Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 77–80

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle

Fibrations 2-isotropes en tores

Francisco-Javier Turiel

Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Campus de Teatinos, 29071 Málaga, Espagne

Reçu le 27 janvier 2008 ; accepté après révision le 9 novembre 2008

Disponible sur Internet le 13 décembre 2008

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

Dans ce travail on donne un théorème de type Arnold–Liouville pour un feuilletage 2-isotrope, notion introduite dans une précédente Note (Turiel, 2008) pour une r-forme fermée quelconque, et on étudie quelques propriétés des réseaux entiers à singularités associés. ***Pour citer cet article : F.-J. Turiel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Torus 2-isotropic fibrations. In this Note one proves a kind of Arnold–Liouville theorem for a 2-isotropic foliation, notion introduced in a previous Note (Turiel, 2008) for any closed r-form, and one studies some properties of the singular integer nets associated to it. ***To cite this article: F.-J. Turiel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Toutes les structures considérées sont réelles et de classe C^∞. Dans une précédente Note [3] on a introduit les feuilletages 2-isotropes, généralisation aux formes fermées de degré quelconque des feuilletages lagrangiens. Ici, on donnera un théorème de type Arnold–Liouville pour ces feuilletages et on introduira, en rapport avec celui-ci, les réseaux entiers à singularités, dont quelques propriétés seront étudiées. Dans notre démonstration de ce théorème, à la différence du cas classique, la structure affine sur les feuilles se construit sans faire appel aux fonctions en involution. Ceci permet de considérer les formes de degré quelconque, y compris les formes volume, et aussi certaines formes symplectiques singulières ; par exemple sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ muni des coordonnées $(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2)$ et du feuilletage $\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_2 = 0$ la forme $\omega = x_1\,\mathrm{d}\theta_1 \wedge \mathrm{d}x_1 + x_2\,\mathrm{d}\theta_2 \wedge \mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2$ (aucune transversale isotrope ne coupe la feuille $\{0\} \times \mathbb{T}^2$!). Ce travail se situe donc dans le cadre des fibrations "lagrangiennes" (2-isotropes) en tores pour certaines formes différentielles bien choisies et il montre, en particulier, que les résultats de [2] et la classification des S^1-fibrés principaux sur les variétés sont deux aspects d'une même théorie.

Considérons un m-espace vectoriel V et un élément $\lambda \in \Lambda^r V^*$, $r \geqslant 1$. On dira qu'un sous-espace vectoriel W de V est *isotrope* si $\lambda_{|W} = 0$, tandis que 2-*isotrope* voudra dire que $i_w i_u \lambda = 0$ pour tout $w, u \in W$ ou que $r = 1$. Dans la suite M sera une variété de dimension m et ω une r-forme fermée, $r \geqslant 1$, sur M. Une sous-variété P de M sera appelée *isotrope* lorsque, pour tout $p \in P$, T_pP est isotrope par rapport à $(T_pM, \omega(p))$. Considérons un feuilletage $\mathcal{F}$ de dimension ℓ sur M ; notons $T\mathcal{F}$ son fibré tangent. Suivant [3] on dira que $\mathcal{F}$ est 2-*isotrope* si chaque

Adresse e-mail : turiel@agt.cie.uma.es.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.11.012

$T_p\mathcal{F}$, $p \in M$, est 2-isotrope, $\operatorname{Ker}\omega(p) \cap T_p\mathcal{F} = \{0\}$ pour presque tout $p \in M$, et que pour tout couple de champs de vecteurs $X, Y \in T\mathcal{F}$ (c'est-à-dire tangents au feuilletage) il existe un troisième champ de vecteurs $Z \in T\mathcal{F}$ tel que $L_X i_Y \omega = i_Z \omega$; à remarquer que Z est unique car $\operatorname{Ker}\omega(p) \cap T_p\mathcal{F} = \{0\}$ presque partout. Dans ces conditions, si on pose $\nabla_X Y = Z$ on obtient une structure affine sur les feuilles de $\mathcal{F}$. En particulier $Y \in T\mathcal{F}$ est parallèle si et seulement si $i_Y\omega$ est basique. On a l'extension suivante du théorème d'Arnold–Liouville (voir [1] pour le cas symplectique) :

Théorème 1. *Soit F une feuille compacte et sans holonomie de $\mathcal{F}$. Il existe alors un voisinage ouvert U de F et un difféomorphisme $\varphi : U \to V \times \mathbb{T}^\ell$, où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{m-\ell}$, tels que $\mathcal{F}$ se transforme en le feuilletage $\{q\} \times \mathbb{T}^\ell$, $q \in V$, et que ω s'identifie à la r-forme $\sum_{j=1}^{\ell} d\theta_j \wedge \alpha_j + \Omega$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell, \Omega$ sont des formes fermées basiques avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ linéairement indépendantes presque partout. En outre, si F coupe une transversale isotrope, on peut faire l'identification de manière que $\Omega = 0$.*

D'autre part, si $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{V} \times \mathbb{T}^\ell$ est un autre difféomorphisme avec les propriétés ci-dessus, alors sur chaque composante connexe de $U \cap \tilde{U}$ on a $\tilde{\alpha}_j = \sum_{k=1}^{\ell} a_{jk}\alpha_k$ avec $(a_{jk}) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$, tandis que $\tilde{\Omega} = \Omega + \sum_{k=1}^{\ell} \beta_k \wedge \alpha_k$ où les $\beta_1, \ldots, \beta_\ell$ sont des 1-formes fermées et basiques.

Démonstration. Tout d'abord on identifie un certain voisinage ouvert U de F à un produit $V \times F$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^{m-\ell}$, contenant l'origine et muni des coordonnées $(x_1, \ldots, x_{m-\ell})$, $\mathcal{F}$ est le feuilletage donné par le second facteur et la feuille originale F devient $\{0\} \times F$. Pour chaque $(0, p) \in \{0\} \times F$, le Théorème 1 de [3] nous permet de choisir, autour de ce point, des champs de vecteurs $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_\ell \in T\mathcal{F}$ linéairement indépendants partout, tels que $i_{\tilde{X}_1}\omega, \ldots, i_{\tilde{X}_\ell}\omega$ soient basiques (il suffit de faire $\tilde{X}_j = (\partial/\partial y_j)$ dans ce théorème). Comme $\mathcal{F}$ est sans holonomie sur $V \times F$, par recollement et quitte à rapetisser V, on peut construire finalement des champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_\ell \in T\mathcal{F}$, sur $V \times F$ tout entier, linéairement indépendants en chaque point et tels que $i_{X_1}\omega, \ldots, i_{X_\ell}\omega$, soient basiques. En particulier chaque X_j est parallèle, donc $[X_j, X_k] = 0$, $j, k = 1, \ldots, \ell$.

Ainsi $X_1, \ldots, X_\ell$ définissent une action de $\mathbb{R}^\ell$ dont les orbites sont les feuilles de $\mathcal{F}$; bref F est le tore $\mathbb{T}^\ell$ et U sera identifié à $V \times \mathbb{T}^\ell$. En rétrécissant V si nécessaire, on peut trouver des fonctions $g_{jk} : V \to \mathbb{R}$, $j, k = 1, \ldots, \ell$, telles que l'action de $\mathbb{R}^\ell$ associée aux champs de vecteurs $Y_1, \ldots, Y_\ell$, définis par $Y_j(x, \theta) = \sum_{k=1}^{\ell} g_{jk}(x) X_k(x, \theta)$, ait $2\pi\mathbb{Z}^\ell$ pour sous-groupe d'isotropie. Donc un difféomorphisme de $V \times \mathbb{T}^\ell$ sur lui-même permet de supposer $Y_j = (\partial/\partial\theta_j)$, $j = 1, \ldots, \ell$. À remarquer que chaque $i_{Y_j}\omega$ est encore basique, d'où $\sum_{j=1}^{\ell} d\theta_j \wedge \alpha_j + \Omega$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ sont basiques tandis que Ω est semi-basique.

Si f est une fonction coefficient de l'expression de Ω par rapport à $dx_1, \ldots, dx_{m-\ell}$, alors chaque $(\partial f/\partial\theta_j)$ est basique car $d\omega = 0$. Or f a un maximum sur chaque feuille, donc $(\partial f/\partial\theta_j) = 0$. Bref Ω est aussi basique ; maintenant $d\omega = 0$ entraîne $d\Omega = 0$ et $d\alpha_j = 0$, puisque chaque terme $d\theta_j \wedge d\alpha_j$ ne peut être compensé autrement. Lorsque F coupe une transversale isotrope, on peut identifier U et $V \times \mathbb{T}^\ell$ de manière que celle-ci soit définie par $\theta =$ *constant* ; d'où $\Omega = 0$.

Finalement, si on a une autre identification $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \tilde{V} \times \mathbb{T}^\ell$, alors sur $U \cap \tilde{U}$ chaque $(\partial/\partial\tilde{\theta}_i) = \sum_{j=1}^{\ell} f_{ij} \cdot (\partial/\partial\theta_j)$ où les f_{ij} sont basiques car $(\partial/\partial\tilde{\theta}_i), (\partial/\partial\theta_1), \ldots, (\partial/\partial\theta_\ell)$ sont parallèles. Comme les courbes intégrales de tous ces champs de vecteurs se ferment pour $t = 2\pi$, les fonctions f_{ij} prendront des valeurs entières. Par contraction avec ω il vient $\tilde{\alpha}_i = \sum_{k=1}^{\ell} f_{ij}\alpha_j$. En outre, puisque $d\tilde{\theta}_i(\partial/\partial\tilde{\theta}_j) = \delta_{ij}$, on a $d\tilde{\theta}_i = \sum_{j=1}^{\ell} b_{ij}\, d\theta_j + \lambda_i$ où (b_{ij}) est l'inverse de la transposée de (f_{ij}) et où $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ sont fermées et basiques ; donc $\tilde{\Omega} = \Omega + \sum_{i=1}^{\ell} \beta_i \wedge \alpha_i$ où les β_i sont des combinaisons à coefficients constants des $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$. $\square$

Remarque. Il y a des feuilletages 2-isotropes sans transversales isotropes ; par exemple sur $\mathbb{T}^8$ la 4-forme $d\theta_1 \wedge d\theta_3 \wedge d\theta_4 \wedge d\theta_5 + d\theta_2 \wedge d\theta_6 \wedge d\theta_7 \wedge d\theta_8 + d\theta_3 \wedge d\theta_4 \wedge d\theta_7 \wedge d\theta_8$ et le feuilletage défini par $d\theta_k = 0$, $k = 3, \ldots, 8$. D'autre part, si F est comme dans le Théorème 1, alors au voisinage de chacun de ses points il existe une base locale $X_1, \ldots, X_\ell$ de $T\mathcal{F}$ telle que $d(i_{X_j}\omega) = 0$, $j = 1, \ldots, \ell$. Par contre si F est compacte mais à holonomie non triviale, une telle base peut ne pas exister. En effet, considérons sur $\tilde{M} = \mathbb{R}^k \times (\mathbb{R}^2 - \{0\})$, $k \geqslant 2$, muni des coordonnées $(x, y) = (x_1, \ldots, x_k, y_1, y_2)$, la forme fermée $\tilde{\omega} = dy_1 \wedge (x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2) \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_k + dy_2 \wedge (-x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2) \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_k + 2y_2\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ et le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}$, défini par $dx_1 = \cdots = dx_k = 0$, qui est 2-isotrope car chaque $i_{(\partial/\partial y_j)}\omega$ est basique. Au voisinage de chaque point de la feuille $x_1 = \cdots = x_k = 0$ il n'existe pas une telle base car sinon, sur une petite boule de $\mathbb{R}^k$ centrée à l'origine, il existerait une forme fermée, donc exacte, $\beta = f(x)(x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2) \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_k + g(x)(-x_2\, dx_1 + x_1\, dx_2) \wedge dx_3 \wedge \cdots \wedge dx_k$ avec $f(0) = 0$ et $g(0) = 1$.

Or son intégrale sur une petite sphère centrée à l'origine n'est pas nulle, *contradiction*. Maintenant il suffit de faire le quotient de $\tilde{M}$ par le groupe engendré par le difféomorphisme $\varphi(x, y) = (2x, 2^{-k}y)$, qui préserve $\tilde{\mathcal{F}}$ et $\tilde{\omega}$, et de considérer leurs projections ainsi que celle de la feuille $x_1 = \cdots = x_k = 0$.

Un sous-faisceau $\mathcal{H}(k,\ell)$, *pour la structure de* $\mathbb{Z}$*-module*, du faisceau de k-formes fermées sur une n-variété N sera appelé *un réseau entier* (*à singularités*) si, au voisinage de chaque point $p \in N$, il existe des sections $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ de $\mathcal{H}(k,\ell)$, $\mathbb{R}$-linéairement indépendantes comme k-formes presque partout, telles que toute autre section α avec le même domaine s'écrive $\alpha = \sum_{j=1}^{\ell} f_j \alpha_j$ où les fonctions f_j ne prennent que de valeurs entières ; à son tour $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ sera appelé *une base locale* (*des sections*) *de* $\mathcal{H}(k,\ell)$. Supposons maintenant que le feuilletage $\mathcal{F}$ soit donné par une fibration (surjective) en tores $\pi : M \to N$, appelée dans la suite *fibration* 2*-isotrope en tores*. Le Théorème 1, appliqué à chaque fibre, fait apparaître sur N un réseau entier $\mathcal{H}(r-1,\ell)$ engendré par les formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ de ce théorème, regardées comme $(r-1)$-formes sur un ouvert de N, c'est-à-dire comme une base locale de $\mathcal{H}(r-1,\ell)$.

Réciproquement un réseau entier $\mathcal{H}(r-1,\ell)$ provient toujours d'une telle fibration. En effet, considérons une famille des bases locales $\{(A_\lambda, \alpha_{1\lambda}, \ldots, \alpha_{\ell\lambda})\}_{\lambda \in L}$ de $\mathcal{H}(r-1,\ell)$ dont les domaines recouvrent N. Dans l'union disjointe M' des $A_\lambda \times \mathbb{T}^\ell$, $\lambda \in L$, on identifie $(x,\theta) \in A_\lambda \times \mathbb{T}^\ell$ et $(x',\theta') \in A_\mu \times \mathbb{T}^\ell$ lorsque $x = x'$ et que $\theta'_i = \sum_{j=1}^{\ell} a_{ji}\theta_j$, $i = 1, \ldots, \ell$, où $(a_{ij}) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ est définie par la relation $\alpha_{i\lambda}(x) = \sum_{j=1}^{\ell} a_{ij}\alpha_{j\mu}(x)$. Si sur $A_\lambda \times \mathbb{T}^\ell$, $\lambda \in L$, on considère la r-forme $\sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{d}\theta_j \wedge \alpha_{j\lambda}$ et la projection sur le premier facteur, par passage au quotient on obtient une fibration 2-isotrope en tores qui induit, sur N, le réseau entier $\mathcal{H}(r-1,\ell)$.

On dira que deux fibrations 2-isotropes en tores $\pi : (M,\omega) \to N$ et $\tilde{\pi} : (\tilde{M},\tilde{\omega}) \to N$ sont *isomorphes* s'il existe un difféomorphisme $\varphi : M \to \tilde{M}$ tel que $\varphi^*\tilde{\omega} = \omega$ et que $\tilde{\pi} \circ \varphi = \pi$; bien sûr elles induisent le même réseau entier sur N. Soit $\mathcal{GH}(r-1,\ell)$ le faisceau des $(r-1)$-formes fermées sur N qui, localement, s'expriment comme une combinaison fonctionnelle des sections de $\mathcal{H}(r-1,\ell)$; à remarquer que $\mathcal{H}(r-1,\ell)$ est un $\mathbb{Z}$-sous-faisceau de $\mathcal{GH}(r-1,\ell)$. Un raisonnement analogue à celui de Duistermaat dans [2] montre que l'ensemble des classes d'isomorphie des fibrations 2-isotropes en tores, qui induisent sur N le réseau entier $\mathcal{H}(r-1,\ell)$ et *dont chaque fibre possède des transversales isotropes*, est un bijection avec $H^1(\mathcal{GH}(r-1,\ell)/\mathcal{H}(r-1,\ell))$; la fibration construite ci-dessus correspond au zéro de ce groupe de cohomologie. Un exemple de cette situation est le suivant. Considérons un S^1-fibré principal $\pi : M \to N$ et une n-forme α, sur N, dont l'ensemble de zéros soit d'intérieur vide. Notons ω la $(n+1)$-forme sur M dont la contraction avec le champ fondamental de l'action de S^1 soit $\pi^*\alpha$. Alors $\pi : (M,\omega) \to N$ est 2-isotrope, toute transversale est isotrope, et le réseau entier associé $\mathcal{H}(n,1)$ est engendré par α, donc isomorphe, de façon naturelle, au faisceau constant $\mathbb{Z} \times N$. Maintenant $\mathcal{GH}(n,1)$ est fin, et $H^1(\mathcal{GH}(n,1)/\mathcal{H}(n,1))$ est isomorphe à $H^2(\mathcal{H}(n,1)) = H^2(N,\mathbb{Z})$; on retrouve ainsi la classification classique des S^1-fibrés principaux.

Considérons une application $f : N' \to N$, tel que $f_*(p)$ soit surjective pour presque tout $p \in N'$, et un réseau entier $\mathcal{H}(k,\ell)$ sur N ; si $(A, \alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ est une base locale de $\mathcal{H}(k,\ell)$, alors $(f^{-1}(A), f^*\alpha_1, \ldots, f^*\alpha_\ell)$ est une base locale d'un réseau entier $\mathcal{H}'(k,\ell)$ sur N', qu'on appellera *image réciproque de* $\mathcal{H}(k,\ell)$ *par* f. À remarquer que, par le théorème de transversalité, une telle f existe toujours lorsque $\dim N' \geqslant \dim N$. Comme sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{T}^n$ on peut construire des réseaux entiers très divers, ceci montre l'existence d'une grande quantité de réseaux entiers. En particulier, ils existent sur toute variété N pourvu que $k = 1$ et $\ell \leqslant n = \dim N$.

Pour finir on va étudier un type particulier de tels réseaux lorsque $k = 1$ et $\ell = n$. On dira que $\mathcal{H}(1,n)$ est *localement orientable* si, au voisinage de chaque point de N, il existe une base locale $(A, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et une forme de volume τ, définie aussi sur A, telles que $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n = f\tau$ où $f \geqslant 0$. Ceci est le cas, par exemple, si pour toute base locale $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$ ne s'annule pas ce qui, d'ailleurs, équivaut à se donner une structure affine entière sur N en prenant, localement, les $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ comme des différentielles des coordonnées entières. Être localement orientable impose des contraintes sur la topologie de N. On rappelle que la *catégorie* (*de Lusternik–Schnirelmann*) d'une variété compacte N est le nombre minimal, diminué d'une unité, d'ouverts contractiles dans N, nécessaires pour recouvrir cette variété. On a :

Théorème 2. *Si sur une n-variété compacte et connexe N il existe un réseau entier $\mathcal{H}(1,n)$ localement orientable, alors sa catégorie est n.*

Démonstration. Dans la construction précédente d'une fibration 2-isotrope en tores $\pi : (M,\omega) \to N$, induisant le réseau $\mathcal{H}(1,n)$, on peut prendre les $\{(A_\lambda, \alpha_{1\lambda}, \ldots, \alpha_{n\lambda})\}_{\lambda \in L}$ de façon qu'il existe une forme volume τ_λ, sur A_λ, telle que $\alpha_{1\lambda} \wedge \cdots \wedge \alpha_{n\lambda} = f_\lambda \tau_\lambda$ avec $f_\lambda \geqslant 0$. Par conséquent il existe aussi une forme volume $\tilde{\tau}_\lambda$ sur $\pi^{-1}(A_\lambda)$ telle que $\omega^n = \tilde{f_\lambda} \tilde{\tau}_\lambda$ où $\tilde{f_\lambda} \geqslant 0$. Comme localement toute forme volume est associée à une carte, on peut trouver un atlas $\mathcal{B}$ de M tel que si $(B, z_1, \ldots, z_{2n}) \in \mathcal{B}$ alors $\omega^n = g\, \mathrm{d}z_1 \wedge \cdots \wedge z_{2n}$ avec $g \geqslant 0$. Or l'ensemble de points où ω^n s'annule est d'intérieur vide, donc $\mathcal{B}$ est un atlas orienté et $[\omega^n] \neq 0$.

Soit A un ouvert de N contractile dans cette variété. Alors ω admet, sur $\pi^{-1}(A)$, une primitive ρ car la restriction de ω aux fibres est nulle. Supposons maintenant N recouverte par une famille $A_1, \ldots, A_k$ d'ouverts contractiles en N. Considérons sur chaque $\pi^{-1}(A_j)$ une primitive ρ_j de ω. Comme M est un espace normal, il existe un recouvrement ouvert $B_1, \ldots, B_k$ de M et des fonctions $\varphi_j : M \to \mathbb{R}$ tels que, pour tout $j = 1, \ldots, k$, $\bar{B}_j \subset A_j$, $\varphi_j(B_j) = 1$ et support$(\varphi_j) \subset A_j$. Ainsi chaque $\varphi_j \rho_j$ peut être prolongée en une 1-forme $\tilde{\rho}_j$ sur M. En outre $\omega - \mathrm{d}\tilde{\rho}_j = 0$ sur B_j, donc $[\omega^k] = [(\omega - \mathrm{d}\tilde{\rho}_1) \wedge \cdots \wedge (\omega - \mathrm{d}\tilde{\rho}_k)] = 0$. D'où $k \geqslant n + 1$ puisque $[\omega^n] \neq 0$. Pour finir il suffit de rappeler que la catégorie d'une variété connexe et compacte ne dépasse pas sa dimension. □

D'après le Théorème 2, une n-variété produit de sphères n'admet un réseau entier localement orientable $\mathcal{H}(1, n)$ que si elle est le tore $\mathbb{T}^n$ (seul cas où la catégorie est égale à la dimension). D'autre part, la réciproque du Théorème 2 ne se vérifie pas ; par exemple le projectif réel $\mathbb{R}P^n$, $n \geqslant 2$, dont la catégorie est n, n'admet pas un réseau entier $\mathcal{H}(1, n)$ localement orientable car, par image réciproque, il en existerait aussi un sur S^n. Lorsque N est une surface compacte et connexe autre que S^2 et $\mathbb{R}P^2$, exclus par ce qu'on vient de dire, il existe toujours une telle structure. Pour le voir dans le cas orientable il suffit de considérer une structure complexe sur N et une forme holomorphe non nulle $\beta = \alpha_1 + i\alpha_2$, et de prendre le réseau entier engendré par α_1 et α_2 ; en effet $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ n'a qu'un nombre fini de zéros, ceux de β. Une autre façon de construire un tel $\mathcal{H}(1, 2)$ est d'écrire N comme un revêtement branché de $\mathbb{T}^2$ et de faire l'image réciproque d'une structure affine entière sur $\mathbb{T}^2$; si cette dernière a une holonomie non triviale le réseau entier image réciproque ne possède pas de bases globales.

Supposons maintenant N non orientable. Alors N est le quotient d'une surface kählérienne (P, g, J) par l'action d'une isométrie anti-holomorphe $\varphi : P \to P$ telle que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. Soit λ la partie réelle d'une 1-forme holomorphe, sur P, non nulle ; alors $d(\lambda \circ J) = 0$ (où $(\tau \circ J)(X) = \tau(JX)$). Posons $\alpha_1 = \lambda \circ J$, $\alpha_2 = \lambda$ si $\varphi^*\lambda = -\lambda$, et $\alpha_1 = \lambda + \varphi^*\lambda$, $\alpha_2 = \lambda \circ J + (\varphi^*\lambda) \circ J$ lorsque $\varphi^*\lambda \neq -\lambda$. Le réseau entier $\tilde{\mathcal{H}}(1, 2)$ défini par α_1, α_2 se projette sur un réseau entier $\mathcal{H}(1, 2)$ de N car $\varphi^*\alpha_1 = \alpha_1$ et $\varphi^*\alpha_2 = -\alpha_2$; bien sûr ce dernier ne possède pas de base globale. D'autre part, l'ensemble de zéros de $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ est fini puisque λ est la partie réelle d'une 1-forme holomorphe non nulle. Ceci entraîne que $\tilde{\mathcal{H}}(1, 2)$ est localement orientable et, comme la projection de P sur N est un revêtement 2-feuillé, $\mathcal{H}(1, 2)$ le sera aussi.

Références

[1] V. Arnold, Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Mir, 1976.
[2] J.-J. Duistermaat, On global action-angle coordinates, Comm. Pure Appl. Math. 33 (1980) 687–706.
[3] F.-J. Turiel, Formes fermées et feuilletage 2-isotropes, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (1–2) (2008) 71–74.