

## Analyse numérique

# Un schéma linéaire vérifiant le principe du maximum pour des opérateurs de diffusion très anisotropes sur des maillages déformés

Christophe Le Potier

*Commissariat à l'énergie atomique, DEN/DM2S/SFME, 91191 Gif-Sur-Yvette cedex, France*

Reçu le 7 juin 2008 ; accepté après révision le 29 octobre 2008

Disponible sur Internet le 3 décembre 2008

Présenté par Olivier Pironneau

Ce travail est dédié à la mémoire de Joseph Le Potier, ancien professeur de l'Université Paris VII en Mathématiques.

---

### Résumé

Nous décrivons une méthode de type différences finies généralisées pour des opérateurs de diffusion anisotropes sur des maillages déformés en dimension 2. Les dérivées d'ordre 2 sont calculées à l'aide de développements en séries de Taylor. La matrice associée au schéma est une M-matrice. Une légère hypothèse sur le maillage permet de montrer la convergence du schéma. L'efficacité de la méthode est mise en évidence par comparaison à des solutions analytiques et aux résultats obtenus par d'autres schémas numériques. *Pour citer cet article : C. Le Potier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

### Abstract

**A linear scheme satisfying a maximum principle for anisotropic diffusion operators on distorted grids.** We introduce a generalized finite-difference method for anisotropic diffusion operators on distorted grids. We calculate the second-order derivatives in space using a Taylor expansion. The resulting global matrix associated to the scheme is an M-matrix. Thanks to a certain assumption on the grid properties, we show the convergence of the scheme. We show the robustness of the method in comparison with analytical solutions and results obtained by other numerical schemes. *To cite this article: C. Le Potier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).*

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

---

### Abridged English version

In the framework of nuclear waste disposal simulation, we are interested in a transport model in porous media which can be described by a convection–diffusion equation. Recently, a cell-centered finite volume scheme has been proposed to discretize the diffusion operator [12,8]. We have shown the robustness and the precision of the algorithm in comparison with analytical solutions. Moreover, this scheme ensures a discrete maximum principle (DMP) for distorted meshes or highly anisotropic diffusion. This method, however, is not linear. We propose a linear algorithm which satisfies a DMP for any anisotropic tensor on distorted grids.

---

Adresse e-mail : [clepotier@cea.fr](mailto:clepotier@cea.fr).

First, considering an elliptic problem, we present the method in the isotropic homogenous case. We take a grid  $\mathcal{T}$  made up of  $N_{\text{ma}}$  polygons and  $N_f$  boundary points and define  $\mathcal{B} = \{X_{j|1 \leq j \leq N_{\text{ma}} + N_f}\}$  as the set of points associated to each polygon and using the points located on the boundary. Then, we introduce a generalized finite difference method and using the Taylor expansion for a point  $X_i \in \mathcal{B}$  (Eq. (1)), we solve a linear system described in Eq. (2).

In Proposition 2.1, a sufficient condition to obtain a positive solution in the previous linear system is given.

In the next part, this proposition is generalized by taking into account an anisotropic matrix  $\overline{\overline{D}}$ .

In another part, we give results concerning consistency, stability and a DMP of the scheme.

The numerical results are presented in the final section. We first verify the convergence of the algorithm in comparison with an analytical solution with an anisotropic diffusion tensor. We observe that the scheme is of the first order in space (Table 2) and the efficiency of the method using a case where mixed hybrid finite elements [3,1], and finite volumes [10,11] do not satisfy a discrete maximum principle is shown.

## 1. Introduction

Dans le cadre des études concernant le stockage des déchets nucléaires en formation géologique profonde, nous nous intéressons à un modèle de type transport qui s'écrit à l'aide d'une équation de convection–diffusion–dispersion avec un terme de décroissance radioactive et qui permet d'étudier la migration d'un radionucléide. Un schéma volumes finis, centré sur les mailles, a été récemment développé pour approcher le terme diffusif. Nous avons montré la robustesse et la précision de l'algorithme [12,8]. De plus, cette méthode respecte le principe du maximum pour des maillages très déformés ou des tenseurs fortement anisotropes. Cependant elle est non linéaire, ce qui peut être coûteux informatiquement dans certaines applications. Notons qu'à ce jour, les schémas linéaires satisfaisant ce principe imposent une condition géométrique ou une condition restrictive sur le rapport d'anisotropie. Pour des problèmes isotropes, la condition géométrique est décrite dans [13]. Elle s'applique aussi bien à des méthodes d'éléments finis standard que des méthodes de volumes finis [5].

Nous présentons et analysons un algorithme linéaire de type différences finies généralisées pour un opérateur de diffusion anisotrope satisfaisant le principe du maximum sur des maillages déformés.

## 2. Différences finies généralisées

Considérons un domaine polygonal convexe  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  de dimension 2. Nous simplifions le modèle de transport en supprimant la convection et la décroissance radioactive. Il s'écrit :  $-\text{div } \overline{\overline{D}} \vec{\nabla} = S$  avec  $C$ , la concentration de radionucléide,  $S$ , un terme source,  $\overline{\overline{D}}$ , une matrice (2, 2) symétrique définie positive homogène. D'autre part, des conditions aux limites du type Dirichlet sont imposées sur la frontière du domaine étudié.

### 2.1. Cas isotrope : $\overline{\overline{D}} = \text{Id}$

Considérons un maillage de polygones quelconques de  $\Omega$  constitué de  $N_{\text{ma}}$  mailles. Notons  $\mathcal{B} = \{X_{i|1 \leq i \leq N_{\text{ma}} + N_f}\}$  l'ensemble constitué des  $N_{\text{ma}}$  barycentres de chaque polygone et de  $N_f$  points situés sur la frontière ;  $(x_i, y_i)$  les coordonnées de  $X_i$ .

Nous généralisons les différences finies à la manière de [7]. Soit une fonction  $f(x, y)$  de classe  $C^2$  sur  $\Omega$ . Le développement en série de Taylor autour du point  $(x_i, y_i)$  s'écrit :

$$f_j = f_i + \Delta x_j \frac{\partial f_i}{\partial x} + \Delta y_j \frac{\partial f_i}{\partial y} + \frac{\Delta x_j^2}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + \frac{\Delta y_j^2}{2} \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} + \Delta x_j \Delta y_j \frac{\partial^2 f_i}{\partial x \partial y} + o(\sqrt{\Delta x_j^2 + \Delta y_j^2}^3) \quad (1)$$

avec  $\Delta x_j = x_j - x_i$ ,  $\Delta y_j = y_j - y_i$ ,  $f_j = f(x_j, y_j)$  et  $f_i = f(x_i, y_i)$ . Nous cherchons à approcher l'expression  $\partial^2 f_i / \partial x^2 + \partial^2 f_i / \partial y^2$  et nous nous intéressons donc au système linéaire  $MU = B$ , avec  $U = (u_{j|1 \leq j \leq J})$ ,  $J$  étant le nombre de points apparaissant dans le stencil du schéma,

$$M = \begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_J \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_J \\ \Delta x_1^2 - \Delta y_1^2 & \dots & \Delta x_J^2 - \Delta y_J^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_J \Delta y_J \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

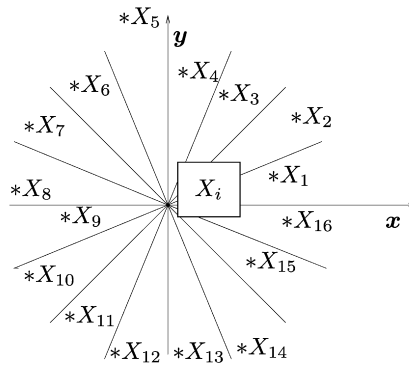


Fig. 1. 16 secteurs autour du point  $X_i$ .  
 Fig. 1. 16 sectors around the point  $X_i$ .

Tableau 1  
 Les 4 combinaisons linéaires.

Table 1  
 The 4 linear combinations.

	$Exp3_k$	$Exp4_k$		$Exp3_k$	$Exp4_k$		$Exp3_k$	$Exp4_k$		$Exp3_k$	$Exp4_k$
$k = 1$	$\geq 0$	$\geq 0$	$k = 2$	$\geq 0$	$\leq 0$	$k = 3$	$\leq 0$	$\geq 0$	$k = 4$	$\leq 0$	$\leq 0$

Par la suite, nous allons chercher une condition géométrique suffisante pour qu’il existe une solution positive non nulle au système précédent.

Soit un repère  $(X_i, \vec{x}, \vec{y})$ . Nous considérons un ensemble de 16 secteurs délimités par les droites  $\theta = \frac{\pi}{8}, \theta = -\frac{\pi}{8}, \theta = \frac{3\pi}{8}, \theta = -\frac{3\pi}{8}, \theta = \frac{\pi}{4}, \theta = -\frac{\pi}{4}, \theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$  (Fig. 1). Nous supposons qu’il existe au moins un point  $X_j \in \mathcal{B}$  dans chaque secteur.

**Proposition 2.1.** *S’il existe un ensemble de points  $X_j \in \mathcal{B}$  satisfaisant la propriété décrite sur la Fig. 1, alors il existe une solution  $U$  non nulle qui est positive.*

Nous calculons tout d’abord un ensemble de combinaisons linéaires vérifiant les deux premières équations. Soient  $X^{12}$  l’intersection de la droite  $X_1 X_2$  avec la droite  $\theta = \frac{\pi}{8}$  et  $X^{910}$  l’intersection de la droite  $X_9 X_{10}$  avec la droite  $\theta = \frac{\pi}{8}$ . Le point  $X^{12}$  vérifie  $\vec{O}X^{12} = s_{12,1} \vec{O}X_1 + (1 - s_{12,1}) \vec{O}X_2$  avec  $0 \leq s_{12,1} \leq 1$ . De même,  $X^{910}$  vérifie  $\vec{O}X^{910} = s_{910,1} \vec{O}X_9 + (1 - s_{910,1}) \vec{O}X_{10}$  avec  $0 \leq s_{910,1} \leq 1$ . Le point  $X_i$  étant situé sur le segment  $[X^{12}, X^{910}]$ , on en déduit qu’il existe 4 coefficients positifs  $(s_{1,1}, s_{2,1}, s_{9,1}, s_{10,1})$  tels que :  $s_{1,1} \vec{O}X_1 + s_{2,1} \vec{O}X_2 + s_{9,1} \vec{O}X_9 + s_{10,1} \vec{O}X_{10} = \vec{0}$ . Les deux premières équations du système sont vérifiées avec

$$\begin{cases} s_{1,1}(\Delta x_1^2 - \Delta y_1^2) + s_{2,1}(\Delta x_2^2 - \Delta y_2^2) + s_{9,1}(\Delta x_9^2 - \Delta y_9^2) + s_{10,1}(\Delta x_{10}^2 - \Delta y_{10}^2) \geq 0, \\ s_{1,1} \Delta x_1 \Delta y_1 + s_{2,1} \Delta x_2 \Delta y_2 + s_{9,1} \Delta x_9 \Delta y_9 + s_{10,1} \Delta x_{10} \Delta y_{10} \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

car dans le voisinage de la droite  $\theta = \frac{\pi}{8}, \Delta x_j^2 - \Delta y_j^2 \geq 0$  et  $\Delta x_j \Delta y_j \geq 0$ . On définit alors, de manière similaire 3 autres combinaisons linéaires  $s_{j,k} (j=1,16, k=1,4)$  qui vérifient les 2 premières équations (autour des droites  $\theta = -\frac{\pi}{8}, \theta = \frac{3\pi}{8}$  et  $\theta = -\frac{3\pi}{8}$ ). Notons  $Exp3_k = \sum_{j=1,16} s_{j,k} (\Delta x_j^2 - \Delta y_j^2)$  et  $Exp4_k = \sum_{j=1,16} s_{j,k} \Delta x_j \Delta y_j$  où  $k = 1, 4$ . Dans le Tableau 1, nous résumons les propriétés des 4 combinaisons linéaires obtenues.

On en déduit qu’il existe deux réels positifs  $\alpha_1$  et  $\alpha_3$  tels que  $\alpha_1 Exp3_1 + \alpha_3 Exp3_3 = 0$  et  $\alpha_1 Exp4_1 + \alpha_3 Exp4_3 \geq 0$ . De même, il existe  $\alpha_2$  et  $\alpha_4$ , réels positifs tels que  $\alpha_2 Exp3_2 + \alpha_4 Exp3_4 = 0$  et  $\alpha_2 Exp4_2 + \alpha_4 Exp4_4 \leq 0$ . Il existe donc  $\beta_1$  et  $\beta_2$  réels positifs tels que

$$\begin{cases} \beta_1(\alpha_1 Exp3_1 + \alpha_3 Exp3_3) + \beta_2(\alpha_2 Exp3_2 + \alpha_4 Exp3_4) = 0, \\ \beta_1(\alpha_1 Exp4_1 + \alpha_3 Exp4_3) + \beta_2(\alpha_2 Exp4_2 + \alpha_4 Exp4_4) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Il existe donc 16 valeurs  $u_{j, (j=1,16)}$  positives non toutes nulles vérifiant le système linéaire  $MU = B$ .

**Remarque 1.** On pose alors  $Z = (z_{j(j=1,16)})$  qui vérifie  $Z = vU$  avec  $v = 2/(\sum_{j=1,16} u_j \Delta x_j^2) = 2/(\sum_{j=1,16} u_j \Delta y_j^2)$  et on approche l'expression  $\partial^2 f_i / \partial x^2 + \partial^2 f_i / \partial y^2$  par  $\sum_{j=1,16} z_j (f_j - f_i)$ .

## 2.2. Cas anisotrope

Le tenseur  $\overline{\overline{D}}$  étant symétrique, il est diagonalisable dans une base orthogonale de vecteurs propres. Soient  $(\lambda_1, \lambda_2)$  ses 2 valeurs propres. On définit  $\theta_{\lambda_1, \lambda_2} = \arctan(\sqrt{\lambda_2/\lambda_1})$  et le repère  $(X_i, \vec{X}, \vec{Y})$  où  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  sont les vecteurs propres normés de  $\overline{\overline{D}}$ . On peut alors construire 16 nouveaux secteurs à l'aide des droites  $\theta = \frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$ ,  $\theta = -\frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$ ,  $\theta = -\frac{\pi}{4} - \frac{\theta_{\lambda_1, \lambda_2}}{2}$ ,  $\theta = \theta_{\lambda_1, \lambda_2}$ ,  $\theta = -\theta_{\lambda_1, \lambda_2}$ ,  $\theta = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . On suppose qu'il existe  $X_j \in \mathcal{B}$  dans chaque secteur. La proposition précédente se généralise.

## 3. Propriétés

Soit  $C_h$  les valeurs de C en  $X_i$ ,  $S_h$  les valeurs de S en  $X_i$  et  $A_h$  la matrice associée au schéma tel que  $A_h C_h = S_h$ .

### 3.1. Consistance du schéma

Pour chaque point  $X_i \in \mathcal{B}$  à l'intérieur du maillage, nous ajoutons le nombre suffisant de points sur la frontière tel que la propriété décrite sur la Fig. 1 soit vérifiée. Ceci définit le nombre  $N_f$ . Nous définissons  $rmax_i$  le rayon minimum du cercle tel que les 16 points  $X_j \in \mathcal{B}$  définis dans la Proposition 1 soient à l'intérieur de ce cercle. Nous supposons que  $rmax_i$  tend vers 0 lorsque l'on raffine le maillage. D'autre part, la combinaison linéaire obtenue vérifie  $\sum_{j=1,16} z_j (\Delta x_j^2/2) = \sum_{j=1,16} z_j (\Delta y_j^2/2) = 1$  avec  $z_j \geq 0$ . Donc  $z_j \leq 2/\Delta x_j^2$  et  $z_j \leq 2/\Delta y_j^2$ . On en déduit alors que  $\sum_{j=1,16} z_j (f_j - f_i) = \partial^2 f_i / \partial x^2 + \partial^2 f_i / \partial y^2 + o(rmax_i)$  ce qui prouve la consistance du schéma.

**Remarque 2.** Pour chaque point  $X_i$ , on choisit les  $X_j \in \mathcal{B}$  les plus proches de  $X_i$  appartenant aux 16 secteurs de la Fig. 1. Par exemple, pour un maillage de parallélogrammes d'angle aigu  $\nu$  dont les côtés sont de longueur  $r$ , on montre qu'il existe une fonction positive  $f$  et un cercle de rayon  $f(\nu)r$  tels que les points de la Fig. 1 soient à l'intérieur de ce cercle. La fonction  $f$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $\nu$  tend vers 0. Nous en déduisons que plus le maillage est déformé, plus le schéma devient imprécis. De manière plus générale, lorsque la régularité des mailles reste la même dans une convergence en maillage, nous observons que cette fonction qui dépend de la régularité et ce cercle existent, ce qui signifie que  $rmax_i$  tend vers zéro lorsqu'on raffine le maillage.

### 3.2. Principe du maximum

Si la Proposition 2.1 est vérifiée, les coefficients  $z_j$  étant tous positifs, la matrice  $A_h$  est une M-matrice car elle est irréductible. Le schéma obtenu vérifie alors le principe du maximum (voir [2]).

### 3.3. Stabilité du schéma

Remarquons que pour  $v = -(x^2 + y^2)$ , nous obtenons l'égalité  $A_h v = A_0 = 2D_{1,1} + 2D_{2,2}$  où  $D_{1,1}$  et  $D_{2,2}$  sont les termes de la diagonale de  $\overline{\overline{D}}$ . En utilisant que le schéma vérifie le principe du maximum et en reprenant le même de type de raisonnement décrit dans [6], on en déduit que  $\|A_h^{-1}\|_\infty \leq G$  où  $G = \|v\|_\infty / A_0$  est un coefficient strictement positif indépendant de  $rmax = \max_{i=1, N_{ma}} rmax_i$ .

### 3.4. Convergence du schéma

Si les hypothèses de la Fig. 1 sont satisfaites et si pour chaque point  $X_i \in \mathcal{B}$  à l'intérieur du maillage,  $rmax_i$  tend vers zéro lorsqu'on raffine le maillage, le schéma (DFPMD) est convergent car il est consistant et stable. Il est au moins d'ordre 1.

Tableau 2

Erreur  $L^2$  en fonction du pas en espace et pourcentage de concentrations négatives.

Table 2

Error  $L^2$  as a function of the step size in space and the percentage of negative concentrations.

$h$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$
$N_{\text{ma}}$	16	64	256	1024	4096	16384
Erreur $L^2$	$5,23 \times 10^{-1}$	$4,56 \times 10^{-1}$	$1,13 \times 10^{-1}$	$4,61 \times 10^{-2}$	$1,96 \times 10^{-2}$	$8,85 \times 10^{-3}$

Schéma	EFMH	VFSYM	DFPMD
Conc. négatives (16 mailles)	62	37	0
Conc. négatives (16384 mailles)	19	7	0

#### 4. Résultats numériques

Nous reprenons un exemple inspiré par le test 9 et le test 5 dans [9]. Le domaine de calcul est défini par  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$  qui est maillé à l'aide de carrés. Nous nous intéressons à la solution analytique  $C_{\text{an}}(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$ . Le tenseur de diffusion vérifie :  $\overline{\overline{D}} = R_{\theta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{pmatrix} R_{\theta}^{-1}$  où  $R_{\theta}$  est la rotation d'angle  $-\frac{3\pi}{8}$ . Le second membre  $S$  vérifie  $S = -\text{div} \overline{\overline{D}} \nabla C_{\text{an}}$ . Les conditions aux limites sont de type  $C = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Nous effectuons les calculs dans la base des vecteurs propres du tenseur. Pour chaque point  $X_i$  à l'intérieur du maillage, nous cherchons les points du stencil dans un rayon inférieur à  $8h$ ,  $h$  étant la longueur des arêtes frontières. Nous ajoutons 28 points sur chaque arête de la frontière pour vérifier les hypothèses de la Fig. 1. Afin d'optimiser le nombre de points du stencil, nous utilisons l'algorithme du simplexe [4] pour résoudre le système  $MU = B$ , dont l'existence d'une solution est assurée en appliquant la Proposition 2.1. Nous obtenons  $J \leq n_{\text{eq}} = 5$ ,  $n_{\text{eq}}$  étant le nombre d'équations à résoudre. Nous observons, sur cet exemple, qu'il suffit qu'il existe un point  $X_j \in \mathcal{B}$  dans l'un des 8 ( $n_{\text{sec}}$ ) secteurs définis par des droites  $\theta = \theta_{\lambda_1, \lambda_2}$ ,  $\theta = -\theta_{\lambda_1, \lambda_2}$ ,  $\theta = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , pour que l'algorithme converge vers une solution. Nous effectuons en moyenne 10 ( $n_{\text{it}}$ ) itérations par maille dans l'algorithme du simplexe, ce qui donne une complexité de  $0(n_{\text{it}} \times n_{\text{sec}} \times n_{\text{eq}} N_{\text{ma}}) = 0(400N_{\text{ma}})$ . Le coût algorithmique est légèrement supérieur à la complexité de l'assemblage de la matrice du schéma volumes finis VFSYM décrit dans [10]. Nous représentons dans le Tableau 2 les erreurs  $L^2$  de  $C$  par rapport à la solution analytique en fonction de  $h$ . L'ordre de la méthode est entre 1 et 2.

Afin de montrer l'efficacité de la méthode, nous considérons le même domaine de calcul, une source vérifiant  $S = 1$  sur le carré  $]0, 0.25[ \times ]0, 0.25[$  et 0 ailleurs. Les conditions aux limites et le tenseur de diffusion ne sont pas changés. Nous reprenons le maillage le plus grossier constitué de 16 mailles et le maillage le plus fin constitué de 16384 mailles. Nous représentons dans le Tableau 2 le pourcentage de concentrations négatives avec les éléments finis mixtes hybrides (EFMH) [3,1] et avec l'algorithme VFSYM. D'autre part, avec le schéma DFPMD, nous vérifions que toutes les valeurs obtenues sont positives. Les temps CPU des schémas VFSYM et DFPMD sont du même ordre, en tenant compte de l'assemblage des matrices et des temps d'inversion des systèmes linéaires de chaque méthode.

#### Remerciements

L'auteur remercie Stéphane Gounand et Sergey Kudriakov pour leurs relectures et commentaires détaillés.

#### Références

- [1] G. Bernard-Michel, C. Le Potier, A. Beccantini, S. Gounand, M. Chraïbi, The Andra Couplex1 test: comparisons between finite element, mixed hybrid finite element and finite volume element discretizations: simulation of transport around a nuclear waste disposal site, *Comput. Geosci.* 8 (2) (2004) 187–201.
- [2] E. Burman, A. Ern, Discrete maximum principle for Galerkin approximations of the Laplace operator on arbitrary meshes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 338 (8) (2004) 641–646.
- [3] F. Dabbène, Mixed hybrid finite elements for transport of pollutants by undergrounds water, in: *Proceeding of the 10th International Conference on Finite Elements in Fluids*, Tucson, USA, 1998.
- [4] G.B. Dantzig, Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities, in: T.C. Koopmans (Ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Wiley, New York, 1951, pp. 339–347 (Chapter 21).
- [5] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, Finite volume method, in: P.G. Ciarlet, J.L. Lions (Eds.), *Handbook of Numerical Analysis*, vol. VII, 2000.

- [6] I. Faille, Modélisation bidimensionnelle de la génèse et de la migration des hydrocarbures dans un bassin sédimentaire, Thèse de l'université Joseph Fourier-Grenoble 1, 1992.
- [7] L. Gavete, M.L. Gavete, J.J. Benito, Improvements of generalized finite difference method and comparison with other meshless method, *Appl. Math. Modelling* 27 (10) (2003) 831–847.
- [8] A. Genty, C. Le Potier, Avoiding negative concentrations for transport calculations of radionuclides in high-level radioactive waste disposal system, in: IAHR, International Groundwater Symposium, Istanbul, 2008, pp. 286–292.
- [9] R. Herbin, F. Hubert, Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids, in: 5th International Symposium on Finite Volumes for Complex Applications, June 08–13, <http://www.latp.univ-mrs.fr/fvca5>, 2008.
- [10] C. Le Potier, Finite volume scheme for highly anisotropic diffusion operators on unstructured meshes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340* (2005) 921–926.
- [11] C. Le Potier, Finite volume monotone scheme for highly anisotropic diffusion operators on unstructured triangular meshes, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341* (2005) 787–792.
- [12] C. Le Potier, Finite volume scheme satisfying maximum and minimum principles for anisotropic diffusion operators, in: *Finite Volumes for Complex Applications V*, Aussois, 2008, pp. 103–118.
- [13] J. Xu, L. Zikatanov, A monotone finite element scheme for convection–diffusion equations, *Math. Comp.* 66 (228) (1999) 1429–1446.