Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 841–844

Comptes Rendus Mathematique

Logique/Combinatoire

Isomorphie héréditaire et {−4}-hypomorphie pour les tournois

Youssef Boudabbous

Faculté des sciences de Sfax, BP 802, 3018 Sfax, Tunisie

Reçu le 14 mai 2009 ; accepté après révision le 23 mai 2009

Disponible sur Internet le 2 juillet 2009

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, pour toute partie X de S, le sous-tournoi de T induit par X est noté $T[X]$. Nous montrons : Étant donnés deux tournois T et T' de même ensemble de sommets S à $n \geqslant 10$ éléments, si pour toute partie X à $n - 4$ éléments de S, les sous-tournois $T[X]$ et $T'[X]$ sont isomorphes, alors pour toute partie Y de S, les sous-tournois $T[Y]$ et $T'[Y]$ sont isomorphes. Il en découle un corollaire analogue pour les parties à $n - 5$ éléments. ***Pour citer cet article : Y. Boudabbous, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Hereditary isomorphy and {−4}-hypomorphy for tournaments. Given a tournament $T = (V, A)$, for every subset X of V the subtournament of T induced by X is denoted $T[X]$. We prove: Given two tournaments T and T' on the same vertex set V with $n \geqslant 10$ elements, if for each subset X with $n - 4$ elements of V, the subtournaments $T[X]$ and $T'[X]$ are isomorphic, then for every subset Y of V, the subtournaments $T[Y]$ and $T'[Y]$ are isomorphic. An analogous corollary for the subsets with $n - 5$ elements is deduced. ***To cite this article: Y. Boudabbous, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction et présentation du résultat

Un *tournoi* (*fini*) T est un couple (S, A) où S est un ensemble fini appelé ensemble des *sommets* de T, et A est un ensemble de couples d'éléments distincts de S, appelé ensemble des *arcs* de T, vérifiant : pour tous $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$.

Soit $T = (S, A)$ un tournoi. À chaque partie X de S est associé le *sous-tournoi* $T[X] = (X, A \cap (X \times X))$ de T *induit* par X. Le *dual* de T est le tournoi $T^\star = (S, A^\star)$ où $A^\star = \{(x, y)\colon\ (y, x) \in A\}$. Le tournoi T est *transitif* (ou est un *ordre total*) lorsque pour tous $x, y, z \in S$, si $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A$, alors $(x, z) \in A$. Un *isomorphisme* de T sur un tournoi $T' = (S', A')$ est une bijection f de S sur S' telle que pour $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que les tournois T et T' sont *isomorphes*.

Considérons deux tournois T et T' de même ensemble S de sommets et un entier naturel $k < |S|$. La notion suivante d' « isomorphie héréditaire » a été introduite par K.B. Reid et C. Thomassen dans [14]. Les tournois T et T'

Adresse e-mail : youssef_boudabbous@yahoo.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.06.002

sont *héréditairement isomorphes* si pour toute partie X de S, les sous-tournois $T[X]$ et $T'[X]$ sont isomorphes. Par ailleurs, T et T' sont $(\leqslant k)$-*hypomorphes* (resp. $\{-k\}$-*hypomorphes*) lorsque pour toute partie X de S ayant au plus k (resp. ayant k) éléments, les sous-tournois $T[X]$ et $T'[X]$ (resp. $T[S \setminus X]$ et $T'[S \setminus X]$) sont isomorphes.

Suite au problème de la $(\leqslant k)$-reconstructibilité posé par R. Fraïssé [6], G. Lopez [8,9] a obtenu en 1972 le résultat suivant :

Théorème 1.1. *(Voir [8,9].) Deux tournois* $(\leqslant 6)$*-hypomorphes d'au moins* 7 *sommets sont isomorphes.*

De ce théorème découle directement le corollaire suivant :

Corollaire 1.2. *(Voir [8,9].) Deux tournois* $(\leqslant 6)$*-hypomorphes d'au moins* 7 *sommets sont héréditairement isomorphes.*

Ensuite, suite au problème de la $\{-k\}$-reconstructibilité posé par M. Pouzet [1,2], G. Lopez et C. Rauzy [10,11] ont établi le résultat suivant :

Théorème 1.3. *(Voir [10,11].) Deux tournois* $\{-4\}$*-hypomorphes d'au moins* 10 *sommets sont isomorphes.*

Remarque 1. La preuve de ce théorème n'utilise pas la $(\leqslant 6)$-hypomorphie et donc ne l'établit pas. Elle suit une tout autre voie.

À l'aide d'une conséquence du lemme combinatoire de Pouzet (Corollaire 2.4), le Corollaire 1.2 donne directement le résultat suivant :

Corollaire 1.4. *Pour tout entier* $k \geqslant 6$*, deux tournois* $\{-k\}$*-hypomorphes d'au moins* $k+6$ *sommets sont héréditairement isomorphes.*

Dans cette Note, nous améliorons le Théorème 1.3 en étendant le Corollaire 1.4 par :

Théorème 1.5. *Deux tournois* $\{-4\}$*-hypomorphes d'au moins* 10 *sommets sont héréditairement isomorphes.*

Corollaire 1.6. *Deux tournois* $\{-5\}$*-hypomorphes d'au moins* 11 *sommets sont héréditairement isomorphes.*

Ce corollaire se déduit facilement du Théorème 1.5.

2. Préliminaires

Considérons un tournoi $T = (S, A)$. Une partie I de S est un *intervalle* de T si pour tous $a, b \in I$ et $x \in S \setminus I$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$. Par exemple, $\emptyset$, S et les singletons $\{x\}$, où $x \in S$, sont des intervalles de T appelés intervalles *triviaux*. Un tournoi est *indécomposable* si tous ses intervalles sont triviaux. Une partie X de S est un *intervalle fort* de T si X est un intervalle de T et si pour tout intervalle Y de T, si $X \cap Y \neq \emptyset$, alors $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$. Une partie $\mathcal{P}$ de l'ensemble des parties de S est une *partition intervallaire* de T lorsque $\mathcal{P}$ est une partition de S dont les éléments sont des intervalles de T. À une telle partition est associé le *tournoi quotient* $T/\mathcal{P} = (\mathcal{P}, A/\mathcal{P})$ de T par $\mathcal{P}$ défini comme suit : pour tous $X, Y \in \mathcal{P}$ avec $X \neq Y$, $(X, Y) \in A/\mathcal{P}$ si pour tout $x \in X$ et tout $y \in Y$, $(x, y) \in A$. Lorsque $|S| \geqslant 2$, nous notons $\mathcal{P}(T)$ la famille des intervalles forts de T distincts de S et maximaux pour l'inclusion. $\mathcal{P}(T)$ est une partition intervallaire de T, dite *partition de Gallai* de T. Le théorème de décomposition de Gallai pour les tournois s'énonce comme suit.

Théorème 2.1. *(Voir [5,7].) Étant donné un tournoi* T *d'au moins deux sommets, une seule des deux situations suivantes est satisfaite* :

(i) $|\mathcal{P}(T)| \geqslant 3$ *et* $T/\mathcal{P}(T)$ *est indécomposable* (*dans ce cas,* T *est dit fortement connexe*).
(ii) $T/\mathcal{P}(T)$ *est un ordre total* (*dans ce cas,* T *est dit non fortement connexe*).

Le résultat suivant obtenu par A. Boussaïri, G. Lopez, S. Thomassé et P. Ille [5] joue un rôle important dans cette Note :

Proposition 2.2. *(Voir [5].) Étant donnés deux tournois* $(\leqslant 3)$*-hypomorphes* T *et* T', $\mathcal{P}(T) = \mathcal{P}(T')$. *Si en plus* T *est fortement connexe, alors* T' *est fortement connexe et les quotients* $T'/\mathcal{P}(T)$ *et* $T/\mathcal{P}(T)$ *sont égaux ou duaux l'un de l'autre.*

Remarque 2. À chaque tournoi non fortement connexe T d'au moins 2 sommets, associons aussi la partition intervallaire $\widetilde{\mathcal{P}}(T)$ de T définie comme suit : ($X \in \widetilde{\mathcal{P}}(T)$) si et seulement si ($X \in \mathcal{P}(T)$ et $|X| \geqslant 2$) ou (X est une réunion maximale de sommets consécutifs de l'ordre total $T/\mathcal{P}(T)$ qui sont des singletons).

Le lemme suivant se prouve facilement à l'aide de la Proposition 2.2 et de la caractérisation des « classes de différence » sous l'hypothèse de la $(\leqslant 4)$-hypomorphie, obtenue par G. Lopez et C. Rauzy [10] :

Lemme 2.3. *Soient* T *et* T' *deux tournois* $(\leqslant 4)$*-hypomorphes d'au moins* 6 *sommets.*

(i) T *et* T' *sont* $(\leqslant 5)$*-hypomorphes.*
(ii) *Si* T *est non fortement connexe, alors* $\widetilde{\mathcal{P}}(T) = \widetilde{\mathcal{P}}(T')$ *et* $T'/\widetilde{\mathcal{P}}(T) = T/\widetilde{\mathcal{P}}(T)$.

Rappelons enfin, la conséquence suivante du lemme combinatoire de Pouzet qui joue un rôle essentiel dans notre preuve :

Corollaire 2.4. *(Voir [12,13].) Soient* n, p, h *des entiers tels que* $0 \leqslant p < n$ *et* $0 \leqslant h \leqslant n - p$, H *un tournoi à* h *sommets et* T *et* T' *deux tournois* $\{-p\}$*-hypomorphes de même ensemble de sommets* S *à* n *éléments. Alors, pour toute partie* X *de* S *à au plus* p *éléments, le nombre de partie* F *de* S *contenant* X *telle que* $T[F]$ *est isomorphe à* H, *est égal au nombre de partie* F *de* S *contenant* X *telle que* $T'[F]$ *est isomorphe à* H. *En particulier, si* $n \geqslant 2p$, *alors* T *et* T' *sont* $(\leqslant p)$*-hypomorphes.*

3. Preuve du Théorème 1.5

Pour la preuve du Théorème 1.5, nous procédons par récurrence sur le nombre de sommets n des tournois. En utilisant le Corollaire 2.4, le Lemme 2.3, puis le Corollaire 1.2, on obtient le résultat lorsque $n = 10$. Considérons maintenant deux tournois $\{-4\}$-hypomorphes T et T' à $n \geqslant 11$ sommets et supposons que le résultat est vrai lorsque le nombre p de sommets vérifie : $10 \leqslant p < n$. Comme $n \geqslant 11$, d'après le Corollaire 2.4 et le Lemme 2.3, T et T' sont $(\leqslant 5)$-hypomorphes. Il ne nous reste plus qu'à prouver leur 6-hypomorphie. Ceci entraînera l'isomorphie héréditaire d'après le Corollaire 1.2. Nous distinguons deux cas, suivant la forte-connexité de T :

Proposition 3.1. *Si* T *est fortement connexe, alors* T *et* T' *sont* 6*-hypomorphes.*

Pour la preuve de cette proposition, supposons que T est fortement connexe. D'après la Proposition 2.2, T' est fortement connexe, les partitions de Gallai $\mathcal{P}(T)$ et $\mathcal{P}(T')$ sont égales et les quotients de T et T' par $\mathcal{P}(T)$ sont égaux ou duaux. Si ces quotients sont duaux, on conclut facilement en utilisant l'étude de [4]. Supposons donc que $T'/\mathcal{P}(T) = T/\mathcal{P}(T)$. À l'aide de l'hypothèse de récurrence, les trois lemmes suivants montrent alors que T et T' sont 6-hypomorphes :

Lemme 3.2. *Pour tout* $X \in \mathcal{P}(T)$ *tel que* $|X| \geqslant 5$, $T'[X]$ *et* $T[X]$ *sont isomorphes et* $\{-4\}$*-hypomorphes.*

Lemme 3.3. *Pour tout* $X \in \mathcal{P}(T)$ *tel que* $|X| \in \{7, 8, 9\}$, $T'[X]$ *et* $T[X]$ *sont* 6*-hypomorphes.*

La preuve de ces lemmes repose sur le Corollaire 2.4 et le lemme suivant qui découle directement d'un résultat de [3] :

Lemme 3.4. *Considérons deux tournois isomorphes R et R' ayant un même ensemble de sommets et admettant une partition intervallaire commune $\mathcal{Q}$ telle que les quotients $R/\mathcal{Q}$ et $R'/\mathcal{Q}$ sont égaux. Étant donné $X \in \mathcal{Q}$, si pour tout $Y \in \mathcal{Q} \setminus \{X\}$, $R'[Y]$ et $R[Y]$ sont isomorphes, alors $R'[X]$ et $R[X]$ sont aussi isomorphes.*

Proposition 3.5. *Si T est non fortement connexe, alors T et T' sont 6-hypomorphes.*

La preuve de cette proposition utilise le Lemme 2.3 et le lemme suivant dont la preuve est facile :

Lemme 3.6. *Considérons deux tournois R et R' ayant un même ensemble de sommets et admettant une partition intervallaire commune $\mathcal{Q}$ telle que les quotients $R/\mathcal{Q}$ et $R'/\mathcal{Q}$ sont deux ordres totaux égaux. Si f est un isomorphisme de R sur R', alors pour tout $X \in \mathcal{Q}$, $f(X) = X$.*

Cette proposition achève la preuve du Théorème 1.5 :
Deux tournois $\{-4\}$-hypomorphes d'au moins 10 sommets sont héréditairement isomorphes.
Suite à ce théorème se pose le problème suivant :

Problème 1. *Deux tournois $\{-3\}$-hypomorphes de taille suffisamment grande sont ils héréditairement isomorphes ?*

Le rapporteur suggère même d'ajouter à l'hypothèse, l'isomorphie entre les deux tournois.

Par contre, nous savons d'après [4], que deux tournois $\{-2\}$-hypomorphes, de taille arbitrairement grande, peuvent ne pas être héréditairement isomorphes.

Remerciements

Nous adressons nos vifs remerciements au rapporteur pour l'amélioration qu'il a apportée à la présentation de cette Note.

Références

[1] J.A. Bondy, A graph reconstructor's manual, in: O. Keendwell (Ed.), Surveys in Combinatorics, in: London. Math. Soc. Lecture Note Ser., Cambridge Univ. Press, 1991, pp. 221–252.
[2] J.A. Bondy, R.L. Hemminger, Graph reconstruction, a survey, J. Graph Theory 1 (1977) 227–268.
[3] M. Bouaziz, Y. Boudabbous, La demi-isomorphie et les tournois fortement connexes finis, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 335 (2002) 105–110.
[4] H. Bouchaala, Y. Boudabbous, La $\{-k\}$-autodualité des sommes lexicographiques finies de tournois suivant un 3-cycle ou un tournoi critique, Ars Combin. 81 (2006) 33–64.
[5] A. Boussaïri, P. Ille, G. Lopez, S. Thomassé, The C_3-structure of tournaments, Discrete Math. 277 (2004) 29–43.
[6] R. Fraïssé, Abritement entre relations et spécialement entre chaînes, Symposi. Math. Instituto Nazionale di Alta Matematica 5, 1970, pp. 203–251.
[7] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967) 25–66.
[8] G. Lopez, Deux résultats concernant la détermination d'une relation par les types d'isomorphie de ses restrictions, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 274 (1972) 1525–1528.
[9] G. Lopez, Sur la détermination d'une relation par les types d'isomorphie de ses restrictions, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 275 (1972) 951–953.
[10] G. Lopez, C. Rauzy, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and $(n-1)$, I, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 27–37.
[11] G. Lopez, C. Rauzy, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and $(n-1)$, II, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 157–168.
[12] M. Pouzet, Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations, Math. Z. 150 (1976) 117–134.
[13] M. Pouzet, Relations non reconstructibles par leurs restrictions, J. Combin. Theory B 1.26 (1979) 22–34.
[14] K.B. Reid, C. Thomassen, Strongly self-complementary and hereditarily isomorphic tournaments, Monatsh. Math. 81 (1976) 291–304.