Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 143–146

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations différentielles

Forme normale de perturbation de champs de vecteurs quasi-homogènes

Eric Lombardi [a], Laurent Stolovitch [b]

[a] *Institut de mathématiques de Toulouse, Universite Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 9, France*
[b] *CNRS, Laboratoire J.-A. Dieudonné U.M.R. 6621, Université de Nice-Sophia Antipolis, parc Valrose, 06108 Nice cedex 02, France*

Reçu le 31 juillet 2008 ; accepté après révision le 17 novembre 2008

Disponible sur Internet le 30 décembre 2008

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

Dans cette Note, nous étudions des germes de champs de vecteurs holomorphes qui sont des perturbations convenables de champs de vecteurs quasi-homogènes au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$, point fixe des champs consideré s. En particulier, nous définissions une condition « diophantienne » sur le champ quasihomogène initial S qui assure que si une telle perturbation de S est formellement conjuguée à S alors elle l'est holomorphiquement. ***Pour citer cet article : E. Lombardi, L. Stolovitch, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Normal form of perturbations of quasihomogeneous vector fields. In this Note, we study germs of holomorphic vector fields which are suitable perturbations of a quasihomogeneous vector field in a neighborhood of the origin of $\mathbb{C}^n$, fixed point of the vector fields. In particular, we define a "diophantine condition" on the quasihomogeneous initial part S which ensures that if such a perturbation of S is formally conjugate to S then it is also holomorphically conjugate to it. ***To cite this article: E. Lombardi, L. Stolovitch, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Polynômes quasi-homogènes et produit scalaire

Soit $p = (p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ qui sera fixé dans la suite, les p_i étant premiers entre eux. Soit $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n$; l'entier $\delta = (Q, p) = q_1 p_1 + \cdots + q_n p_n$ sera appelé *quasi-degré* de p-quasi-homogeneité du monôme $x^Q := x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n}$. L'espace des polynomes quasi-homogènes de degré δ sera noté $\mathcal{P}_\delta$ est engendré, sur $\mathbb{C}$, par les monômes quasi-homogènes de même quasi-degré δ. Soit $\Delta := \{\delta_1, \delta_2, \dots\}$ l'ensemble totalement ordonné des quasi-degrés de quasihomogénéité des polynômes non-nuls. On conviendra que $\mathcal{P}_k := \{0\}$ si $k \notin \Delta$. Un champ de vecteurs $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ sera dit quasi-homogène de quasi-degré $\tilde{\delta}$ si pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, X_i est quasi-homogène de quasi-degré $\delta + p_i$. L'espace de ces champs de vecteurs sera noté $\mathcal{H}_{\tilde{\delta}}$. Nous noterons $\tilde{\Delta} := \{\delta - p_i, \delta \in \Delta, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ l'ensemble

Adresses e-mail : lombardi@mip.ups-tlse.fr (E. Lombardi), stolo@unice.fr (L. Stolovitch).

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.11.013

des degrés de quasihomogénéité des champs de vecteurs non-nuls. On conviendra que $\mathcal{H}_l := \{0\}$ si $l \notin \tilde{\Delta}$. On peut écrire de manière unique, une série formelle $f \in \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ comme une somme formelle de polynômes quasi-homogènes $f = \sum_{\delta\in\Delta} f_\delta$ où $f_\delta \in \mathcal{P}_\delta$. Nous dirons que f est de *quasi-ordre* δ_0 si $f_{\delta_0} \neq 0$ et $f_\delta = 0$ pour tout $\delta < \delta_0$. Soit μ un quasi-degré. Son *μ-quasi-jet* est défini par $J^\mu(f) := \sum_{\delta\in\Delta,\, \delta\leqslant\mu} f_\delta$. De plus, si f est un germe de fonction holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^n$, $\{f\}_\mu := f_\mu$ désignera la composante quasi-homogenène de quasi-degré μ dans le développement de Taylor f en zéro. On défini le produit scalaire suivant sur l'espace des polynômes : si x^R est quasihomogène de quasi-degré $\delta = (p, R)$, on pose

$$\langle x^R, x^Q\rangle_{p,\delta} := \begin{cases} \frac{(r_1!)^{p_1}\cdots(r_n!)^{p_n}}{\delta!} & \text{si } R = Q, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous poserons $(R!)^p := (r_1!)^{p_1}\cdots(r_n!)^{p_n}$ ainsi que $|\cdot|_{p,\delta}$ la norme associée. On a

Proposition 1.1. *Soit $f = \sum_{\delta\in\Delta} f_\delta$ une série formelle où f_δ est quasi-homogenène de quasi-degré δ. Alors, f est uniformement convergente dans un voisinage de l'origine si et seulement si il existe $C > 0$ et $M > 0$ tels que $|f_\delta|_{p,\delta} \leqslant MC^\delta$.*

Dans le cas homogène $p = (1, \dots, 1)$, ce résultat est du à H. Shapiro [4, Lemma 1].

Si $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{H}_\alpha$, nous poserons $\|X\|^2_{p,\alpha} := \sum_{i=1}^n |X_i|^2_{p,\alpha+p_i}$. Les proprietés principales de ce produit scalaire résident dans la

Proposition 1.2. *Soient $f \in \mathcal{P}_a$ et $g \in \mathcal{P}_b$. Alors, $|fg|_{p,a+b} \leqslant |f|_{p,a}|g|_{p,b}$. Soit R_q une fonctionnelle q-linéaire de $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ telle que $R_q(X, \dots, X)$ soit p-quasihomogène de degré δ avec $X = (x_1, \dots, x_n)$. Soient $U_{\delta_i} \in \mathcal{H}_{\delta_i}$, $i = 1, \dots, q$. Alors, $R_q(U_{\delta_1}, \dots, U_{\delta_q})$ est p-quasihomogène de degré $\delta + \delta_1 + \dots + \delta_q$ et on a*

$$\left\| R_q(U_{\delta_1}, \dots, U_{\delta_q}) \right\|_{p,\delta+\delta_1+\dots+\delta_q} \leqslant \|R_q\|_{2,1} \|U_{\delta_1}\|_{p,\delta_1} \cdots \|U_{\delta_n}\|_{p,\delta_n}.$$

où $\|R_q\|_{2,1}$ désigne une constante ne dependant que de R_q.

Dans le cas homogène, ce résultat est dû à G. Iooss et E. Lombardi [2, Lemma A.8].

2. Forme normale d'un bonne perturbation d'un champs quasi-homogène

Soit S un champ de vecteurs p-quasihomogène de $\mathbb{C}^n$ de quasidegré s. Nous dirons qu'un germe X de champ de vecteurs holomorphe au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ est un *bonne perturbation* si $X - S$ est de quasi-ordre $> s$ à l'origine. Pour tout $\delta \in \tilde{\Delta}$, nous considérons l'opérateur de cobord $d_0 : \mathcal{H}_\delta \to \mathcal{H}_{\delta+s}$ défini par $d_0 U := [S, U]$ ainsi que l'opérateur *auto-adjoint* $\Box_\delta : \mathcal{H}_\delta \to \mathcal{H}_\delta$ défini par $\Box_\delta := d_0 d_0^*$ où d_0^* désigne l'opérateur adjoint de d_0 pour le produit scalaire défini plus haut. Il est donc diagonalisable et son spectre est réel et même positif ou nul.

Définition 2.1. Soit $\delta > s$ un entier. Nous dirons qu'un champ de vecteurs quasi-homogène $X \in \mathcal{H}_\delta$ est *résonnant ou harmonique* par rapport à S s'il appartient au noyau $\operatorname{Ker} \Box_\delta$ de $\Box_\delta$.

Proposition 2.1. *Soit X une bonne perturbation de S au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^n$. Il existe alors un difféormorphisme formel $\hat{\Phi}$ qui conjugue X à un champ de vecteurs formel $S + \hat{R}$ où $\hat{R}$ est résonnant.*

Supposons que $X = S + N + R_{>\alpha}$ où N est résonnant de quasi-degré $\leqslant \alpha$ et $R_{>\alpha}$ est de quasi-ordre $> \alpha$ avec $\alpha \geqslant s$ et $\alpha \in \tilde{\Delta}$. Montrons que l'on peut le normaliser à l'ordre $\beta \in \tilde{\Delta}$, le plus petit des $\delta \in \tilde{\Delta}$ supérieur à α. En effet, soit V un champ de vecteurs quasihomogène de quasi-degré $\beta - s$. On a $(\exp V)_*(X) := \sum_{j\geqslant 0} \frac{\mathrm{ad}_V^j(X)}{j!}$ où l'on a posé $\mathrm{ad}_V := [V, \cdot]$ et ad_V^j son j-ième itéré. On a donc $J^\beta((\exp V)_*(X)) = S + N + R_\beta + [V, S]$ où R_β désigne la composante de quasi-degré β dans le developpement de Taylor $R_{>\alpha}$.

Si $\beta - s \notin \tilde{\Delta}$, il n'a y a rien à faire. Sinon, décomposons R_β le long de l'image de $\Box_\beta$: $R_\beta = R_{\beta,0} + R_{\beta,*}$ où $R_{\beta,0}$ (resp. $R_{\beta,*}$) désigne la projection orthogonal de R_β sur le noyau (resp. l'image) of $\Box_\beta$. Il existe donc un unique $v \in \mathrm{Im}(\Box_\beta)$ tel que $R_{\beta,*} = \Box_\beta(v) = d_0 d_0^*(v)$. Ainsi, si on pose $V := d_0^* v$ alors le champ de vecteur $J^\beta((\exp V)_*(X)) - S = N + R_{\beta,0}$ est résonnant.

Si S est diagonal linéaire, on retrouve la théorie classique [1]. Un autre type de forme normale a été défini par H. Kokubu, H. Oka et D. Wang dans [3] ainsi que par G. Belitskii [6].

3. Rigidité des champs quasi-homogènes et ensembles analytiques invariants

Soit $\mathcal{I}$ un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_n$ des germes de fonctions holomorphes en 0 engendré par des polynomes p-quasi-homogènes $h_1, \dots, h_r$. On notera $\hat{\mathcal{I}}$ son completé formel. Soit $\mathcal{M}_i$ l'opérateur de multiplication par h_i (on le notera de la même façon, qu'il opère dans $\mathcal{O}_n$, $\hat{\mathcal{O}}_n$ ou l'espace des champs de vecteurs formels $\hat{\mathcal{X}}_n$). Posons $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1\mathcal{X}_n + \cdots + \mathcal{M}_r\mathcal{X}_n$ (resp. $\widehat{\mathcal{M}}$) l'espace des champs de vecteurs (resp. formels) dont les composantes appartiennent à l'idéal $\mathcal{I}$ (resp. $\hat{\mathcal{I}}$). Soit $\delta \in \tilde{\Delta}$ et posons $\mathcal{M}_\delta := \mathcal{M} \cap \mathcal{H}_\delta$. Soit V_δ l'orthogonal à $\mathcal{M}_\delta$ dans $\mathcal{H}_\delta$; soit π la projection orthogonal sur V_δ. Posons $\hat{V} := \bigoplus_{\delta\in\tilde{\Delta}} V_\delta$ et $\widehat{W} := \{U \in (\mathrm{Ker}\, d_0)^\perp \mid [S, U] \in \hat{V}\}$. Soit $\delta \in \tilde{\Delta}$ tel que $\delta > s$. Désignons par $\sigma_{\delta,\setminus\mathcal{I}}$ l'ensemble des valeurs propres non-nulles de $\Box_\delta$ qui sont associées à un vecteur propre (quasi-homogènes de degré δ) orthogonal à $\mathcal{M}_\delta$. Posons $\bar{p} := \max_{1\leqslant i\leqslant n} p_i$, $\underline{p} := \min_{1\leqslant i\leqslant n} p_i$ et

$$a_\delta := \min_{\lambda\in\sigma_{\delta,\setminus\mathcal{I}}} \sqrt{\lambda}, \quad \delta_* := \frac{\min\{\delta + p_i \mid \delta + p_i \in \Delta\}}{\bar{p}} \quad \text{et} \quad \delta^* := \frac{\max\{\delta + p_i \mid \delta + p_i \in \Delta\}}{\underline{p}}.$$

En outre, on posera $\tilde{\Delta}^- := \tilde{\Delta} \cap (\tilde{\Delta} - s)$, $\tilde{\Delta}^+ := \tilde{\Delta} \cap (\tilde{\Delta} + s)$. Soit $\delta_0 := \max(\min_{\delta\in\tilde{\Delta}^-} \delta, 1)$ le plus petit entier strictement positif de $\tilde{\Delta}^-$. Soit $\{\eta_\delta\}_{\delta\in\tilde{\Delta}^-\cap\mathbb{N}^*\cup\{0\}}$ la suite de réels positifs définie comme suit : $\eta_0 = 1$; si $\delta \in \tilde{\Delta}^-$, $\delta \geqslant \delta_0$,

$$a_{s+\delta}\eta_\delta = \max_{s\leqslant\mu\leqslant s+\delta,\, \mu\in\tilde{\Delta}} \ \overset{*}{\max_{\substack{\delta_1+\cdots+\delta_r+\mu=s+\delta \\ \mu_*\leqslant r\leqslant\mu^*}}} \eta_{\delta_1}\cdots\eta_{\delta_r},$$

où lorsque $\mu = s$, le maximum est pris sur l'ensemble des vecteurs $(\delta_1, \dots, \delta_r)$ d'entiers naturels dont au moins deux des cordonnées sont positives. De plus, le maximum est pris pour des indices δ_i (resp. μ) appartenant à $\tilde{\Delta}^- \cap \mathbb{N}^* \cup \{0\}$ (resp. $\tilde{\Delta}$).

Définition 3.1. Un champ de vecteurs quasi-homogène S sera dit *diophantien* relativement à $\mathcal{I}$ s'il existe des constantes $c, M > 0$ telles que $\eta_\delta \leqslant Mc^\delta$.

Lorsque $S = \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ et $\mathcal{I} = \{0\}$, la définition précédente est équivalante à la condition de Brjuno [5].

Définition 3.2. Soient S un champ de vecteurs quasi-homogène et X une bonne perturbation holomorphe de S l'origine. Nous dirons que X est formellement (resp. holomorphiquement) conjugué à S le long $\hat{\mathcal{I}}$ (resp. $\mathcal{I}$) s'il existe un (resp. germe en l'orgine de) difféomorphisme formel (resp. holomorphe) $\hat{\Phi}$ (resp. Φ) tel que $\hat{\Phi}_* X - S \in \widehat{\mathcal{M}}$ (resp. $\Phi_* X - S \in \mathcal{M}$).

Théorème 3.1. *Supposons que le champ de vecteurs quasi-homogène S soit diophantien relativement à $\mathcal{I}$. Soit X une bonne perturbation holomorphe de S l'origine de $\mathbb{C}^n$. On suppose que X est formellement conjugué à S le long $\hat{\mathcal{I}}$ (par le biais d'un difféomorphisme formel de la forme* $\mathrm{Id} + U$ *avec $U \in \widehat{W}$). Alors, X est holomorphiquement conjugué à S le long de $\mathcal{I}$.*

Corollaire 3.1. *Sous les hypothèses du théorème, il existe un bon système de coordonnées holomorphes dans lequel le germe d'ensemble analytique $\Sigma := \{x \in \mathbb{C}^n,\ h_1(x) = \cdots = h_r(x) = 0\}$ à l'origine est un ensemble analytique invariant pour X. De plus, dans ces coordonnées, la restriction X à Σ est égale à la restriction de S à Σ.*

Théorème 3.2. *Supposons que le champ de vecteurs quasi-homogène S soit diophantien. Soit X une bonne perturbation holomorphe de S à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Supposons que X soit formellement conjugué à S, alors X est holomorphiquement conjugué à S.*

Ces résultats ont été obtenus par L. Stolovitch lorsque S est un champ de vecteurs linéaire diagonal [5].

Nous esquissons la preuve du Théorème 3.1. Conjuguons $X = S + R$ à $X' := \hat{\Phi}_* X = S + R'$ par le biais du difféomorphisme $\hat{\Phi}^{-1} = \mathrm{Id} + U$ où $U \in \hat{V}$ est un champ de vecteurs de quasi-ordre positif δ. Nous obtenons

$$R' + [S, U] = R(\mathrm{Id} + U) - DU \cdot R' + S(\mathrm{Id} + U) - S - DS \cdot U. \tag{1}$$

Projettons cette équation sur l'orthogonal à $\widehat{\mathcal{M}}$. Par hypothèse, $R' \in \widehat{\mathcal{M}}$ donc $\pi([S, U]) = \pi(R(\mathrm{Id} + U) + S(\mathrm{Id} + U) - S - DS \cdot U)$. Ensuite, nous considérons sa partie quasi-homogène de quasi-degré $s + \delta$. Posons $\tilde{\Delta}^- := \tilde{\Delta} \cap (\tilde{\Delta} - s)$. En utilisant la multiplicativité de la norme ainsi que le fait que $U \in \widehat{W}$, pour tout $\delta \in \tilde{\Delta}^- \cap \mathbb{N}^*$, nous montrons alors l'inégalité

$$\begin{aligned}\Big(\min_{\lambda \in \sigma_{s+\delta,\setminus \mathcal{I}}} |\sqrt{\lambda}|\Big) \|U_\delta\|_{p,\delta} \leqslant{}& \sum_{\mu > s}^{s+\delta} \sum_{r=\mu_*}^{\mu^*} \sum_{\delta_1 + \cdots + \delta_r + \mu = s + \delta} \frac{M}{\rho^r} \|U_{\delta_1}\|_{p,\delta_1} \cdots \|U_{\delta_r}\|_{p,\delta_r} \\ &+ M \sum_{s_* \leqslant r \leqslant s^*} \sum_{\substack{\delta_1 + \cdots + \delta_r = \delta \\ (\delta_1, \cdots, \delta_r) \in \Omega_r}} \|U_{\delta_1}\|_{p,\delta_1} \cdots \|U_{\delta_r}\|_{p,\delta_r},\end{aligned} \tag{2}$$

où, dans la permière somme, les $\delta_i \in \tilde{\Delta}^-$ sont positifs ou nuls, $\mu \in \tilde{\Delta}$ et $\Omega_r = \{(\delta_1, \ldots, \delta_r) \in (\tilde{\Delta}^-)^r /$ deux des coordonnées, au moins, sont positive$\}$. Ici, M (resp. ρ) est un constante qui ne dépend que de S (resp. de la perturbation). On construit alors une série d'une variable $\sum_{\delta \geqslant 0,\, \delta \in \tilde{\Delta}^- \cap \mathbb{N}^* \cup \{0\}} \sigma_\delta t^\delta$ qui est solution d'une équation fonctionnelle, dont on montre qu'elle admet une unique solution holomorphe au voisinage de 0 passant par σ_0 à $t = 0$. On montre alors que σ vérifie la majoration suivante :

Lemme 3.1. *Pour tout $\delta \in \tilde{\Delta}^- \cap \mathbb{N}^* \cup \{0\}$, on a $\|U_\delta\|_{p,\delta} \leqslant \eta_\delta \sigma_\delta$.*

L'hypothèse sur les « petits diviseurs de S » et la Proposition 1.1 permettent alors de conclure.

4. Normalisation Gevrey

Théorème 4.1. *Supposons qu'il existe $c \geqslant 0$ et $\tau > 0$ tel que pour tout $\delta \in \tilde{\Delta}$ avec $\delta > s$, on ait $c(\delta - s)^{-\tau} \leqslant a_\delta$. Alors, toute bonne perturbation analytique de S admet une transformation normalisante formelle (transformant X en une forme normale formelle) qui est Gevrey $\bar{p}(\frac{a}{\delta_0} + \tau)$ où $a = \max(1, [(\bar{p} + 1)/2])$.*

On en déduit un résultat d'approximation exponentiellement petite de la forme normale partielle par la conjuguée partielle du champ.

Références

[1] V.I. Arnold, Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, Mir, 1980.

[2] G. Iooss, E. Lombardi, Polynomial normal forms with exponentially small remainder for analytic vector fields, J. Differential Equations 212 (1) (2005) 1–61.

[3] H. Kokubu, H. Oka, D. Wang, Linear grading function and further reduction of normal forms, J. Differential Equations 132 (2) (1996) 293–318.

[4] H.S. Shapiro, An algebraic theorem of E. Fischer, and the holomorphic Goursat problem, Bull. London Math. Soc. 21 (6) (1989) 513–537.

[5] L. Stolovitch, Sur un théorème de Dulac, Ann. Inst. Fourier 44 (5) (1994) 1397–1433.

[6] G.R. Belitskii, Invariant normal forms of formal series, Funct. Anal. Appl. 13 (1) (1979) 46–47.