Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 463–466

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Logique/Combinatoire

Les graphes critiquement sans duo

Youssef Boudabbous [a], Abdeljelil Salhi [b]

[a] Faculté des sciences de Sfax, BP 802, 3018 Sfax, Tunisie
[b] Faculté des sciences de Gafsa, 2112 Gafsa, Tunisie

Reçu le 13 février 2009 ; accepté après révision le 17 février 2009

Disponible sur Internet le 2 avril 2009

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Soit $G = (S, A)$ un graphe (orienté). Le graphe G est un tournoi si pour $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$. À chaque partie X de S est associé le sous-graphe $G[X] = (X, (X \times X) \cap A)$ de G induit par X. Une partie I de S est un intervalle de G si pour tous $a, b \in I$ et $x \in S \setminus I$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$ et $(x, a) \in A$ si et seulement si $(x, b) \in A$. Un duo de G est un intervalle de G à deux éléments. Le graphe G est critiquement sans duo s'il est sans duo et si pour tout $x \in S$, le sous-graphe $G[S \setminus \{x\}]$ admet au moins un duo. Suite à l'étude des tournois acycliques, faite par J.F. Culus et B. Jouve en 2005, nous donnons, dans cette Note, une description morphologique complète des graphes critiquement sans duo. ***Pour citer cet article : Y. Boudabbous, A. Salhi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Graphs critically without duo. Let $G = (V, A)$ be a digraph. G is a tournament if for $x, y \in V$, $(x, y) \in A$ if and only if $(y, x) \notin A$. The induced subgraph of G by a subset X of V is denoted by $G[X]$. A subset I of V is an interval of G provided that for any $a, b \in I$ and $x \in V \setminus I$, $(a, x) \in A$ if and only if $(b, x) \in A$, and $(x, a) \in A$ if and only if $(x, b) \in A$. An interval of G on 2 elements is called duo of G. G is called critically without duo if it is without duo and for all $x \in V$, the subgraph $G[V \setminus \{x\}]$ has at least one duo. Following the study of acyclic tournaments made by J.F. Culus and B. Jouve in 2005, we give, in this Note, a complete morphologic description of critically without duo graphs. ***To cite this article: Y. Boudabbous, A. Salhi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

1.1. Généralités

Un *graphe orienté* (ou tout simplement un graphe) est un couple $G = (S, A)$ dans lequel S est un ensemble fini appelé *ensemble de sommets* de G et A est un ensemble de couples d'éléments distincts de S, appelé ensemble des *arcs* de G.

Adresses e-mail : youssef_boudabbous@yahoo.fr (Y. Boudabbous), salhi_abdeljelil@yahoo.fr (A. Salhi).

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2009.03.008

Soit $G = (S, A)$ un graphe. À chaque partie X de S est associé le sous-graphe $G[X] = (X, (X \times X) \cap A)$ de G induit par X. Soit X (resp. x) une partie (resp. un élément) de S, le sous-graphe $G[S \setminus X]$ (resp. $G[S \setminus \{x\}]$) est noté $G - X$ (resp. $G - x$). Le *dual* (resp. le complémentaire) de G est le graphe $G^\star = (S, A^\star)$ (resp. $\overline{G} = (S, \overline{A})$) où, $A^\star = \{(x, y) \in S \times S\colon (y, x) \in A\}$ (resp. $\overline{A} = \{(x, y) \in S \times S\colon x \neq y \text{ et } (x, y) \notin A\}$).

1.2. Tournoi, graphe symétrique, ordre partiel

Soit $G = (S, A)$ un graphe. Le graphe G est un *tournoi* si $G^\star = \overline{G}$. Par exemple, pour tout entier $n \geqslant 1$, le graphe $T_{2n+1} = (\{0, \ldots, 2n\}, \{(i, j);\ j - i \in \{1, \ldots, n\} \text{ modulo } 2n + 1\})$ est un tournoi. Le graphe G est un *ordre partiel* lorsque pour tous éléments x, y, z de S, si $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A$, alors $(x, z) \in A$. Par exemple, le graphe $N = (\{0, 1, 2, 3\}, \{(0, 1), (0, 3), (2, 3)\})$ est un ordre partiel. Le graphe G est *symétrique* si $G^\star = G$. Par exemple, le graphe $P_4 = (\{0, 1, 2, 3\}, \{(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\})$ est un graphe symétrique.

Soit $G = (S, A)$ un graphe symétrique. Une partie non vide X de S est une *composante connexe* de G lorsque pour tous $x \in X$ et $y \in S \setminus X$, $(x, y) \notin A$ et pour tous $x \neq y \in X$, il existe une suite $x_0 = x, \ldots, x_n = y$ d'éléments de X telle que pour $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$. Pour $x \in S$, on note $V_G(x) = \{y \in S;\ (x, y) \in A\}$, et on appelle degré de x dans G, l'entier $d_G(x) = |V_G(x)|$. Un sommet de G de degré 0 est dit, sommet *isolé* de G.

1.3. Graphes indécomposables, graphes sans duo, graphes critiquement sans duo

Soit $G = (S, A)$ un graphe. La notion suivante *d'intervalle* a été introduite par R. Fraïssé [4]. Une partie I de S est un intervalle de G si pour tous $a, b \in I$ et $x \in S \setminus I$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$ et $(x, a) \in A$ si et seulement si $(x, b) \in A$. Par exemple $\emptyset$, S et $\{x\}$, où $x \in S$, sont des intervalles de G appelés *intervalles triviaux*. Le graphe G est *indécomposable* [4,5] si tous ses intervalles sont triviaux ; sinon, il est *décomposable*. Par exemple, les deux graphes $A_1 = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2)\})$ et $A_2 = (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 1)\})$ sont indécomposables. On appelle *3-consécutivité* (resp. *drapeau*) tout graphe isomorphe à A_1 ou à $\overline{A_1}$ (resp. isomorphe à A_2 ou à A_2^*). Pour les graphes à 3 sommets, le lemme suivant est facile à vérifier :

Lemme 1.1. *Un graphe à 3 sommets est indécomposable si et seulement s'il est un drapeau ou une 3-consécutivité ou est isomorphe à T_3.*

Le graphe G est dit *critiquement indécomposable* s'il est indécomposable et si pour tout $x \in S$, le sous-graphe $G - x$ est décomposable. Rappelons qu'en 1993, J.H. Schmerl et W.T. Trotter [6] ont déterminé les graphes critiquement indécomposables. Ceux ayant quatre sommets sont donnés par le lemme suivant :

Lemme 1.2. *[6] À un isomorphisme près, les graphes critiquement indécomposables à 4 sommets sont N, $\overline{N}$ et P_4.*

Soit $G = (S, A)$ un graphe ayant au moins un sommet. Une partie P de l'ensemble des parties de S est une *partition intervallaire* de G lorsque P est une partition de S dont les éléments sont des intervalles de G.

La notion suivante de *duo* a été introduite et utilisée en psychologie sociale en 2008, par J.L. Beauvois et G. Lopez [1]. Un *duo* d'un graphe G est un intervalle de G à deux éléments.

Un graphe $G = (S, A)$, ayant au moins un sommet, est *critiquement sans duo* s'il est sans duo et si pour tout $x \in S$, le sous-graphe $G - x$ admet au moins un duo. Ainsi, un tel graphe a au moins 3 sommets.

Partant d'une étude faite en 2005 par J.F. Culus et B. Jouve [3], nous dégageons la notion de duo d'un graphe. Après avoir remarqué que le résultat de [3] pouvait se traduire par la caractérisation des tournois critiquement sans duo, nous généralisons dans cette Note l'étude aux graphes en donnant une description morphologique complète des graphes critiquement sans duo.

Théorème 1.3. *Étant donné un graphe G, G est critiquement sans duo si et seulement si G admet une partition intervallaire P telle que pour tout $X \in P$, $G[X]$ est un drapeau ou une 3-consécutivité ou est isomorphe à P_4, N, $\overline{N}$ ou à un certain T_{2h+1} avec $h \geqslant 1$.*

De ce théorème découle directement les deux résultats suivants dont le premier est celui obtenu dans [3] :

Corollaire 1.4. *[3] Étant donné un tournoi T, T est critiquement sans duo si et seulement si T admet une partition intervallaire P telle que pour tout $X \in P$, $T[X]$ est isomorphe à un certain T_{2h+1} avec $h \geqslant 1$.*

Corollaire 1.5. *Étant donné un graphe indécomposable G, G est critiquement sans duo si et seulement si G est un drapeau ou une 3-consécutivité ou est isomorphe à P_4, N, $\overline{N}$ ou à un certain T_{2h+1} avec $h \geqslant 1$.*

2. Preuve du Théorème 1.3

La condition suffisante du Théorème 1.3 est facilement vérifiée à l'aide des deux remarques suivantes :

Remarque 1. Pour tout entier $h \geqslant 1$, le tournoi T_{2h+1} est, à la fois, critiquement indécomposable et critiquement sans duo. Par ailleurs, un graphe à 3 (resp. 4) sommets est critiquement sans duo si et seulement s'il est indécomposable (resp. critiquement indécomposable).

Remarque 2. Si G est un graphe admettant une partition intervallaire P telle que pour tout X élément de P, le sous-graphe $G[X]$ est indécomposable et critiquement sans duo, alors G est critiquement sans duo.

Dans toute la suite, on se donne un graphe critiquement sans duo $G = (S, A)$ et pour tout $x \in S$, on note $I_x = \{i_x, j_x\}$ un duo de $G - x$. On considère le graphe symétrique $D(G)$ défini sur S comme suit : pour tous $x \neq y \in S$, (x, y) est un arc de $D(G)$ si et seulement si $G - \{x, y\}$ est sans duo. En utilisant les Lemmes 1.1 et 1.2, la condition nécessaire du Théorème 1.3 découle du lemme et des deux propositions qui suivent.

Lemme 2.1. *Pour tout sommet x non isolé de $D(G)$, $d_{D(G)}(x) = 2$ et $V_{D(G)}(x)$ est l'unique duo de $G - x$.*

En adaptant les preuves des propositions 11 et 18 de [2], nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 2.2. *Si C est une composante connexe de $D(G)$ telle que $|C| \geqslant 2$, alors C est un intervalle de G et $G[C]$ est un drapeau ou une 3-consécutivité ou est isomorphe à un certain T_{2h+1} avec $h \geqslant 1$.*

Ensuite, nous établissons la proposition suivante pour les sommets isolés du graphe $D(G)$:

Proposition 2.3. *L'ensemble des sommets isolés de $D(G)$ admet une partition $(I_i)_{i \in I}$ telle que pour tout $i \in I$, I_i est un intervalle de G de cardinal égal à 4 et $G[I_i]$ est un graphe critiquement indécomposable.*

Pour la preuve de cette proposition nous montrons les deux lemmes suivants :

Lemme 2.4.

1) *Pour tout $x \in S$, $I_{i_x} \cap \{x, j_x\} \neq \emptyset$ et $I_{j_x} \cap \{x, i_x\} \neq \emptyset$.*
2) *Soient un sommet x isolé de $D(G)$ et $a \in S \backslash (I_x \cup \{x\})$. Si $I_x \cup \{a\}$ est un intervalle de $G - x$, alors l'une des deux assertions suivantes est vérifiée* :
   (i) *$I_{i_x} = \{a, x\}$, $I_{j_x} = \{a, i_x\}$ et $I_a = \{x, j_x\}$.*
   (ii) *$I_{i_x} = \{a, j_x\}$, $I_{j_x} = \{a, x\}$ et $I_a = \{x, i_x\}$.*

Lemme 2.5. *Pour tout sommet x isolé de $D(G)$, les assertions suivantes sont vérifiées* :

(i) *Le sous-graphe $G - x$ admet un unique duo I_x.*
(ii) *Il existe un élément a de $S \backslash (I_x \cup \{x\})$ tel que $I_x \cup \{a\}$ est un intervalle de $G - x$.*
(iii) *$I_x \cup \{a, x\}$ est un intervalle de G formé de sommets isolés de $D(G)$.*
(iv) *$G[I_x \cup \{a, x\}]$ est isomorphe à P_4, N ou $\overline{N}$.*

Références

[1] J.L. Beauvois, G. Lopez, Un opérateur de densification d'un graphe. Le graphe des parentés, Soumis, 2008.

[2] Y. Boudabbous, P. Ille, Indecomposability graph and critical vertices of an indecomposable graph, Discrete Math. (2008), in press.

[3] J.F. Culus, B. Jouve, Tournois sans intervalle acyclique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 465–468.

[4] R. Fraïssé, Abritement entre relations et spécialement entre chaînes, Symposi. Math., Instituto Nazionale di Alta Matematica 5 (1970) 203–251.

[5] P. Ille, Indecomposable graphs, Discrete Math. 173 (1997) 71–78.

[6] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tounaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191–205.