlag, 1977.
- [11] S. López de Medrano, The space of Siegel leaves of a holomorphic vector field, in: *Dynamical Systems*, in: *Lecture Notes in Mathematics*, vol. 1345, Springer-Verlag, 1988, pp. 233–245.
- [12] S. López de Medrano, A. Verjovsky, A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* 20 (1997) 2.
- [13] L. Meersseman, A new geometric construction of compact complex manifolds in any dimension, *Math. Ann.* 317 (1) (2000) 79–115.