Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1047–1050
Comptes Rendus Mathematique

Équations aux dérivées partielles

Solutions entières d'équations hessiennes dans $\mathbb{R}^n$

Mouhamad Hossein [1]

Laboratoire Dieudonné, faculté des sciences, université de Nice Sophia Antipolis, parc Valrose, 06108 Nice, France

Reçu le 12 avril 2008 ; accepté après révision le 2 juillet 2009

Disponible sur Internet le 17 juillet 2009

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous démontrons l'existence et l'unicité de solutions entières, dans des espaces de Hölder à poids appropriés, d'équations hessiennes elliptiques dans $\mathbb{R}^n$ invariantes par rotation à l'infini. ***Pour citer cet article : M. Hossein, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Entire solutions of Hessian equations in $\mathbb{R}^n$. We prove the existence and uniqueness of entire solutions, in appropriate weighted Hölder spaces, of elliptic Hessian equations in $\mathbb{R}^n$ with rotational invariance at infinity. ***To cite this article: M. Hossein, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

Soit $m_\kappa = (\frac{\sigma_\kappa}{\binom{n}{\kappa}})^{\frac{1}{\kappa}}$ la moyenne symétrique élémentaire d'ordre κ à $n \geqslant \kappa$ variables, homogène de degré 1, où σ_κ désigne la κ-ième fonction symétrique élémentaire. On s'intéresse dans cet article à l'équation aux dérivées partielles hessienne suivante, posée dans $\mathbb{R}^n$ tout entier :

$$m_\kappa\big[\lambda\big(D^2 f\big)\big] = \big[\psi(x)\big]^{\frac{1}{\kappa}}, \tag{1}$$

où $D^2 f$ est la matrice hessienne de f et $\lambda(D^2 f)$ désigne le vecteur de ses valeurs propres par rapport à la métrique euclidienne standard. On cherche f sous la forme $f = \frac{1}{2}|x|^2 + u$, et $\psi = 1 + \phi > 0$ est donnée, les fonctions u et ϕ tendant convenablement vers zéro à l'infini. On note $a_u := I + D^2 u = D^2 f$. Notre choix de f à l'infini préserve l'*invariance par rotations* de l'opérateur $u \mapsto \mathcal{N}_\kappa[u] := m_\kappa(\lambda(a_u))$.

Définition 1.1. Une fonction $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ est dite κ-admissibles si $\lambda[a_u(x)] \in \Gamma_\kappa$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où $\Gamma_\kappa = \{\lambda \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sigma_i(\lambda) > 0,\ \forall i = 1, \ldots, \kappa\}$.

Adresse e-mail : Hossein@math.unice.fr.

[1] Boursier régional libanais.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.07.003

Pour $(\alpha, p) \in (0,1) \times \mathbb{R}$, on définit l'espace de Hölder à poids $C_p^{2,\alpha} = \{u \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n),\ \|u\|_{C_p^{2,\alpha}} < \infty\}$ par :

$$\|u\|_{C_p^{2,\alpha}} = \sum_{i=0}^{2} \operatorname*{Sup}_{x\in\mathbb{R}^n} \sigma(x)^{p+i}\big|D^i u(x)\big| + \operatorname*{Sup}_{\substack{x,x'\in\mathbb{R}^n\\ x\neq x'}} \left\{\min\big(\sigma(x)^{p+i+\alpha}, \sigma(x')^{p+i+\alpha}\big)\frac{|D^i u(x) - D^i u(x')|}{|x-x'|^\alpha}\right\},$$

où l'on a posé $\sigma(x) := \sqrt{1+|x|^2}$. Le résultat principal de cet article est :

Théorème 1.2. *Pour tout $\phi \in C_{p+2}^{0,\alpha}$ tel que $\psi = 1 + \phi > 0$, tous $n > 2$ et $p \in (0, n-2)$, il existe une unique solution κ-admissible, $u \in C_p^{2,\alpha}$, de l'équation* (1).

Le problème de Dirichlet pour des équations hessiennes considérées dans un ouvert borné convenable de $\mathbb{R}^n$, a d'abord été traité dans [2]. Lorsque $\kappa = n$ (équation de Monge–Ampère), notre résultat a été établi dans [3] ; notre apport concerne le cas $1 < \kappa < n$ (le cas $\kappa = 1$ est trivial).

Signalons enfin qu'on peut établir [5] un résultat analogue sur tout $\mathbb{C}^n$ pour l'équation complexe :

$$m_\kappa\big[\lambda(\partial\bar\partial f)\big] = \big[\psi(z,\bar z)\big]^{\frac{1}{\kappa}}.$$

2. Preuve par la méthode de continuité

L'unicité résulte d'un principe de comparaison (voir [5]) ; concentrons-nous ici sur l'existence. Pour $t \in [0,1]$, considérons l'équation de continuité :

$$\mathcal{N}_\kappa[u_t] = m_\kappa\big(\lambda(a_{u_t})\big) = [\psi_t]^{\frac{1}{\kappa}} = [1 + t\phi]^{\frac{1}{\kappa}} \quad \text{avec} \quad \phi \in C_{p+2}^{0,\alpha} \tag{2}$$

et raisonnons par connexité sur l'ensemble $\mathcal{T} = \{t \in [0,1],$ tel qu'il existe $u_t \in C_p^{2,\alpha}$ solution κ-admissible de (2)$\}$, qui est non vide car $u_0 = 0$ est solution κ-admisible de (2) pour $t = 0$.

Nous utiliserons le résultat linéaire suivant (écrit avec la convention de sommation d'Einstein) :

Théorème 2.1 *(Théorème d'isomorphisme [5]). Soit un opérateur différentiel linéaire uniformément elliptique $L = \partial_i(a^{ij}(x)\partial_j)$ sur $\mathbb{R}^n$ avec $a^{ij} = a^{ji}$, $a^{ij} \in C_0^{0,\alpha}$, $\partial_i(a^{ij}) = 0$. Alors pour tout $p \in (0, n-2)$, l'opérateur L est un isomorphisme de $C_p^{2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{0,\alpha}$.*

- $\mathcal{T}$ **est ouvert dans** $[0,1]$. Si, $t \in \mathcal{T}$, l'opérateur linéarisé $d\mathcal{N}_\kappa[u_t]$ vérifie l'hypothèse du Théorème 2.1 (voir [5]). C'est donc un isomorphisme de $C_p^{2,\alpha}$ dans $C_{p+2}^{0,\alpha}$, et d'après le théorème d'inversion locale, et la κ-admissibilité étant une propriété ouverte, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(t-\epsilon, t+\epsilon) \cap [0,1] \subset \mathcal{T}$. Donc $\mathcal{T}$ est relativement ouvert dans $[0,1]$.
- $\mathcal{T}$ **est fermé dans** $[0,1]$. Ce résultat suit classiquement des estimations *a priori* sur u_t pour $t \in \mathcal{T}$, construites ci-après, qui fournissent une borne sur $\|u_t\|_{C_p^{2,\alpha}}$ indépendante de $t \in \mathcal{T}$. En particulier, la κ-admissibilité de u_t avec t adhérent à $\mathcal{T}$ est *a priori* assurée par l'équation (2) elle-même (elle a lieu à l'infini où $D^2u_t \to 0$ et on la propage aisément à tout $\mathbb{R}^n$).

Conclusion $\mathcal{T} = [0,1]$ et l'équation (2), obtenue pour $t = 1$, est donc résolue.

3. Nouvelles estimations *a priori*

Soit $t \in \mathcal{T}$. Nous décrivons ici les estimations *a priori*, sur $u_t \in C_p^{2,\alpha}$ solution κ-admissible de (2) (notée simplement u), qui ne figurent pas déjà dans la littérature. Il s'agit d'abord de construire des solutions supérieure et inférieure radiales κ-admissibles qui conduiront (par comparaison) à l'estimation C_p^0. Il s'agit ensuite d'obtenir l'estimation $C_p^{2,\alpha}$ à partir des précédentes.

3.1. Estimation C^0_p

Soit $r = |x|$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$. Quand $\phi(x) = \varphi(r)$, on doit avoir $u(x) \equiv U(r)$, par unicité et invariance par rotation de l'opérateur $\mathcal{N}_\kappa$. En ce cas, on sait calculer U en fonction de φ :

Proposition 3.1 *(Calcul de la solution radiale). Si ϕ est radiale, avec $1 + \phi > 0$, la solution radiale $u(x) = U(r)$ nulle à l'infini de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ de l'équation* (2) *est formellement donnée par* :

$$U(r) = -\int_r^\infty s\left[\left(1 + n\int_0^1 \varphi(\tau s)\tau^{n-1}\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right]\mathrm{d}s.$$

Nous admettrons ici ce résultat (voir [5]). Nous aurons aussi besoin de l'estimation suivante :

Proposition 3.2. *Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ solution nulle à l'infini de* (2) *avec* : $\phi(x) = \varphi(r)$ *et* $\phi \in C^0_{p+2}$, $p \in (0, n-2)$ *et* $1 + \phi > 0$. *Alors* $u(x) = U(r)$ *et* $u \in C^0_p$; *précisément on a* :

$$\|u\|_{C^0_p} \leqslant n\big[p(n-2-p)\big]^{-1}\|\phi\|_{C^0_{p+2}}.$$

Preuve de la Proposition 3.2. La proposition découle facilement de l'inégalité suivante :

$$r^{p+1}\big|v(r)\big| \leqslant n(n-2-p)^{-1}\|\phi\|_{C^0_{p+2}}, \tag{3}$$

avec $v(r) = \dot{U}(r)$, dont voici la preuve. On utilise la formule :

$$\forall(x,\alpha) \in [-1,\infty) \times (0,1) \quad \text{on a } \big|(1+x)^\alpha - 1\big| \leqslant |x|,$$

$$\text{appliquée à } r^{-1}\big|v(r)\big| = \left|\left(1 + n\int_0^1 \varphi(\tau r)\tau^{n-1}\,\mathrm{d}\tau\right)^{\frac{1}{\kappa}} - 1\right|,$$

avec $\alpha = \frac{1}{\kappa}$ *et* $x = n\int_0^1 |\varphi(\tau r)\tau^{n-1}|\,\mathrm{d}\tau$. On obtient :

$$r^{-1}\big|v(r)\big| \leqslant n\int_0^1 \big|\varphi(\tau r)\tau^{n-1}\big|\,\mathrm{d}\tau \leqslant n\|\varphi\|_{C^0_{p+2}}\int_0^1 \big(1 + (\tau r)^2\big)^{\frac{-(p+2)}{2}}\tau^{n-1}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant n\|\varphi\|_{C^0_{p+2}}\int_0^1 (\tau r)^{-(p+2)}\tau^{n-1}\,\mathrm{d}\tau \quad \text{car pour } q > 0, \quad \text{on a } \big(1+\tau^2\big)^{\frac{-q}{2}} < |\tau|^{-q}.$$

Finalement, comme $p \in (0, n-2)$, on a : $r^{-1}|v(r)| \leqslant \frac{n\|\varphi\|_{C^0_{p+2}}}{(n-2-p)}r^{-(p+2)}$ et la proposition s'ensuit.

Passons à l'estimation de $\|u\|_{C^0_p}$ pour u solution de l'équation (2) générale (sans radialité). Nous allons procéder en comparant u à des solution supérieure u^+ et inférieure u^- radiales auxquelles s'appliquera la Proposition 3.2.

Construction de u^-. Comme $\phi \in C^0_{p+2}$, il existe $C^- > 0$ telle que $1 + \phi \leqslant 1 + C^-\sigma(r)^{-p-2}$. Soit u^- la solution radiale formelle de l'équation : $\mathcal{N}_\kappa[u^-] = (1 + C^-\sigma(r)^{-p-2})^{\frac{1}{\kappa}}$ donnée par la Proposition 3.1. On a $u^- \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap C^0_p$ d'après la Proposition 3.2, avec ici :

$$\|u^-\|_{C^0_p} \leqslant n\big[p(n-2-p)\big]^{-1}C^-.$$

Construction de u^+. Comme $\phi \in C^0_{p+2}$ avec $1 + \phi > 0$, il existe $C_1 > 0$ telle que $\log(1+\phi) \geqslant -C_1\sigma^{-p-2}$ et :

$$\phi^+ := \big[\exp\big(-C_1\sigma^{-p-2}\big) - 1\big] \in C^0_{p+2}.$$

Posons $C^+ = \|\phi^+\|_{C^0_{p+2}}$ et soit u^+ la solution radiale formelle de l'équation $\mathcal{N}_\kappa[u^+] = (1+\phi^+)^{\frac{1}{\kappa}}$ donnée par la Proposition 3.1. On a $u^+ \in C^2(\mathbb{R}^n) \cap C^0_p$ d'après la Proposition 3.2 avec ici : $\|u^+\|_{C^0_p} \leqslant n[p(n-2-p)]^{-1}C^+$. On vérifie aisément que les fonctions radiales u^+ et u^- sont κ-admissibles à l'origine de $\mathbb{R}^n$ et, comme $\mathcal{N}_\kappa[u^\pm] > 0$, elles doivent le rester partout.

En appliquant le principe de comparaison dans $C^2(\mathbb{R}^n) \cap C^0_p$ aux deux inégalités $\mathcal{N}_\kappa[u] \leqslant \mathcal{N}_\kappa[u^-]$ et $\mathcal{N}_\kappa[u^+] \leqslant \mathcal{N}_\kappa[u]$, on déduit l'encadrement $u^- \leqslant u \leqslant u^+$ qui fournit l'estimation cherchée, à savoir : $\|u\|_{C^0_p} \leqslant n[p(n-2-p)]^{-1}\max(C^-, C^+)$.

Remarque 1. On prouve comme dans [2] l'ellipticité uniforme des opérateurs linéarisés $d\mathcal{N}_\kappa[u_t]$, $t \in \mathcal{T}$.

3.2. *Estimation* $C^{2,\alpha}_p$

Nous utilisons une technique de changement d'échelle (qui remonte à [1]) pour construire l'estimation $C^{2,\alpha}_p$. Soit $u \in C^4_p(\mathbb{R}^n)$ κ-admissible et supposons $\mathcal{N}_\kappa[u] = f \in C^2_{p+2}(\mathbb{R}^n)$. Pour $(x_0, \rho) \in \mathbb{R}^n \times (0,1)$ fixé, on définit sur la boule $B^{x_0}_\rho$ de centre x_0 de rayon ρ, les deux fonctions :

$$u_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^p u(x), \quad f_{x_0}(X) := [\sigma(x_0)]^{p+2}\mathcal{N}_\kappa[u](x)$$

avec $X = \frac{x-x_0}{\sigma(x_0)}$. Par hypothèse f_{x_0} est bornée dans $C^2(B^{x_0}_\rho)$ indépendamment de x_0, et u_{x_0} l'est dans $C^0(B^{x_0}_\rho)$ indépendamment de x_0, grâce à notre estimation de $\|u\|_{C^0_p}$. En outre, on a les identités suivantes :

$$a_u(x) \equiv I + D^2u(x) \equiv I + \sigma(x_0)^{-(p+2)}\sigma(x_0)^{p+2}D^2u(x) \equiv I + [\sigma(x_0)]^{-(p+2)}D^2u_{x_0}(X),$$
$$f_{x_0} \equiv [\sigma(x_0)]^{p+2}\log\{\tilde{\sigma}_\kappa[\lambda(I + [\sigma(x_0)]^{-(p+2)}D^2u_{x_0})]\} =: \mathcal{N}_{x_0}[u_{x_0}].$$

L'opérateur auxiliaire $\mathcal{N}_{x_0}$ juste défini sur $B^{x_0}_\rho$ est concave par rapport à la variable $D^2u_{x_0}$ et (voir Remarque 1) les valeurs propres du symbole de son linéarisé sont encadrées, sur $B^{x_0}_\rho$, entre deux réels $0 < \lambda \leqslant \Lambda$ i.e. il est uniformément elliptique. En outre, $\mathcal{N}_{x_0}$ se factorise à travers la seule variable $D^2u_{x_0}$. En ce cas, selon une estimation *a priori* intérieure non linéaire de Gilbarg–Trudinger (équation (17.42), [4] p. 456) appliquée dans $B^{x_0}_\rho$ à l'équation $\mathcal{N}_{x_0}[u_{x_0}] = f_{x_0}$, il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha \in (0,1)$ dépendant seulement de n, λ et Λ telles que : $\|u_{x_0}\|^*_{C^{2,\alpha}(B_\rho)} \leqslant C\{\|f_{x_0}\|^*_{C^2(B_\rho)} + \|u_{x_0}\|^*_{C^2(B_\rho)}\}$ où $\|.\|^*$ est la norme intérieure utilisées dans [4] (p. 61). D'après l'inégalité d'interpolation [4], Lemme 6.32 (avec une autre constante uniforme C) on peut écrire : $\|u_{x_0}\|^*_{C^{2,\alpha}(B_\rho)} \leqslant C\{\|f_{x_0}\|^*_{C^2(B_\rho)} + \|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)}\}$, d'où, avec une constante uniforme C dépendant de ρ mais pas de x_0 : $\|u_{x_0}\|_{C^{2,\alpha}(B_{\rho/2})} \leqslant C\{\|f_{x_0}\|_{C^2(B_\rho)} + \|u_{x_0}\|_{C^0(B_\rho)}\}$. Prenant le sup sur $x_0 \in \mathbb{R}^n$, nous obtenons (avec encore une autre constante uniforme C) $\|u\|_{C^{2,\alpha}_p} \leqslant C\{\|\mathcal{N}_\kappa[u]\|_{C^2_{p+2}} + \|u\|_{C^0_p}\}$.

Remerciements

Cette Note est tiré de ma thèse à l'Université de Nice Sophia Antipolis [5] ; je tiens à remercier mon directeur Ph. Delanoë pour son encadrement attentif et son soutien. Je veux aussi remercier la Mairie de Mechmech (Liban) ainsi que ma famille pour leur soutien financier.

Références

[1] S. Bando, R. Kobayashi, Ricci-flat Kähler metrics on affine algebraic manifolds, II, Math. Ann. 287 (1990) 175–180.
[2] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck, The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian, Acta Math. 155 (1986) 261–301.
[3] P. Delanoë, Partial decay on simple manifolds, Ann. Global Anal. Geom. 10 (1992) 3–61.
[4] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, second edition, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 224, Springer-Verlag, 1983.
[5] M. Hossein, Thèse de Doctorat (mathématiques), Université de Nice – Sophia Antipolis, 12 Mai 2009.