C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 348 (2010) 85–88

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Probabilitiés

Processus dual et inverse d'un ARMA et application à la réversibilité temporelle

Dual and inverse ARMA processes and application to time reversibility

Ahmed El Ghini

Équippe / LIFL, CNRS-UMR 8022, université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 29 mai 2009
Accepté après révision le 4 novembre 2009
Disponible sur Internet le 22 décembre 2009

Présenté par Paul Deheuvels

RÉSUMÉ

Pour la classe des processus autorégressifs-moyenne mobile, nous étudions le lien entre les processus dual et inverse. Nous établissons explicitement la représentation causale et inversible ARMA(q,p) du processus inverse d'un ARMA(p,q) canonique. De plus, nous montrons que cette représentation est forte si et seulement si le processus générateur est gaussien. Une application pour la réversibilité temporelle est traitée avec quelques exemples d'illustration.

ABSTRACT

For the class of autoregressive-moving average (ARMA) processes, the relationship between the dual and the inverse processes is examined. It is shown that the inverse process generated by a causal and invertible ARMA(p,q) process is a causal and invertible ARMA(q,p). Moreover, it is established that this representation is strong if and only if the generating process is Gaussian. Some examples and applications to time reversibility are given to illustrate these theoretical results.

© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soit (X_t) un processus stationnaire centré et à courte mémoire dont la densité spectrale est supposée strictement positive. Cleveland [8] a défini la fonction d'autocovariance inverse $\gamma_i(h)$ de (X_t) comme le coefficient de Fourier de l'inverse de la densité spectrale. La fonction d'autocorrélation inverse $\rho_i(h) = \gamma_i(h)/\gamma_i(0)$ a été largement étudiée dans la littérature des séries temporelles. Cette fonction joue un rôle important dans les problèmes d'identification, d'estimation et d'interpolation linéaire (e.g., Bhansali [3] ; El Ghini et Francq [10] ; Peña et Maravall [13]).

Dans cette note, nous considérons le processus inverse (Z_t) de (X_t), défini dans l'article de Battaglia [2], lié au processus d'erreur de l'interpolateur linéaire de X_t et qui admet la representation formelle :

$$Z_t = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma_i(h) X_{t-h}. \tag{1}$$

Adresses e-mail : aelghini@gmail.com, ahmed.elghini@univ-lille3.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.11.002

Le processus inverse a été utilisé, en particulier, dans l'interpolation linéaire des données manquantes. De plus, il a été démontré que sa fonction d'autocovariance ordinaire et la fonction d'autocovariance inverse de (X_t) sont identiques.

La fonction d'autocorrélation inverse d'un ARMA(p,q) : $\Phi(B)X_t = \theta(B)\epsilon_t$ peut s'interpréter comme la fonction d'autocorrélation ordinaire du processus dual (Y_t), défini dans McLeod [12], satisfaisant le modèle ARMA(q,p) : $\theta(B)Y_t = \Phi(B)\epsilon_t$.

La première motivation de ce travail est d'établir le lien entre le processus dual et l'inverse d'un ARMA(p,q), puis d'examiner les structures probabilistes du processus inverse et de son innovation linéaire. Plus précisément, nous montrons que le processus inverse d'un ARMA(p,q) est un ARMA(q,p). De plus, ce dernier modèle obtenu est fort si et seulement si le processus générateur est gaussien. Enfin, nous exploitons la relation entre le processus dual et inverse pour caractériser la réversibilité temporelle d'un ARMA fort non gaussien.

2. Processus dual et inverse d'un ARMA(p,q)

Dans tout ce qui suit, nous désignons par $(\epsilon_t) \sim WN(0, \sigma_\epsilon^2)$ un bruit blanc tel que $\sigma_\epsilon^2 > 0$ et nous nous référons au livre de Brockwell et Davis [6] pour les définitions de stationnarité, d'inversibilité, de causalité et les propriétés usuelles des modèles ARMA. Nous nous intéressons aussi à la classe des modèles « all-pass » étudiés dans l'article de Breidt et al. [5] qui ont retenu l'attention dans la modélisation des séries financières. Un modèle « all-pass » d'ordre s, noté AP(s), est un modèle ARMA(s,s), où les racines du polynôme autorégressif sont exactement les racines inverses du polynôme moyenne mobile. Il génère un processus non corrélé (bruit blanc) qui n'est pas fort dans le cas non gaussien (e.g., Breidt et Davis [4]).

De nombreuses études récentes ont été consacrées aux séries temporelles admettant une representation ARMA faible ; voir Francq et al. [11] et les références citées pour plus de détails. Dans ce cadre, nous montrons que le processus inverse, d'une classe assez large de processus linéaire et non linéaire, satisfait telle représentation. Plus précisément, nous établissons dans le théorème suivant la représentation explicite ARMA du processus inverse généré par un ARMA(p,q) causal et inversible. Ce résultat nous permet alors de caractériser l'inverse d'un ARMA(p,q) fort.

Théorème 1. *Soit (X_t) un processus* ARMA(p,q), *inversible et causal, satisfaisant la représentation* :

$$\Phi(B)Z_t = \theta(B)\epsilon_t, \quad (\epsilon_t) \sim WN\big(0, \sigma_\epsilon^2\big), \tag{2}$$

tel que $\Phi(z) = 1 + a_1 z + \cdots + a_p z^p$ et $\theta(z) = 1 + b_1 z + \cdots + b_q z^q$.

Il existe alors un bruit blanc $(\tilde{\epsilon}_t)$ pour lequel le processus inverse (Z_t) suit le modèle canonique ARMA(q,p) :

$$\theta(B)Z_t = \Phi(B)\tilde{\epsilon}_t, \quad (\tilde{\epsilon}_t) \sim WN\big(0, \sigma_{\tilde{\epsilon}}^2\big) \tag{3}$$

où $\sigma_{\tilde{\epsilon}}^2 = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ et $\beta_1, \ldots, \beta_p$ sont respectivement les racines de $\theta(z)$ et de $\Phi(z)$, et

$$\tilde{\epsilon}_t = \frac{a_p}{\sigma_\epsilon^2 b_q} \prod_{j=1}^{q} \frac{(1 - \alpha_j^{-1}B)}{(1 - \alpha_j B)} \prod_{j=1}^{p} \frac{(1 - \beta_j B)}{(1 - \beta_j^{-1} B)} \epsilon_{t-(q-p)}.$$

Preuve. Voir [9] p. 41. □

Exemple 1. Considérons l'autorégressif AR(1)

$$X_t + aX_{t-1} = \epsilon_t, \quad \text{avec } 0 < |a| < 1 \text{ et } (\epsilon_t) \sim iid\big(0, \sigma_\epsilon^2\big).$$

Le polynôme autorégressif ne s'annule pas dans le disque unité, donc le modèle est causal. Par application du théorème précédent, le processus inverse (Z_t) suit la moyenne mobile MA(1)

$$Z_t = \tilde{\epsilon}_t + a\tilde{\epsilon}_{t-1}, \quad \text{avec } (\tilde{\epsilon}_t) \sim WN\big(0, \sigma_{\tilde{\epsilon}}^2\big) \text{ et } \sigma_{\tilde{\epsilon}}^2 = 1/\sigma_\epsilon^2.$$

Notons que la fonction d'autocovariance inverse de (X_t) et la fonction d'autocovariance ordinaire de son inverse sont identiques. De plus l'innovation linéaire $(\tilde{\epsilon}_t)$ du processus inverse suit le modèle AP(1) :

$$\tilde{\epsilon}_t - a\tilde{\epsilon}_{t-1} = \xi_t - \frac{1}{a}\xi_{t-1}, \quad \text{avec } \xi_t = \frac{a}{\sigma_\epsilon^2}\epsilon_{t+1}.$$

On trouve dans la littérature une ambiguïté entre le processus inverse et le processus dual d'un ARMA(p,q) car ils possèdent la même fonction d'autocorrélation et tous les deux suivent des modèles ARMA(q,p). Dans la proposition suivante, nous exhiberons la relation entre ces deux processus. Cette relation sera en fait un outil fondamental pour démontrer, dans la dernière section, une caractérisation de la réversibilité temporelle d'un processus ARMA(p,q) fort et non gaussien.

Tableau 1
Le lien entre un processus ARMA(p,q) $(p+q>0)$ canonique, ses processus dual et inverse, et l'innovation linéaire du processus inverse.

(X_t) : Processus centré stationnaire	(Y_t) : Processus dual de (X_t)	(Z_t) : Processus inverse de (X_t)	$(\tilde{\epsilon}_t)$: Innovation linéaire de (Z_t)
ARMA(q,p) fort*	ARMA(q,p) fort*	ARMA(q,p) faible*	AP$(p+q)$ fort* causal ssi $p=0$
ARMA(p,q) gaussien	ARMA(q,p) gaussien	ARMA(q,p) gaussien	AP$(p+q)$ gaussien

fort* signifie que le modèle est fort mais non gaussien.
faible* signifie le modèle est généré par un bruit blanc dépendant.

Proposition 1. *Soit (X_t) un processus* ARMA(p,q) *vérifiant* (2) *tel que les polynômes Φ et θ n'ont aucune racine sur le cercle unité. Si (Y_t) et (Z_t) sont respectivement les processus dual et inverse de (X_t), alors*

$$Z_t = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\frac{\Phi(B^{-1})}{\theta(B^{-1})}\frac{\theta(B)}{\Phi(B)}Y_t. \tag{4}$$

Preuve. Voir [9] p. 45. □

Maintenant regardons les structures probabilistes du processus inverse. Dans un premier temps, il est clair en vertu du théorème 1 que l'inverse d'un ARMA(p,q) gaussien est un ARMA(q,p) gaussien et donc fort. Cheng [7] a prouvé l'unicité de la représentation des processus linéaires. On utilise ce résultat pour établir le théorème suivant :

Théorème 2. *Étant donné (X_t) un processus* ARMA(p,q) *canonique et fort tel que $p+q>0$. Alors la représentation canonique* ARMA(q,p) *du processus inverse (Z_t) est forte si et seulement si le processus générateur (X_t) est gaussien.*

Preuve. Voir [9] p. 46. □

Comme application du Théorème 1, on peut montrer que l'innovation linéaire du processus inverse d'un ARMA(p,q) canonique est un « all-pass » d'ordre $p+q$.

Terminons cette partie par le Tableau 1 récapitulatif qui nous montre le lien entre un processus ARMA(p,q) $(p+q>0)$ canonique, ses processus dual et inverse, et l'innovation linéaire du processus inverse.

3. Application à la réversibilité temporelle

Un processus stationnaire (X_t) est dit temporellement réversible si pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t_1,\dots,t_n\in\mathbb{Z}$, les vecteurs $(X_{t_1},\dots,X_{t_n})'$ et $(X_{-t_1},\dots,X_{-t_n})'$ ont même loi jointe. Il est clair que si (X_t) est une suite i.i.d. alors elle est temporellement réversible.

Pour les processus temporellement réversibles, les problèmes de prévision vers le passé ou le futur sont identiques. L'article de Ramsey et Rothman [14] met en évidence l'importance de la réversibilité temporelle dans le cadre de l'analyse macroéconomique. À l'aide des processus inverse et dual, le résultat suivant donne une caractérisation de la réversibilité temporelle d'un ARMA(p,q) fort et non gaussien.

Proposition 2. *Soit (X_t) un processus* ARMA(q,p) *généré par un bruit blanc $(\epsilon_t)\sim iid(0,\sigma_\epsilon^2)$ non gaussien. Supposons que les polynômes autorégressif et moyenne mobile n'ont aucune racine sur le cercle unité et notons respectivement par (Y_t) et (Z_t) ses processus dual et inverse. Alors (X_t) est temporellement réversible si et seulement si $Z_t=\pm\frac{1}{\sigma_\epsilon^2}Y_{t+r}$ pour un certain entier r.*

Preuve. Voir [9] p. 48. □

Exemple 2. Considérons (X_t) la moyenne mobile générée par le modèle suivant :

$$MA(2):\quad X_t=\epsilon_t+4\epsilon_{t-1}+\epsilon_{t-2},$$

où $(\epsilon_t)\sim IU_{[-\sqrt{3},\sqrt{3}]}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$. Les processus dual et inverse vérifient l'égalité suivante : $Z_t=Y_{t-2}$. Par conséquent, le processus (X_t) est temporellement réversible.

D'autres exemples illustratifs on été étudiés dans El Ghini [9], cependant ils ne figurent pas ici par manque de place. Enfin, signalons que les résultats présentés dans cette Note peuvent apporter plus d'information aux praticiens utilisant les modèles dual et inverse dans le domaine de la vision par ordinateur, citons ici, par exemple, Aggarwal et al. [1] et Veeraraghavan et al. [15].

Références

[1] G. Aggarwal, A.K. Roy-Chowdhury, R. Chellappa, A system identification approach for video-based face recognition, in: Proceedings of the 17th International Conference on Pattern Recognition, ICPR'04, Cambridge, UK, 2004.
[2] F. Battaglia, Inverse autocovariances and a measure of linear determinism for a stationary process, J. Time Series Anal. 4 (1983) 79–87.
[3] R.J. Bhansali, Estimation of the order of a moving average model from autoregressive and window estimates of the inverse correlation function, J. Time Series Anal. 4 (1983) 137–162.
[4] F.J. Breidt, R.A. Davis, Time-reversibility, identifiability and independence of innovations for stationary time series, J. Time Series Anal. 13 (1991) 377–390.
[5] F.J. Breidt, R.A. Davis, A.A. Trindade, Least absolute deviation estimation for all-pass time series models, Ann. Statist. 29 (2001) 919–946.
[6] P.J. Brockwell, R.A. Davis, Time Series: Theory and Methods, Springer-Verlag, New York, 1991.
[7] Q. Cheng, On time-reversibility of linear processes, Biometrika 88 (1999) 298–307.
[8] W.S. Cleveland, The inverse autocorrelations of a time series and their applications, Technometrics 14 (1972) 277–298.
[9] A. El Ghini, Contribution à l'identification de modèles de séries temporelles, Thèse de doctorat disponible au: www.lifl.fr/~elghini/Publications/these.pdf, 2008.
[10] A. El Ghini, C. Francq, Asymptotic relative efficiency of goodness-of-fit tests based on inverse and ordinary autocorrelations, J. Time Series Anal. 27 (2006) 843–855.
[11] C. Francq, R. Roy, J.-M. Zakoïan, Diagnostic checking in ARMA models with uncorrelated errors, J. Amer. Statist. Assoc. 100 (2005) 532–544.
[12] A.I. McLeod, Duality and other properties of multiplicative seasonal autoregressive-moving average models, Biometrika 71 (1984) 207–211.
[13] D. Peña, A. Maravall, Interpolations, outliers and inverse autocorrelations, Comm. Stat. Theory Methods 20 (10) (1991) 3175–3186.
[14] J.B. Ramsey, P. Rothman, Time irreversibility and business cycle asymmetry, J. Money, Credit Banking 28 (1) (1996) 1–21.
[15] A. Veeraraghavan, A.K. Roy-Chowdhury, R. Chellappa, Matching shape sequences in video with applications in human movement analysis, IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. 27 (12) (2005) 1896–1909.