Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 39–44

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

# Étude d'un système non linéaire de Boussinesq–Stefan

Abdelatif Attaoui

*Analyse et modèles stochastiques, CNRS-UMR 6085, Université de Rouen, 76801 Saint-Etienne-du-Rouvray, France*

Reçu le 22 avril 2008 ; accepté le 29 octobre 2008

Disponible sur Internet le 4 décembre 2008

Présenté par Pierre-Louis Lions

**Résumé**

Nous étudions une classe de systèmes de Boussinesq–Stefan dont le second membre de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est une force de gravité qui dépend de la temperature. ***Pour citer cet article : A. Attaoui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***



**Abstract**

**Study of a nonlinear Boussinesq–Stefan system with second member having a growth.** We give a few existence results for solutions for a class of Boussinesq–Stefan systems, with suitable conditions on the forcing terms in the right-hand side of the momentum equation depending on the temperature. ***To cite this article: A. Attaoui, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***



## Abridged English version

We consider a class of nonlinear Boussinesq–Stefan systems of the type:

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2\,\mathrm{div}\big(\mu(\theta)Du\big) + \nabla p = F(\theta) \quad \text{in } Q, \tag{1}$$

$$b(\theta)_t - \mathrm{div}\big(a(x,\theta,\nabla\theta)\big) + \mathrm{div}\big(\Phi(\theta)\big) = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{in } Q, \tag{2}$$

with $\mathrm{div}\, u = 0$ in $Q$, $u = 0$ and $\theta = 0$ on $\Sigma_T$, $u(t = 0) = u_0$ and $b(\theta)(t = 0) = b_0$ in $\Omega$, where $\Omega$ is an open, Lipschitz and bounded subset of $\mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$), with boundary $\partial\Omega$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$ and $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$. The unknowns are the velocity field $u : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^N$ and the temperature field $\theta : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$. The field $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ is the so-called strain rate tensor field. Eq. (1) is the conservation equation of momentum in which $\mu$ and $p$ respectively denote the kinematic viscosity and pressure of the fluid. In the right-hand side of Eq. (1), the function $F(\theta)$ represents the gravity's force which is proportional to the variations of density through the temperature. Eq. (2) is the temperature equation in which the right-hand side $\mu(\theta)|Du|^2$ is the dissipation energy (see the hypotheses (11)–(20) of the French version). In the case where $b \in C^1$ and under additional assumptions on $b$, there are solutions of systems similar to (1), (2) but within a particular framework (see, e.g. [4,6,9]). Under

*Adresse e-mail :* attaoui@netcourrier.com.

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2008.11.004

the assumptions adopted on $b$ in our Note (possible discontinuities of $b$), Eq. (2) completed with standard boundary and initial conditions is a Stefan-problem with $L^1$ data (see [3] and the references given there). When system (1), (2) is investigated, the analysis developed in [3] cannot be used, since the dissipation energy is not stable in $L^1(Q)$ with respect to approximations. The model studied in this Note is more general than those which are described in the above references. Indeed, the viscosity coefficient and the external force are temperature-dependent (with nonlinear dependence), the internal energy is also assumed to be nonlinear with respect to the temperature, there is a right-hand side in the temperature equation which is quadratic in the spatial gradient of the velocity field and the diffusion term in the temperature equation is of the Leray–Lions kind. As usual, the pressure $p$ is eliminated in the system (1), (2). In the sequel, we study the system (8), (9) of the French version. We are constrained to distinguish the case $N=2$ and $N=3$ for stability and uniqueness reasons.

• **The case $N=2$**. It is known that if $F(\theta)\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, then the Navier–Stokes equation (8) has a unique weak solution for $u_0\in(L^2(\Omega))^2$ and the dissipation energy $\mu(\theta)|Du|^2$ belongs to $L^1(Q)$. Eq. (9) is thus considered naturally within the $L^1$ framework (see, e.g. [2,3,5]). To guarantee the uniqueness and the stability of the solution of (9), we use the framework of renormalized solutions. This notion has been introduced by R.-J. DiPerna and P.-L. Lions in [7] and [8] for the study of Boltzmann equations (see also P.-L. Lions [9] for applications to fluid mechanics models). It was also adapted to parabolic version for equations of type (9) with $L^1$ data (see, e.g. [1,2]). The type of solutions which we obtain depends on the behavior of the function $F$. If, for example, $F$ is bounded, we obtain solutions for all given initial data $u_0\in(L^2(\Omega))^2$ and $b_0\in L^1(\Omega)$. To study the case of more general functions $F$, it is necessary to investigate the regularity of the solutions of (9). Under the assumptions adopted on $b$, the renormalized solutions of Eq. (9) satisfy:

$$\theta\in L^\infty\bigl(0,T,L^1(\Omega)\bigr),\ \forall k>0,\qquad \int_0^T\!\!\int_\Omega \bigl|DT_k(\theta)\bigr|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\leqslant Ck,$$

with $T_k(r)=\min(k,\max(r,-k))$ $\forall r\in\mathbb{R}$. Then, we show in a first step that $\theta\in L^r(0,T;L^q(\Omega))$ with $1<q<\infty$ and $1\leqslant r<\frac{q}{q-1}$. In order to have $F(\theta)\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, we are constrained to state the following growth assumption on $F$:

$$\forall r\in\mathbb{R},\quad \bigl|F(r)\bigr|\leqslant a+M|r|^\alpha,\quad \text{with } a\geqslant 0,\ M\geqslant 0 \text{ and } 2\alpha\in[0,3[.$$

We show in a second step that $F(\theta)$ is identified with an element of $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ with

$$\bigl\|F(\theta)\bigr\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\leqslant C\bigl(a+\|\theta\|^\alpha_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}\bigr).$$

These arguments allow us, thanks to fixed-points methods and a particular cutting of the definition domain of $b$, to show that (8), (9) has solutions for small initial data.

**Theorem 0.1.** *Under the assumptions* (11)–(20) *on the data, assume that the continuous function $F$ satisfies $|F(r)|\leqslant a+M|r|^\alpha$ $\forall r\in\mathbb{R}$, with $a\geqslant 0$, $M\geqslant 0$ and $2\alpha\in[0,3[$. Then*:

- *if $0\leqslant 2\alpha\leqslant 1$, there exists at least a weak-renormalized solution of the system* (8), (9) *for $N=2$* (*in the sense of Definition* 2.1 *of the French version*);
- *if $1<2\alpha<3$, there exists a real positive number $\eta$, such that if $a+\|u_0\|_{L^2(\Omega)}+\|b_0\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\eta$, then there exists at least a weak-renormalized solution of the system* (8), (9) *for $N=2$.*

• **The case $N=3$**. The uniqueness of solution of the Navier–Stokes Eq. (8) and the stability of the dissipation energy are open problems if $u_0$ belongs only to $(L^2(\Omega))^3$. If, for example, $u_0\in(H^1_0(\Omega))^3$, and $F$ is a continuous function from $\mathbb{R}$ into $\mathbb{R}^3$ such that $\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)}+\|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leqslant\eta$, with $\eta$ is a small enough constant, we obtain the existence of a solution of (8), (9) by the same techniques as in the case $N=2$.

**Theorem 0.2.** *Assume that* (11)–(20) *hold true. Moreover, assume that $u_0\in(H^1_0(\Omega))^3$. There exists a real positive number $\eta$, such that if $\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)}+\|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leqslant\eta$, then there exists at least a weak-renormalized solution of* (8), (9) *for $N=3$* (*in the sense of Definition* 2.1 *of the French version*).

## 1. Introduction

Nous considérons une classe de systèmes non linéaires de Boussinesq–Stefan du type :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2\,\mathrm{div}\big(\mu(\theta)Du\big) + \nabla p = F(\theta) \quad \text{dans } Q, \tag{3}$$

$$b(\theta)_t - \mathrm{div}\big(a(x,\theta,\nabla\theta)\big) + \mathrm{div}\big(\Phi(\theta)\big) = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } Q, \tag{4}$$

$$\mathrm{div}\, u = 0 \quad \text{dans } Q, \tag{5}$$

$$u = 0 \quad \text{et} \quad \theta = 0 \quad \text{sur } \Sigma_T, \tag{6}$$

$$u(t=0) = u_0 \quad \text{et} \quad b(\theta)(t=0) = b_0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{7}$$

où $\Omega$ est un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^N$ $(N = 2, 3)$, de frontière $\partial\Omega$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T)$ et $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0, T)$. Les inconnues sont le champ de déplacement $u : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^N$ et le champ de température $\theta : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ et $Du = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)$ est le taux de déformations. L'équation (3) est l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Les quantités $\mu$ et $p$ désignent respectivement la viscosité et la pression cinématiques du fluide. Le second membre de l'équation (3) est la fonction $F(\theta)$, où $F$ est une force de gravité proportionnelle à des variations de densité qui dépendent de la température. La fonction $\mu$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et bornée. La fonction $F$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N$, $u_0$ appartient à $(L^2(\Omega))^N$, à divergence nulle et $u_0.n = 0$ sur $\partial\Omega$. L'équation (4) est l'équation de la temperature dans laquelle le second membre $\mu(\theta)|Du|^2$ est le taux de dissipation de l'énergie. La donnée initiale $b_0$ appartient à $L^1(\Omega)$. Dans le cas où $b$ est de classe $C^1$ et sous des hypothèses supplémentaires sur $b$, il existe des solutions à des systèmes similaires à (3)–(7) mais dans un cadre particulier (voir [4,6,9]). Dans cette note, la fonction $b$ est discontinue. Le problème (4), (6), (7) est donc un problème de type Stefan à données $L^1$ (voir [3]). Quand nous étudions l'existence de solutions du système (3)–(7) dans son intégralité, nous ne pouvons pas employer l'analyse développée dans [3]. En effet, l'énergie de dissipation n'est pas stable dans $L^1(Q)$ par rapport aux approximations. Le modèle étudié dans cette note est plus général que ceux décrits dans [3,4,6,9], puisque l'on considère ici une énergie interne $b(\theta)$ non linéaire, une viscosité et une forçe extérieure qui dépendent non linéairement de la température, un couplage via l'énergie de dissipation $\mu(\theta)|Du|^2$ et enfin, le terme de diffusion dans l'équation de la température est de type Leray–Lions.

On rappelle les espaces fonctionnels classiques pour les équations de Navier–Stokes :

$$C^\infty_\sigma(\Omega) = \big\{u \in C^\infty_0\big(\Omega; \mathbb{R}^N\big);\, \mathrm{div}\, u = 0\big\}, \qquad L^q_\sigma(\Omega) = \text{fermeture de } C^\infty_\sigma(\Omega) \text{ dans } L^q\big(\Omega; \mathbb{R}^N\big),$$
$$H^1_\sigma(\Omega) = \text{fermeture de } C^\infty_\sigma(\Omega) \text{ dans } H^1_0\big(\Omega; \mathbb{R}^N\big),$$

avec $q \geqslant 1$. On remarque que la pression $p$ peut être éliminée du système (3)–(7). Dans la suite, nous étudions le système suivant :

$$u_t + (u \cdot \nabla)u - 2\,\mathrm{div}\big(\mu(\theta)Du\big) = F(\theta) \quad \text{dans } \big(H^1_\sigma\big)'(\Omega),\ \text{p.p. } t \in (0, T), \tag{8}$$

$$b(\theta)_t - \mathrm{div}\big(a(x,\theta,\nabla\theta)\big) + \mathrm{div}\big(\Phi(\theta)\big) = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } Q, \tag{9}$$

avec $\mathrm{div}\, u = 0$ dans $Q$, $u = 0$ et $\theta = 0$ sur $\Sigma_T$, $u(t = 0) = u_0$ et $b(\theta)(t = 0) = b_0$ dans $\Omega$. L'existence de solutions au problème (8), (9) repose sur la stabilité des équations (8) et (9) si on utilise des approximations ou l'unicité des solutions de ces équations si on utilise un point fixe. On est donc amené à distinguer le cas de la dimension 2 d'espace $(N = 2)$ de la dimension 3 $(N = 3)$.

• **Le cas $N = 2$**. On sait que si $F(\theta) \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, alors l'équation de Navier–Stokes (8) a une solution faible unique pour $u_0 \in (L^2(\Omega))^2$ et l'énergie de dissipation $\mu(\theta)|Du|^2$ est dans $L^1(Q)$. L'équation (9) se place donc naturellement dans le cadre $L^1$ (voir, par exemple [2,3,5]). Pour l'unicité et la stabilité de solutions de (9), on utilise le cadre des solutions renormalisées qui possèdent ces propriétés à la différence des solutions faibles. Cette notion a été introduite par R.-J. Di Perna et P.-L. Lions dans [7] et [8] pour l'étude des équations de Boltzmann (voir aussi P.-L. Lions [9] pour des applications à des modèles de mécanique des fluides). Cette notion a été adaptée par la suite à des versions paraboliques de type (9) à données $L^1$ (voir, par exemple [1,2]). Le type de solutions que l'on obtient dépend bien sûr du comportement de la fonction $F$. Si, par exemple, $F$ est bornée, on obtient des solutions pour toutes données initiales $u_0 \in (L^2(\Omega))^2$ et $b_0 \in L^1(\Omega)$. Pour aborder le cas de fonctions $F$ plus générales, il faut examiner plus précisément la régularité des solutions de (9). Sous les hypothèses que nous adoptons sur $b$, les solutions renormalisées des équations de type (9) vérifient les propriétés de régularité suivantes :

$$\theta \in L^\infty\big(0,T,L^1(\Omega)\big),\ \forall k>0,\quad \int_0^T\int_\Omega \big|DT_k(\theta)\big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant Ck,$$

avec $T_k(r)=\min(k,\max(r,-k))$ $\forall r\in\mathbb{R}$. Nous démontrons alors dans une première étape que $\theta\in L^r(0,T;L^q(\Omega))$ avec $1<q<\infty$ et $1\leqslant r<\frac{q}{q-1}$ (un résultat similaire est démontré dans [10] pour $N>2$ mais il ne peut pas être employé en tant que tel pour $N=2$). Pour avoir $F(\theta)\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, on est donc amené à faire une hypothèse de croissance sur $F$ du type :

$$\forall r\in\mathbb{R},\quad \big|F(r)\big|\leqslant a+M|r|^\alpha,\quad \text{avec } a\geqslant 0, M\geqslant 0 \text{ et } 2\alpha\in[0,3[.$$

Nous démontrons dans une deuxième étape que $F(\theta)$ s'identifie à un élement de $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ avec

$$\big\|F(\theta)\big\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\leqslant C\big(a+\|\theta\|^\alpha_{L^r(0,T;L^q(\Omega))}\big). \tag{10}$$

Ces arguments nous permettent via des méthodes de points fixe et un découpage particulier du domaine de définition de $b$ de démontrer que (8), (9) possèdent des solutions pour des données initiales petites.

• **Le cas $N=3$**. L'unicité de la solution de l'équation (8) et la stabilité de l'énergie de dissipation sont des problèmes ouverts si $u_0$ appartient seulement à $(L^2(\Omega))^3$. Par exemple, si $u_0\in(H^1_0(\Omega))^3$ et $F$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\|u_0\|_{H^1_0(\Omega)}+\|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leqslant\eta$, avec $\eta$ une constante suffisamment petite, on peut obtenir l'existence d'une solution au problème (8), (9) par les mêmes techniques que dans le cas $N=2$.

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :

$$b:\mathbb{R}\to\mathcal{P}(\mathbb{R}) \text{ est une fonction croisssante telle que } 0\in b(0) \text{ i.e. } b^{-1}(0)=0, \tag{11}$$

$$\big|b(r)\big|\geqslant C|r|\quad \forall r\in\mathbb{R}\ (C \text{ est une constante } >0), \tag{12}$$

$$b^{-1} \text{ est continue sur } \mathbb{R}, \tag{13}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}, b \text{ est de classe } C^1 \text{ en dehors d'un nombre fini de points discontinus sur } [-n,n], \tag{14}$$

$$\mu \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ avec } m_0\leqslant\mu(s)\leqslant m_1\ (0<m_0\leqslant m_1)\ \forall s\in\mathbb{R}, \tag{15}$$

$$F \text{ est une fonction continue de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}^N, \tag{16}$$

$$a(x,s,\xi):\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N \text{ est une fonction de Carathéodory telle que :} \tag{17}$$

$$\exists\alpha'>0 \text{ tel que } a(x,s,\xi)\xi\geqslant\alpha'|\xi|^2,\quad \big|a(x,s,\xi)-a(x,r,\xi)\big|\leqslant L(s,r)\big(K(x)+|\xi|\big)|s-r|,$$

$$\big|a(x,s,\xi)\big|\leqslant M\big(|s|\big)\big(K(x)+|\xi|\big),\quad \big(a(x,s,\xi)-a(x,s,\eta)\big)(\xi-\eta)\geqslant 0,$$

$$\text{p.p. en } x\in\Omega \text{ et } \forall(s,r,\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2+2N} \text{ où } K\in L^2(\Omega),\ L\in C^0(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \text{ et } M\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

$$\text{la fonction } \Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N \text{ est localement lipschitzienne}, \tag{18}$$

$$u_0\in\big(L^2(\Omega)\big)^N,\quad \operatorname{div}u_0=0\quad \text{dans } Q\quad \text{et}\quad u_0\cdot n=0\quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{19}$$

$$b_0\in L^1(\Omega). \tag{20}$$

## 2. Résultats pour le système (8), (9) en dimension $N=2$

**Définition 2.1.** Un couple de fonctions $(u,\theta)$ définies sur $\Omega\times(0,T)$ est une solution faible-renormalisée du système (8), (9) si :

$$u\in L^2\big(0,T;H^1_\sigma(\Omega)\big)\cap L^\infty\big(0,T;L^2_\sigma(\Omega)\big), \tag{21}$$

$$T_K(\theta)\in L^2\big(0,T;H^1_0(\Omega)\big) \text{ pour tout } K\geqslant 0 \text{ et } \theta\in L^\infty\big(0,T;L^1(\Omega)\big), \tag{22}$$

$$\frac{1}{n}\int_{\{(x,t)\in Q;\,n\leqslant|\theta(x,t)|\leqslant 2n\}} a(x,\theta,\nabla\theta)\nabla\theta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\to 0\quad \text{quand } n\to+\infty, \tag{23}$$

$$u \text{ est solution faible de l'équation de Navier–Stokes (8)}, \tag{24}$$

$$u(t=0)=u_0\quad \text{p.p. dans } \Omega, \tag{25}$$

il existe $\beta_\theta \in L^1(Q)$ tel que $\beta_\theta \in b(\theta)$ presque partout dans $Q$ et qui vérifie l'équation :

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega \varphi_t \int_0^{\beta_\theta} S'\big(b^{-1}(r)\big)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_\Omega \varphi(0)\left(\int_0^{b_0} S'\big(b^{-1}(r)\big)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_0^T\int_\Omega a(x,\theta,\nabla\theta)\nabla\varphi S'(\theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_0^T\int_\Omega a(x,\theta,\nabla\theta)\nabla\theta S''(\theta)\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^T\int_\Omega \nabla\varphi\left(\int_0^\theta \Phi'(\xi)S'(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega 2\mu(\theta)|Du|^2 S'(\theta)\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{26}$$

$\forall S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ tel que $S'$ est à support compact, et $\forall\varphi \in C_0^\infty([0,T)\times\bar\Omega)$ tel que $S'(\theta)\varphi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

**Théorème 2.2.** *On suppose vérifiées les hypothèses* (11)–(20), *de plus la fonction $F$ vérifie* : $\forall r\in\mathbb{R}$, $|F(r)| \leqslant a + M|r|^\alpha$, *avec* $a \geqslant 0$, $M \geqslant 0$ *et* $2\alpha \in [0,3[$. *Alors* :

– *si* $0 \leqslant 2\alpha \leqslant 1$ *alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système* (8), (9) (*au sens de la Définition* 2.1) ;
– *si* $1 < 2\alpha < 3$, *il existe* $\eta > 0$, *tel que si* $a + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|b_0\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \eta$, *alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système* (8), (9).

**Idée de la démonstration.** Soit $L$ un espace de Lebesgue du type $L = L^r(0,T,L^q(\Omega))$ $(r,q \geqslant 1)$. On fixe $\theta$ dans $L$, et on considère les équations de Navier–Stokes :

$$u_t + (u\cdot\nabla)u - 2\,\mathrm{div}\big(\mu(\theta)Du\big) = F(\theta) \quad \text{dans } \big(H_\sigma^1\big)'(\Omega),\ \text{p.p. } t\in(0,T), \tag{27}$$

avec $\mathrm{div}\,u = 0$ dans $Q$, $u = 0$ sur $\Sigma_T$ et $u(t=0) = u_0$ dans $\Omega$. D'après (10), on sait que $F(\theta) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Le problème (27) admet donc une solution unique $u \in L^2(0,T;H_\sigma^1(\Omega))$ telle que $\mu(\theta)|Du|^2 \in L^1(Q)$ (voir [12]). Désormais, on considère le problème parabolique suivant :

$$\frac{\partial b(\hat\theta)}{\partial t} - \mathrm{div}\big(a(x,\hat\theta,\nabla\hat\theta)\big) + \mathrm{div}\big(\Phi(\hat\theta)\big) = 2\mu(\theta)|Du|^2 \quad \text{dans } Q, \tag{28}$$

avec $\hat\theta = 0$ sur $\Sigma_T$ et $b(\hat\theta)(t=0) = b_0$ dans $\Omega$. Sous les hypothèses du Théorème 2.2, on utilise par exemple les méthodes classiques développées dans [3] (voir Section 4) pour montrer que le problème (28) admet une solution renormalisée unique $\hat\theta$. Afin d'appliquer un argument de type point fixe, il est d'abord nécessaire d'avoir $\hat\theta$ dans $L$ de sorte que nous puissions considérer l'application $\psi : \theta \to \hat\theta$ de $L$ dans $L$. Par conséquent, $\alpha$ doit être choisi tel que la régularité de la solution renormalisée de (28) implique $F(\theta) \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$, ce qui mène à différents choix de $L$ dépendant de $\alpha$. Deuxièmement, on utilise la stabilité de la solution renormalisée par rapport aux données et la stabilité de $\mu(\theta)|Du|^2$ par rapport aux approximations pour montrer que $\psi$ est continue. Cependant la compacité de $\psi$ reste un problème plus délicat. En effet, pour une suite $\theta_n$ bornée dans $L$, le second membre $\mu(\theta_n)|Du_n|^2$ est borné dans $L^1(Q)$. L'analyse développée dans [3] ne permet pas de conclure directement que la suite $\hat\theta_n$ $(\hat\theta_n = \psi(\theta_n))$ converge presque partout dans $Q$. Sans perdre de généralité, on suppose que $b$ a un seul point de discontinuité en zéro. Par exemple, $b(0^+) = 0$ et $b(0^-) = 1$. On définit une fonction $f$ assez régulière, telle que $f(x) = x^3$ sur un voisinage de zéro suffisamment petit. La fonction $f$ est linéaire en dehors du voisinage de zéro. On pose $\gamma_1 = f^+$ et $\gamma_2 = -f^-$. Les deux fonctions $\gamma_1(b(r)-\varepsilon-1)$ et $\gamma_2(b(r)+\varepsilon)$ sont de classe $C^1$. Par un argument de type Aubin (Simon [11]), on montre que les deux fonctions $\gamma_1(b(\hat\theta_n)-\varepsilon-1)$ et $\gamma_2(b(\hat\theta_n)+\varepsilon)$ convergent presque partout et on en déduit la convergence presque partout de $\hat\theta_n$, d'où la compacité de $\psi$. Enfin, pour prouver qu'il existe une boule $B$ de $L$ telle que $\psi(B) \subset B$, on distingue deux cas : si $0 \leqslant 2\alpha \leqslant 1$, ceci est prouvé pour toutes données initiales vérifiant (19), (20), tandis que si $1 < 2\alpha < 3$, nous sommes contraints de supposer que les données $a$, $\|b_0\|_{L^1(\Omega)}$ et $\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$ sont suffisamment petites. Le théorème du point fixe de Schauder permet de conclure à l'existence d'une solution $(u,\theta)$. $\square$

## 3. Résultats pour le système (8), (9) en dimension $N = 3$

**Théorème 3.1.** *On suppose vérifiées les hypothèses* (11)–(20) *et que* $u_0 \in (H_0^1(\Omega))^3$*. Il existe un nombre réel* $\eta > 0$*, tel que si* $\|u_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|F\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \eta$*, alors il existe au moins une solution faible-renormalisée du système* (8), (9) *en dimension* $N = 3$ (*au sens de la Définition* 2.1).

**Idée de la démonstration.** Soit $\theta \in L^1(Q)$. Sous les hypothèses du Théorème 3.1, le Théorème 3.11 de [12] nous assure l'existence et l'unicité de la solution faible $u$ de l'équation (27) dans $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^2(\Omega))$, avec $\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \leqslant C$ où $C$ est une constante. Utilisant un lemme de type Aubin (Simon [11]), on montre que l'énergie de dissipation $\mu(\theta)|Du|^2$ est stable dans $L^1(Q)$ relativement aux approximations. Pour conclure, On reprend alors les mêmes arguments que dans le cas $N = 2$. □

## Références

[1] H.-W. Alt, S. Luckhaus, Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, Math. Z. 183 (1983) 311–341.
[2] D. Blanchard, F. Murat, H. Redwane, Existence and uniqueness of a renormalized solution for a fairly general class of nonlinear parabolic problems, J. Differential Equations 177 (2001) 331–374.
[3] D. Blanchard, A. Porretta, Stefan problems with nonlinear diffusion and convection, J. Differential Equations 210 (2005) 383–428.
[4] B. Climent, E. Fernández-Cara, Some existence and uniqueness results for a time-dependent coupled problem of the Navier–Stokes kind, Math. Models Methods Appl. Sci. 8 (4) (1998) 603–622.
[5] A. Dall' Aglio, L. Orsina, Nonlinear parabolic equations with natural growth conditions and $L^1$ data, Nonlinear Anal. 27 (1986) 59–73.
[6] J.-I. Diaz, G. Galiano, Existence and uniqueness of solutions of the Boussinesq system with nonlinear thermal diffusion, Topol. Methods Nonlinear Anal. 11 (1) (1998) 59–82.
[7] R.-J. DiPerna, P.-L. Lions, On the cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability, Ann. of Math. 130 (1) (1989) 321–366.
[8] R.-J. DiPerna, P.-L. Lions, Ordinar differential equations, Sobolev spaces and transport theory, Invent. Math. 98 (1) (1989) 511–547.
[9] P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, vol. 1: Incompressible Models, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., vol. 3, 1996.
[10] S. Segura de León, J. Toledo, Regularity for entropy solutions of parabolic $p$-Laplacian type equations, Publ. Mat. 43 (1999) 665–683.
[11] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$, Ann. Mat. Pura Appl. 146 (1987) 65–96.
[12] R. Temam, Navier–Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis, 3rd revised edition, North-Holland, Amsterdam, 1984.