Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 5–8
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

Une remarque sur le spectre des nombres de Pisot

Toufik Zaïmi

Département de mathématiques, Université Larbi-Ben-M'hidi, Oum El Bouaghi 04000, Algérie

Reçu le 3 août 2008 ; accepté après révision le 12 novembre 2008

Disponible sur Internet le 13 décembre 2008

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Soit θ un nombre de Pisot inférieur à 2, m un entier rationnel positif, et A_m l'ensemble des nombres réels $P(\theta)$ pour P décrivant l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{0, 1, \ldots, m\}$. On donne un minorant de la limite supérieure des pas de la progression constituée des éléments de A_m. ***Pour citer cet article : T. Zaïmi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

A remark on the spectra of Pisot numbers. Let θ be a Pisot number less than 2, m a positive rational integer, and A_m the set of the polynomials with coefficients in $\{0, 1, \ldots, m\}$ evaluated at θ. We give a lower bound for the greatest limit point of common differences of consecutive elements of A_m. ***To cite this article: T. Zaïmi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

Soit $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $A(\theta) = A_1(\theta) = \{\varepsilon_n\theta^n + \varepsilon_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots + \varepsilon_0,\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_i \in \{0, 1\}\}$, où $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers rationnels non négatifs. Muni de l'ordre usuel de la droite réelle, l'ensemble $A(\theta)$ est une sorte de progression arithmétique à deux pas : la différence de deux éléments consécutifs de $A(\theta)$ ne peut valoir que 1 ou $\theta - 1$ [7]. Généralement, pour tout nombre réel $\theta \in]1, 2[$ et tout entier rationnel positif m, soit

$$a_{0,m} = 0 < a_{1,m} = 1 < a_{2,m} = \theta < a_{3,m} < \cdots$$

le réarrangement croissant des éléments de l'ensemble

$$A_m = A_m(\theta) = \left\{\varepsilon_n\theta^n + \varepsilon_{n-1}\theta^{n-1} + \cdots + \varepsilon_0,\ n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_i \in \{0, 1, \ldots, m\}\right\}$$

et soit

$$P_m = P_m(\theta) = \{a_{k+1,m} - a_{k,m},\ k \in \mathbb{N}\}$$

l'ensemble des « pas ». Il est clair que $P_m \subset B_m$, où

Adresse e-mail : toufikzaimi@yahoo.com.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.11.010

$$B_m = B_m(\theta) = A_m(\theta) - A_m(\theta).$$

En considérant le bêta-développement en base θ d'un nombre réel positif [8], on voit immédiatement que $P_m \subset]0,1]$ (voir aussi [11] ; une autre preuve de ce résultat se trouve dans [3]). Il s'ensuit que $P_m \subset B_m \cap]0,1]$ et en particulier P_m est fini lorsque B_m est discret. Dans leur étude des ensembles A_m et B_m, plusieurs auteurs (voir par exemple [1,7] et [9,11]) ont considéré les quantités

$$l_m = l_m(\theta) = \inf_{b \in B_m(\theta) \cap]0,\infty[} b$$

et

$$L_m = L_m(\theta) = \limsup_{b \in P_m(\theta)} b.$$

Il est bien évident que $0 \leqslant l_m \leqslant L_m \leqslant 1$, et $l_m > 0$ si et seulement si A_m est uniformément discret ; de plus on a d'après [4], $l_m = \inf_{b \in P_m} b = \liminf_{b \in P_m} b$. L'équivalence :

$$\forall m \geqslant 1, \quad l_m(\theta) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \text{ est un nombre de Pisot,} \tag{1}$$

a été prouvée dans [2]. Notons que les propositions : « *Tous les ensembles $B_m(\theta)$ sont discrets* », ou bien « *Tous les ensembles $B_m(\theta)$ sont uniformément discrets* », sont aussi équivalentes à celles figurant dans (1). Les deux implications : $B_1(\theta)$ est discret $\Rightarrow \theta$ est un nombre de Pisot, et $(B_1(\theta) - A_1(\theta))$ est discret $\Rightarrow \theta$ est un nombre de Pisot, montrées respectivement dans [6] lorsque $\theta \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et dans [11] quand $\theta \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, sont actuellement les meilleurs raffinements de (1). Comme $l_2(\theta) > 0 \Rightarrow B_1(\theta)$ uniformément discret $\Rightarrow B_1(\theta)$ discret, la relation $l_2(\theta) > 0 \Rightarrow \theta$ est un nombre de Pisot, montrée dans [5] pour $\theta \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, est moins fine que la relation correspondante ci-dessus. En fait l'un des problèmes concernant les ensembles B_m est le suivant. L'implication $B_1(\theta)$ discret $\rightarrow B_1(\theta)$ uniformément discret demeure-t-elle vraie pour $\theta > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sans l'hypothèse θ nombre de Pisot. De même les nombres de Pisot sont-ils les seuls nombres réels pour lesquels 0 n'est pas point limite de l'ensemble $B_1(\theta)$ (resp. vérifiant $l_1(\theta) > 0$) ? Par ailleurs, il existe un algorithme simple pour déterminer les quantités $l_m(\theta)$, lorsque θ est un nombre Pisot et $m \geqslant 1$ [1].

Rappelons enfin les résultats concernant les applications L_m :

(a) Si $\theta \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $L_1(\theta) = 1$ [3], $L_2(\theta) \leqslant \max(\theta - 1, 2 - \theta) < 1$ [2], et $L_4(\theta) = 0$ quand θ n'est pas un nombre de Pisot [6].
(b) Si $\theta < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors $L_1(\theta) \leqslant \max(\theta^2 - \theta, 1 + \theta - \theta^2) < 1$ [2], et $L_3(\theta) = 0$ quand θ n'est pas un nombre de Pisot [6].
(c) Si $\theta \leqslant 2^{1/4}$ alors $L_1(\theta) = 0$ sauf peut être lorsque θ^2 est un nombre de Pisot [6].
(d) Si θ est un nombre de Pisot de degré d sur le corps des rationnels $\mathbb{Q}$, alors $L_m(\theta) \geqslant \frac{\theta^{(\log(2d-2)-\log(1-A))/\log A}}{2\theta}$, où $m = 1$ et A est le maximum des modules des conjugués de θ sur $\mathbb{Q}$, autres que θ [4].

Dans cette Note on montre :

Théorème 1.1. *L'ensemble B_m est discret si et seulement si P_m est fini. Si B_m est discret, alors Card$(C_m) l_{2m} \leqslant L_m$, où $C_m \subset P_m$ et chaque élément de C_m est une différence de termes consécutifs de la suite $(a_{n,m})_{n \geqslant 0}$ une infinité de fois.*

De ce résultat on déduit facilement :

Corollaire 1.2. *Soit θ un nombre de Pisot de degré d sur $\mathbb{Q}$. Alors $d l_{2m}(\theta) \leqslant L_m(\theta)$.*

Remarque 1.3. Il est clair que la dernière inégalité donne une minoration de $L_m(\theta)$ en fonction de $l_{2m}(\theta)$ pour tout $m \geqslant 1$ (la quantité $l_{2m}(\theta)$ est déterminée par l'algorithme de [1]). En outre, on peut montrer dans le cas où $m = 1$ que cette minoration est meilleure que celle du (d) ci dessus. Dans [10], l'auteur a montré que $\frac{1}{2}$ est le plus grand point limite de l'ensemble $\{l_m(\theta), \theta \in]1,2[\}$ lorsque $m = 1$.

Du corollaire ci-dessus on déduit aussi :

Corollaire 1.4. *Si $m \geqslant 2$, alors* 0 *est le seul point limite de l'ensemble des quantités $l_m(\theta)$ lorsque θ parcourt l'ensemble des nombres de Pisot inférieurs à* 2.

2. Preuve du Théorème 1.1 et de ses corollaires

De l'inclusion $P_m \subset B_m \cap]0, 1]$, on déduit que P_m est fini si B_m est discret. Inversement, supposons l'ensemble P_m fini et soit $b \in B_m \cap]0, \infty[$. Alors, il existe deux éléments a_u et $a_v \in A_m$ tels que $b = a_u - a_v$, où $u > v$, et b peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} b &= (a_u - a_{u-1}) + (a_{u-1} - a_{u-2}) + \cdots + (a_{v+1} - a_v) \\ &= n_1 p_1 + n_2 p_2 + \cdots + n_s p_s, \end{aligned} \tag{2}$$

où $\{p_1, p_2, \ldots, p_s\} = P_m$, et $\{n_1, n_1, \ldots, n_s\} \subset \mathbb{N}$. Il s'ensuit que si $b \in B_m \cap]0, \alpha]$, où α est un réel positif quelconque, alors chaque n_i dans (2) vérifie $0 \leqslant n_i \leqslant n_1 + n_2 + \cdots + n_s \leqslant \frac{\alpha}{\min P_m}$ et b ne prend qu'un nombre fini de valeurs ; donc $B_m \cap]0, \alpha]$ est fini, et comme $B_m = -B_m$ on déduit que B_m est discret.

Supposons toujours P_m fini, et soit $C_m = \{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$ l'ensemble des pas communs de la suite $(a_{n,m})_{n \geqslant 0}$: chaque p_i, où $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, est différence d'éléments consécutifs de A_m une infinité de fois. Sans perte de généralité, on peut aussi supposer $p_1 < p_2 < \cdots < p_t$. Dans ce cas $p_1 = l_m(\theta)$, $p_t = L_m(\theta)$ et $2 \leqslant t \leqslant s$. En réécrivant l'élément $b \in B_m \cap]0, \infty[$ sous la forme $b = a_u + \theta^N - (a_v + \theta^N)$, où N est un entier rationnel suffisamment grand pour que l'on ait $a_{u'} := a_u + \theta^N \in A_m$, $a_{v'} := a_v + \theta^N \in A_m$ et $\{a_{u'} - a_{u'-1}, a_{u'-1} - a_{u'-2}, \ldots, a_{v'+1} - a_{v'}\} \subset C_m$, on obtient alors

$$b = k_1 p_1 + k_2 p_2 + \cdots + k_t p_t, \tag{3}$$

où $\{k_1, k_2, \ldots, k_t\} \subset \mathbb{N}$. De (3), on déduit que l'ensemble B_m est contenu dans le groupe additif $G := \mathbb{Z}p_1 + \mathbb{Z}p_2 + \cdots + \mathbb{Z}p_t$, où $\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers rationnels. Comme $B_{2m} = B_m + B_m \subset G$, une simple réccurence montre que $B_{2^k m} \subset G$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que le groupe additif $\mathbb{Z}[\theta]$ engendré par les puissances de θ, vérifie $\mathbb{Z}[\theta] \subset \bigcup_{k \geqslant 0} B_{2^k m} \subset G$, et donc $\mathbb{Z}[\theta] = G$. Fixons une représentation dans B_m pour chaque p_i, où $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, et soit n la plus grande puissance de θ figurant dans ces représentations. Alors d'après (3), il existe $\{k'_1, k'_2, \ldots, k'_t\} \subset \mathbb{N}$ tel que $\theta^{n+1} = k'_1 p_1 + k'_2 p_2 + \cdots + k'_t p_t$, et donc θ est un entier algébrique. Si d est le degré of θ sur $\mathbb{Q}$, alors $\mathbb{Z}[\theta]$ est un groupe libre de rang d et par suite

$$d \leqslant t. \tag{4}$$

Posons $p_0 = 0$. Par le principe des tiroirs, il existe $i \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ tel que $p_{i+1} - p_i \leqslant \frac{p_t}{t}$ et donc

$$l_{2m}(\theta) \leqslant p_{i+1} - p_i \leqslant \frac{p_t}{t} = \frac{L_m(\theta)}{t}; \tag{5}$$

ceci acheve la preuve du théorème.

Supposons maintenant que θ soit un nombre de Pisot. Alors, d'après l'introduction, tous les ensembes B_m sont discrets. Soit encore d le degré de θ sur $\mathbb{Q}$. Par les relations (4) et (5) on a

$$d l_{2m}(\theta) \leqslant L_m(\theta),$$

et en particulier $l_2(\theta) \leqslant \frac{1}{d}$. De cette dernière inégalité on déduit $l_m(\theta) \leqslant \frac{1}{d}$ pour tout $m \geqslant 2$, et le deuxième corollaire suit immédiatement.

Références

[1] P. Borwein, K.G. Hare, Some computations on the spectra of Pisot and Salem numbers, Math. Comp. 71 (2002) 767–780.

[2] Y. Bugeaud, On a property of Pisot numbers and related questions, Acta Math. Hungar. 73 (1996) 33–39.

[3] P. Erdös, I. Joó, V. Komornik, Characterization of the unique expansion $1 = \sum_{i \geqslant 1} q^{-n_i}$ and related problems, Bull. Soc. Math. France 118 (1990) 377–390.

[4] P. Erdös, I. Joó, V. Komornik, On the sequence of the numbers of the form $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 q + \cdots + \varepsilon_n q^n$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$, Acta Arith. 83 (1998) 201–210.

[5] P. Erdös, I. Joó, F.J. Schnitzer, On Pisot numbers, Annales Univ. Sci. Budapest 39 (1996) 95–99.
[6] P. Erdös, V. Komornik, Developments in non integer bases, Acta Math. Hungar. 79 (1998) 57–83.
[7] D.J. Feng, Z.Y. Wen, A property of Pisot numbers, J. Number Theory 97 (2002) 305–316.
[8] W. Parry, On the β-expansions of real numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 11 (1960) 401–416.
[9] T. Zaïmi, On an approximation property of Pisot numbers, Acta Math. Hungar. 96 (4) (2002) 309–325.
[10] T. Zaïmi, On an approximation property of Pisot numbers II, J. Théor. Nombres Bordeaux 16 (2004) 239–249.
[11] T. Zaïmi, Approximation by polynomials with bounded coefficients, J. Number Theory 127 (2007) 103–117.