Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1225–1230
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Minoration de rangs de courbes elliptiques

Nicolas Templier

Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, États-Unis

Reçu le 9 janvier 2008 ; accepté après révision le 27 octobre 2008

Disponible sur Internet le 18 novembre 2008

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Nous énonçons dans cette Note un résultat quantitatif concernant le groupe des points rationnels d'une courbe elliptique qui sont définis sur certains corps de classes de Hilbert. Il s'agit d'établir une borne inférieure pour le rang. Nous présentons également une approche analytique qui se fonde sur l'estimation de sommes de coefficients d'une forme modulaire aux valeurs d'un polynôme quadratique. Cette estimée est une version non scindée d'un problème de convolution décalée. ***Pour citer cet article : N. Templier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Lower bounds for ranks of elliptic curves. We state a quantitative result concerning the group of rational points on an elliptic curve that are defined over certain Hilbert class fields. We provide a lower bound for the rank. We present also an analytic approach based on the proof of an estimate for sums of Fourier coefficients of a modular form along values taken by a quadratic polynomial. This estimate is a non-split version of the shifted convolution problem. ***To cite this article: N. Templier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

Let E be an elliptic curve over $\mathbb{Q}$ of conductor N. When D is a negative discriminant, we denote by H_D the Hilbert class field of $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. We assume that the Heegner condition is fulfilled:

$$\text{each prime factor of } N \text{ is split in } \mathbb{Q}(\sqrt{D}). \tag{$*$}$$

We are interested in the rank of the group $E(H_D)$ of rational points of E defined over H_D. Our main result is that there exists an absolute constant $\delta > 0$ such that the following bound holds

$$\operatorname{rank} E(H_D) > |D|^{\delta} \tag{1}$$

if the negative fundamental discriminant D is large enough.

The proof is as follows. Introduce a Weil parametrization $\pi : X_0(N) \to E$ and denote by f the weight two modular form associated to E. For each character χ on the ideal class group of K, consider the Rankin–Selberg L-function

Adresse e-mail : nicolas.templier@normalesup.org.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.10.016

$L(s, f \times \operatorname{Ind}\chi)$. By the Gross–Zagier formula [7,25], it is enough to prove that at least $|D|^{\delta}$ special values of the derivative $L'(\frac{1}{2}, f \times \operatorname{Ind}\chi)$ do not vanish. This non-vanishing is a consequence of a certain lower bound for the first moment and the subconvex bound [12] for each individual derivative as discussed in [14]. This first moment is equal, up to a simple multiplicative factor, to the Néron–Tate height of an Heegner point $\pi(z_D)$ of discriminant D. Denote by μ the normalized hyperbolic measure on $X_0(N)(\mathbb{C})$. As consequence of Duke's theorem [2,3], the Galois conjugates of $\pi(z_D)$ are equidistributed with respect to the measure $\pi_*\mu$ on $E(\mathbb{C})$. This measure is not Haar measure. According to the Szpiro–Ullmo–Zhang theorem [21] the height of $\pi(z_D)$ is therefore bounded below by a positive constant depending on E; this lower bound is good enough to imply non-vanishing.

When N is squarefree and D is restricted to prime discriminants, we provide in [22] a sharp asymptotic for the height with analytic tools. It relies on the following kind of estimates

$$\sum_{n=1}^{\sqrt{|D|}} \lambda_f(n^2 - D) \ll_f |D|^{\frac{1}{2}-\eta} \tag{4}$$

for the partial sum of normalized Fourier coefficients λ_f, where $\eta > 0$ is an absolute constant. If the quadratic polynomial $n^2 - D$ were replaced by a split polynomial this estimate would reduce to the shifted convolution problem for $\mathrm{GL}(2)$. The proof in the non-split case originates in a work of Hooley [9], and consists of several transformations that we now proceed to describe.

The values taken by $n^2 - D$ are detected via the δ-symbol method of [4]. In the end, this method has the effect of replacing the coefficients λ_f by sums of Kloosterman sums, so that we are left with proving the following estimate which we refer to as an instance of "sums of exponential sums".

$$\sum_{q=1}^{\sqrt{|D|}} J(D;q) \ll_{l,m} |D|^{\frac{1}{2}-\eta} \quad \text{where } J(D;q) := \frac{1}{q} \sum_{x \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times;\, y \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} e\left(\frac{\bar{x}(y^2 + lxy + mx^2 - D)}{q}\right). \tag{5}$$

It turns out that the exponential sum $J(D;q)$ can be evaluated via Salié sums by means of the arithmetic of the quadratic field $\mathbb{Q}(\sqrt{D(l^2-4m)})$. Following [5] it is then possible to express the left-hand side of (5) as a Poincaré series evaluated along a quadratic cycle associated with this field; we use Duke's equidistribution theorem for these cycles (here twisted by a genus character); more precisely we perform a spectral expansion of the Poincaré series, producing toric periods of Maass wave forms. The formula recently established by Zhang [25] (resp. Popa [16]) exhibits when $l^2 - 4m > 0$ (resp. $l^2 - 4m < 0$) the square of each period as the special value of an L-function. The final ingredient in the proof is the subconvex bound [3].

1. Résultat principal

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbb{Q}$; on note N son conducteur. Pour chaque discriminant fondamental négatif D, on note H_D le corps de classes de Hilbert (non ramifié) de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$. Nous supposerons dans la suite que l'assertion suivante, dite « condition de Heegner » est satisfaite.

$$\text{Tous les facteurs premiers de } N \text{ sont décomposés dans } \mathbb{Q}(\sqrt{D}). \tag{$*$}$$

Le groupe $E(H_D)$ des points de E qui sont définis sur H_D est abélien de type fini par le théorème de Mordell–Weil, et on s'intéresse à son rang.

Théorème 1. *Il existe un réel $\delta > 0$ tel que l'on ait, pour toute courbe elliptique E définie sur $\mathbb{Q}$,*

$$\operatorname{rang} E(H_D) > |D|^{\delta} \tag{1}$$

quel que soit le discriminant fondamental négatif D qui satisfait la condition $(*)$ et qui est assez grand.

Il est possible [24] de préciser le fait que D est assez grand en disant que $|D| \geqslant N^A$ où $A > 0$ est une constante absolue (ineffective). L'article [17] contient des calculs numériques et établit que l'inégalité (1) est valide en moyenne sur D.

2. Résumé de la démonstration

Notons $X_0(N)$ la courbe modulaire, vue comme courbe algébrique sur $\mathbb{Q}$. On sait grâce à de nombreux travaux que l'on peut associer à E une forme modulaire parabolique f de poids 2 et de niveau N et qu'il existe un morphisme non constant $\pi : X_0(N) \to E$. On demande que l'image de la pointe $i\infty$ soit l'origine de E. On choisit un point de Heegner $z_D \in X_0(N)(H_D)$ de discriminant D.

Désignons par χ un caractère du groupe de classes d'idéaux de K ; on peut former la convolution de Rankin–Selberg de f avec l'induite quadratique de χ que l'on note $L(s, f \times \operatorname{Ind}\chi)$. La composition de χ avec l'application de réciprocité du corps de classes donne un caractère du groupe de Galois de l'extension H_D, et la formule de Gross et Zagier [7,25] montre que l'espace χ-isotypique $(E(H_D) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})^{\chi}$ est non réduit à $\{0\}$ si la valeur spéciale de la dérivée $L'(\frac{1}{2}, f \times \operatorname{Ind}\chi)$ est non nulle. En effet la χ-composante de $\pi(z_D)$ est alors non triviale. Ici nous avons adopté la normalisation analytique de sorte que $\frac{1}{2}$ est le centre de la bande critique. Montrons que cette non annulation se produit pour au moins $|D|^{\delta}$ caractères.

On considère le moment d'ordre un, $\frac{1}{h(D)} \sum_{\chi} L'(\frac{1}{2}, f \times \operatorname{Ind}\chi)$, comme il est discuté dans [14]. Ici $h(D)$ désigne le nombre total de caractères χ, c'est-à-dire le nombre de classes ; rappelons que le théorème de Siegel [20] dit que $h(D)$ est de taille au moins $|D|^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ pour ϵ arbitrairement petit. La majoration de sous-convexité [12] établit que chaque $L'(\frac{1}{2}, f \times \operatorname{Ind}\chi)$ est de taille au plus $|D|^{\frac{1}{2}-\delta}$, où $\delta > 0$ est une constante absolue. Pour conclure la démonstration du théorème 1, on va montrer que le moment est de taille au moins $|D|^{-\epsilon}$ pour ϵ arbitrairement petit.

Soit $\hat{h}$ la hauteur de Néron–Tate sur $E(\overline{\mathbb{Q}})$. Sommant sur χ, la formule de Gross et Zagier donne :

$$\frac{1}{h(D)} \sum_{\chi} L'\bigl(\tfrac{1}{2}, f \times \operatorname{Ind}\chi\bigr) = \alpha L(1, \chi_D) \hat{h}\bigl(\pi(z_D)\bigr). \tag{2}$$

Ici χ_D désigne le symbole de Kronecker et $\alpha > 0$ ne dépend que du choix de π ; sa valeur est précisée dans les pages 311–312 de [7].

Utilisons la notation $\mathcal{O}(x)$ pour désigner l'ensemble des conjugués par Galois d'un point x de $E(\overline{\mathbb{Q}})$ ou $X_0(N)(\overline{\mathbb{Q}})$. Soit μ la mesure hyperbolique sur $X_0(N)(\mathbb{C})$ qui provient de l'uniformisation par le demi-plan de Poincaré. Le théorème de Duke [2,3] établit que $\mathcal{O}(z_D)$ est uniformément distribué selon μ lorsque $D \to -\infty$. Cela implique que $\mathcal{O}(\pi(z_D))$ est uniformément distribué dans $E(\mathbb{C})$ selon la mesure image $\pi_*\mu$ lorsque $D \to -\infty$. Cette mesure n'est pas la mesure de Haar : cela vient par exemple du fait que les pointes de $X_0(N)(\mathbb{C})$ sont des singularités de la métrique hyperbolique. On déduit alors du théorème de Szpiro, Ullmo et Zhang [21] que $\liminf_{D\to-\infty} \hat{h}(\pi(z_D)) > 0$, ce qui conclut la minoration de (2).

Remarques. (1) On peut utiliser une hauteur naïve en conjonction avec la majoration de Burgess pour améliorer la minoration précédente : $\hat{h}(\pi(z_D)) \gg_E \log|D|$.

(2) Le dernier argument de comparaison de mesures est suffisamment robuste pour s'appliquer à divers contextes. Par exemple, il est possible [24] d'alléger $(*)$ en la condition $\chi_D(N) = 1$.

(3) En faisant appel à des théorèmes d'équidistribution dans $X_0(N)(\overline{\mathbb{Q}_p})$ pour chaque premier p, il est possible de préciser la valeur asymptotique de la hauteur locale $\hat{h}_p^{\mathrm{reg}}(\pi(z_D))$ et d'en déduire la valeur asymptotique de $\hat{h}(\pi(z_D))$ dans certains cas (par exemple $N = 11$). Dans [22] on développe cette idée qui a été suggérée dans la section 2.4 de [15].

3. Valeur asymptotique de la hauteur

Il est possible d'analyser le moment (2) de manière purement analytique, voir [13] pour un vaste survol des techniques sous-jacentes. Une telle approche a l'avantage de pouvoir s'appliquer aussi aux formes automorphes paraboliques de $\mathrm{GL}(2)_{\mathbb{Q}}$ (formes de Maass ou modulaires de poids entiers). Nous faisons dans la suite les restrictions suivantes : l'entier N est sans facteur carré et le discriminant D est premier. On montre dans [22] qu'il existe une constante absolue $\eta > 0$ telle que

$$\frac{1}{h(D)} \sum_{\chi} L'\bigl(\tfrac{1}{2}, f \times \operatorname{Ind}\chi\bigr) = \beta L(1, \chi_D)\left[\frac{1}{2}\log|D| + \frac{L'}{L}(1, \chi_D) + h_f + O_f\bigl(|D|^{-\eta}\bigr)\right]. \tag{3}$$

Ici $\beta > 0$ et h_f peuvent s'expliciter à l'aide de la fonction L du carré symétrique de f. Une conséquence de la majoration de Burgess est que la quantité entre crochets est supérieure à $\frac{1}{5}\log|D|$ lorsque $|D|$ est assez grand.

3.1. Sommes partielles de coefficients de formes modulaires

Il est possible d'exprimer $L'(\frac{1}{2}, f \times \operatorname{Ind}\chi)$ à l'aide d'une série de Dirichlet tronquée. L'asymptotique (3) se réduit alors à la démonstration de certaines estimées dont le théorème suivant est un exemple typique.

Théorème 2. *Notons le développement de Fourier de f sous la forme $f(q) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}}\lambda_f(n)q^n$. Il existe une constante absolue $\eta > 0$ telle que, uniformément sur le discriminant négatif premier D, on a*

$$\sum_{n=1}^{\sqrt{|D|}} \lambda_f(n^2 - D) \ll_f |D|^{\frac{1}{2}-\eta}. \tag{4}$$

Remarque. En vertu de la majoration $|\lambda_f(n)| \leqslant \tau(n)$, où τ est la fonction nombre de diviseurs, la majoration triviale de (4) est $|D|^{\frac{1}{2}+\epsilon}$. L'estimée (4) va au delà en tenant compte des oscillations des coefficients aux valeurs du polynôme quadratique $n^2 - D$. Si l'on remplaçait D par a^2 avec a entier non nul, le polynôme serait scindé et on obtiendrait essentiellement une somme de la forme $\sum_n \lambda_f(n-a)\lambda_f(n+a)$. Estimer non trivialement cette somme est le problème de la convolution décalée de deux formes de GL(2) dont la résolution est récente (voir le chapitre 4.4 de [13]). La première occurence d'un polynôme non scindé dans ce type de problème se trouve dans le travail de Hooley [9] qui sera discuté plus bas. D'une certaine façon, cette somme apparaît implicitement dans [3] avec τ à la place de λ_f.

3.2. Sommes de sommes d'exponentielles

Dans [22,23], on fait apparaître des annulations dans la somme (4) en résolvant analytiquement l'équation $n^2 - D = \bullet$ à l'aide de la méthode du δ-symbole de Duke, Friedlander et Iwaniec [4]. Rappelons que lorsqu'elle est menée à son terme, elle a pour effet de remplacer les coefficients $\lambda_f(\bullet)$ par des sommes de sommes de Kloosterman $\sum_q S(m, \bullet; q)$, où m est un paramètre entier et la somme sur q est pondérée. On est alors amené à démontrer l'estimation suivante (en pratique, l et m seront très petits par rapport à $|D|$).

Théorème 3. *Soient l et m des entiers. Il existe une constante absolue $\eta > 0$ telle que pour tout discriminant premier D on a*

$$\sum_{q=1}^{\sqrt{|D|}} J(D;q) \ll_{l,m} |D|^{\frac{1}{2}-\eta} \quad \text{où } J(D;q) := \frac{1}{q}\sum_{x\in(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^\times;\ y\in\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}} e\left(\frac{\bar{x}(y^2 + lxy + mx^2 - D)}{q}\right). \tag{5}$$

Ici nous avons écrit $e(x)$ pour $e^{2i\pi x}$, et $\bar{x}$ désigne l'inverse de x, c'est-à-dire $x\bar{x} \equiv 1 \pmod q$.

Remarques. (1) Cette somme d'exponentielles $J(D;q)$ apparaît également dans le développement de Fourier des formes de Jacobi [6, § II.2].

(2) En vertu du théorème de Deligne, $|J(D;q)|$ est au plus $\tau(q)$ (du moins lorsque $l^2 - 4m$ et D sont premiers à q impair) et la majoration triviale de (5) est $|D|^{\frac{1}{2}+\epsilon}$. Il faut donc exploiter les oscillations de $J(D;q)$ lorsque le module q varie, justifiant ainsi la terminologie « somme de sommes d'exponentielles ».

Expliquons maintenant comment atteindre l'estimée (5). Plaçons-nous dans le cas générique où $l^2 - 4m$ est fondamental et premier à $D < 0$. En regardant $J(D;q)$ comme une version généralisée des sommes de Salié, on peut expliciter sa valeur en fonction de l'arithmétique des idéaux du corps quadratique $M = \mathbb{Q}(\sqrt{D(l^2-4m)})$. Rappelons pour cela que l'on peut écrire tout idéal primitif de M sous la forme $\mathfrak{a} = \mathbf{N}\mathfrak{a}\mathbb{Z} + \frac{1}{2}(\nu_\mathfrak{a} + \sqrt{\Delta})\mathbb{Z}$ où l'angle $\frac{\nu_\mathfrak{a}}{2\mathbf{N}\mathfrak{a}} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ne dépend que de $\mathfrak{a}$; et introduisons le caractère de genre κ du groupe de classes de M associé à la factorisation du discriminant $\Delta = D \times (l^2 - 4m)$. On peut relier $J(D;q)$ à la somme, tordue par κ, des cosinus des angles des idéaux primitifs de norme q (voir l'éq. (8), § II.3 de [6] pour un cas particulier). On est alors ramené à démontrer l'estimée suivante, où k est un petit paramètre entier et où $\mathfrak{a}$ parcourt les idéaux primitifs de M :

$$\sum_{\mathbf{N}\mathfrak{a}\leqslant|D|^{\frac{1}{2}}} \kappa(\mathfrak{a})e\left(k\frac{\nu_{\mathfrak{a}}}{2\mathbf{N}\mathfrak{a}}\right) \ll_{k,l,m} |D|^{\frac{1}{2}-\eta}. \tag{6}$$

3.3. Périodes

Introduisant une surface modulaire, cette somme est l'intégrale d'une série de Poincaré contre un cycle quadratique (union de points de Heegner ou de géodésiques fermées). Pour donner une formule, notons $\tau_{[\mathfrak{a}]}$ (resp. $\gamma_{[\mathfrak{a}]}$) le point de Heegner (resp. la géodésique fermée) associée à la classe d'idéaux $[\mathfrak{a}] \in \mathrm{Cl}_M$ du corps M qui est imaginaire (resp. réel) lorsque $l^2 - 4m > 0$ (resp. $l^2 - 4m < 0$) :

$$\sum_{[\mathfrak{a}]\in\mathrm{Cl}_M} \kappa\big([\mathfrak{a}]\big)P(\tau_{[\mathfrak{a}]}) \quad \text{ou bien} \quad \sum_{[\mathfrak{a}]\in\mathrm{Cl}_M} \kappa\big([\mathfrak{a}]\big)\int_{\gamma_{[\mathfrak{a}]}} P\,ds. \tag{7}$$

Ici P est une série de Poincaré (voir [5] ou la section 21.5 de [10]) et s est l'abcisse curviligne le long de la géodésique. Lorsque M est réel, il faut pour aller de (6) vers (7) réaliser une transformée de Radon inverse (voir le théorème A de [18] et le livre [8]) ; le contrôle analytique de cette transformation s'avère délicat.

L'idée fondamentale, exploitée dans [5], est d'utiliser ensuite le théorème d'équidistribution de Duke. Il ne s'applique pas directement à (7) à cause de la présence du caractère κ. Mais après avoir décomposé spectralement la série de Poincaré à l'aide de formes de Maass, des formules issues des travaux de Waldspurger et Gross–Zagier expriment le carré de la période comme une valeur spéciale de fonctions L. Plus précisément, on fait appel aux versions récemment établies par Zhang [25] dans le cas M imaginaire et Popa [16] dans le cas M réel ; elles lient (7) aux valeurs spéciales $L(\frac{1}{2}, \phi \times \mathrm{Ind}\,\kappa)$, où ϕ désigne une forme de Maass. Notons que [11] donne une démonstration unifiée dans le cadre de la formule des traces relatives de Jacquet.

L'ingrédient final de la démonstration du théorème 3 est une majoration de sous-convexité pour $L(\frac{1}{2}, \phi \times \mathrm{Ind}\,\kappa)$ qui se déduit, par la factorisation bien connue des fonctions L des caractères de genre, de la majoration de sous-convexité établie dans [3] pour $L(\frac{1}{2}, \phi \times \chi_D)$.

3.4. Appendice : à propos de résultats de C. Hooley

Une partie de notre démarche a été inspirée par l'article [9] et il est intéressant de discuter du parallèle avec le théorème 2. Hooley démontre que

$$\sum_{n=1}^{X} \tau(n^2 - D) = A(D)X\log X + B(D)X + O_D\big(X^{\frac{9}{10}}\big), \quad \text{lorsque } X \to +\infty \tag{8}$$

où $A(D)$ et $B(D)$ sont des constantes explicites. Hooley découvre à cet effet l'équidistribution effective des racines quadratiques dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$$\left\{\frac{\nu}{q},\ \nu^2 \equiv D \ (\mathrm{mod}\ q),\ q \leqslant X\right\} \quad \text{lorsque } X \to +\infty \tag{9}$$

qui après de nombreuses transformations est conséquence de la borne de Weil pour les sommes de Kloosterman. Le lecteur peut consulter [5] pour une belle extension de ce résultat.

D'une part on peut comparer (4) et (8). Il est connu que la fonction arithmétique τ qui représente les coefficients de Fourier d'une série d'Eisenstein se comporte un peu comme λ_f ; et l'article [1] établit l'analogue de (8) où l'on remplace τ par λ_f (en fait cet analogue est déjà implicite dans Sarnak [19] qui montre que le trou spectral pour les formes de poids 1/2-entier est adapté pour traiter cette question). Par contre une difficulté notable dans (4) réside dans le fait que la somme est tronquée à $\sqrt{|D|}$. Il faut regarder cette quantité comme la longueur critique à partir de laquelle la somme sur n est capable de gommer les irrégularités de la fonction arithmétique λ_f.

D'autre part, la démonstration de (4) repose également sur une propriété d'équidistribution. Le lecteur a probablement reconnu dans (6) la silhouette d'une somme de Weyl ; et justement on peut vérifier qu'un corollaire du théorème de Duke (on peut penser aux fractions $\frac{\nu}{q}$ comme les parties réelles des points de Heegner) est l'équidistribution effective dans $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ de

$$\left\{\frac{\nu}{q},\ \nu^2 \equiv D \ (\mathrm{mod}\ q),\ q \leqslant \sqrt{|D|}\right\} \quad \text{lorsque } D \to -\infty. \tag{10}$$

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement les professeurs Ph. Michel, P. Sarnak et A. Venkatesh.

Références

[1] V. Blomer, Sums of Hecke eigenvalues over quadratic polynomials, Int. Math. Res. Notices (2008), IDrnn059, à paraître arXiv: 0803.4301 [math.NT], 2008.
[2] W. Duke, Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms, Invent. Math. 92 (1) (1988) 73–90.
[3] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, Class group L-functions, Duke Math. J. 79 (1) (1995) 1–56.
[4] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, A quadratic divisor problem, Invent. Math. 115 (2) (1994) 209–217.
[5] W. Duke, J. Friedlander, H. Iwaniec, Equidistribution of roots of a quadratic congruence to prime moduli, Ann. of Math. 141 (2) (1995) 423–441.
[6] B.H. Gross, W. Kohnen, D.B. Zagier, Heegner points and derivatives of L-series, II, Math. Ann. 278 (1987) 497–562.
[7] B.H. Gross, D.B. Zagier, Heegner points and derivatives of L-series, Invent. Math. 84 (2) (1986) 225–320.
[8] S. Helgason, The Radon Transform, second ed., Progress in Mathematics, vol. 5, Birkhäuser, Boston, MA, 1999.
[9] C. Hooley, On the number of divisors of a quadratic polynomial, Acta Math. 110 (1963) 97–114.
[10] E. Kowalski, H. Iwaniec, Analytic Number Theory, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.
[11] K. Martin, D. Whitehouse, Central L-values and toric periods for GL(2), Int. Math. Res. Notices (2008), à paraître.
[12] Ph. Michel, The subconvexity problem for Rankin–Selberg L-functions and equidistribution of Heegner points, Ann. of Math. 160 (1) (2004) 185–236.
[13] Ph. Michel, Analytic number theory and families of automorphic L-functions, in: Automorphic Forms and Applications, in: IAS/Park City Math. Ser., vol. 12, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 181–295.
[14] Ph. Michel, A. Venkatesh, Heegner points and non-vanishing of Rankin/Selberg L-functions, in: Analytic Number Theory: A Tribute to Gauss and Dirichlet, in: Clay Math. Proc., vol. 7, 2007, pp. 169–184.
[15] Ph. Michel, A. Venkatesh, Equidistribution, L-functions and ergodic theory: on some problems of Yu. Linnik, in: International Congress of Mathematicians, vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 421–457.
[16] A. Popa, Central values of Rankin L-series over real quadratic fields, Compositio Math. 142 (4) (2006) 811–866.
[17] G. Ricotta, T. Vidick, Hauteur asymptotique des points de Heegner, Canad. J. Math., à paraître.
[18] B. Rubin, Helgason–Marchaud inversion formulas for Radon transforms, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (10) (2002) 3017–3023.
[19] P. Sarnak, Additive number theory and Maass forms, in: Lecture Notes in Math., vol. 1052, Springer, Berlin, 1984, pp. 286–309.
[20] C.-L. Siegel, Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper, Acta Arith. 1 (1935) 83–86; Reprinted in: Ges. Abh., vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1966, pp. 406–409.
[21] L. Szpiro, E. Ullmo, S.-W. Zhang, Équirépartition des petits points, Invent. Math. 127 (2) (1997) 337–347.
[22] N. Templier, Points spéciaux et valeurs spéciales de fonctions L, Thèse de doctorat, Montpellier, juin 2008.
[23] N. Templier, A non-split sum of coefficients of modular forms, en préparation.
[24] N. Templier, Minoration du rang des courbes elliptiques sur les corps de classes de Hilbert, en préparation.
[25] S.-W. Zhang, Gross–Zagier formula for GL_2, Asian J. Math. 5 (2) (2001) 183–290.