



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Probabilités/Statistique

Propriétés de l'estimateur bayésien pour un modèle de tour d'un processus de Poisson spatial

On some properties of Bayesian estimators for a spatial inhomogeneous Poisson process model

Christian Farinetto

Laboratoire de statistique et processus, université du Maine, 72085 Le Mans cedex 9, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 13 avril 2009

Accepté après révision le 30 novembre 2009

Présenté par Paul Deheuvels

RÉSUMÉ

On considère le problème d'estimation du paramètre de l'intensité d'un processus de Poisson spatial non homogène par la méthode bayésienne. On suppose que l'intensité est discontinue le long d'un cercle de rayon r . Elle prend la valeur constante α à l'intérieur du disque associé au cercle, et la valeur constante γ à l'extérieur du disque. Le paramètre inconnu de dimension trois est (r, α, γ) . Les résultats établis montrent la consistance, la convergence en loi et la convergence des moments de l'estimateur bayésien.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

We consider the problem of estimating the parameter of an inhomogeneous spatial Poisson process by Bayesian approach. We suppose that the intensity is discontinuous on a circle of radius r . The intensity takes a constant value α inside the disk associated to the circle and a different constant value γ outside the disk. The unknown three-dimensional parameter is (r, α, γ) . We show the consistency, the convergence in distribution and the convergence of the moments of the Bayesian estimator.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Modèle statistique

On observe n réalisations $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ de processus de Poisson de même intensité, sur le disque $A = \{x^2 + y^2 \leq C^2\}$ de \mathcal{R}^2 . La fonction d'intensité s'écrit

$$S(\vartheta, x) = \alpha \chi_{\{A_r\}} + \gamma \chi_{\{A_r^c\}}, \quad \vartheta = (r, \alpha, \gamma) \in \Theta =]r_1, r_2[\times]\alpha_1, \alpha_2[\times]\gamma_1, \gamma_2[, \quad (1)$$

où $A_r = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2, x^2 + y^2 \leq r^2\}$ est un disque de rayon inconnu r et α et γ sont des constantes inconnues positives. On suppose que $\alpha_1 > \gamma_2$ et $C > r_2$. On cherche dans ce qui suit à estimer ϑ inconnu au vu des observations par la méthode bayésienne. Le problème considéré s'applique en télécommunications et ressemble aux problèmes de reconstruction d'images étudiés par Karr [5] et Snyder et Miller [7] : connaissant ϑ on peut reconstruire l'intensité. L'estimateur bayésien a été étudié par de nombreux auteurs (par exemple Ibragimov et Khasminskii [4]) dans le cadre de l'estimation paramétrique des variables aléatoires. Kutoyants a montré le comportement asymptotique de cet estimateur pour un modèle de processus de

Adresse e-mail : christian.farinetto@univ-lemans.fr.

Poisson spatial du même type mais avec r comme unique paramètre inconnu, la méthode qu'il a proposé dans [6] a été appliquée dans ce qui suit.

2. Rappels et préliminaires

Soient n réalisations $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ du processus sur le fermé A de \mathcal{R}^2 et $\{\mathbf{P}_\vartheta^{(n)}, \vartheta \in \Theta\}$ la famille de mesures de probabilité associée. Soit Λ la mesure d'intensité, définie sur $(A, \mathcal{B}(A))$, d'un processus de Poisson X_1 , dont on notera par $\{x_i \in \mathcal{R}^2\}$ les événements (voir Karr [5]). L'intégrale stochastique de $f(\cdot) \in L_1(\Lambda)$ par rapport au processus X_1 est définie par (voir Daley et Vere-Jones [2]) :

$$I(f) = \int_A f(x) X_1(dx) = \sum_i f(x_i) 1_{\{x_i \in A\}}.$$

Les mesures $\mathbf{P}_{\vartheta_1}^{(n)}$ étant équivalentes on définit le rapport de vraisemblance (voir Brown [1]) :

$$L(\vartheta, \vartheta_1, X^{(n)}) = \frac{d\mathbf{P}_\vartheta^{(n)}}{d\mathbf{P}_{\vartheta_1}^{(n)}}(X^{(n)}) = \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \int_A \ln \frac{S(\vartheta, x)}{S(\vartheta_1, x)} X_j(dx) - n \int_A (S(\vartheta, x) - S(\vartheta_1, x)) dx \right\}.$$

Cette fonction est discontinue en ϑ . On suppose que le paramètre inconnu ϑ est une variable aléatoire de densité à priori $p(v) (v \in \Theta)$ appartenant à l'ensemble Q_3 des fonctions continues, positives de \mathcal{R}^3 dans \mathcal{R} et ϑ_1 est une valeur quelconque fixée de ϑ . On choisit comme fonction de perte $\|\cdot\|^2$, le carré de la norme usuelle sur \mathcal{R}^3 . On définit l'estimateur bayésien $\tilde{\vartheta}_n$ comme une solution de l'équation :

$$\inf_{\vartheta \in \Theta} \int \|\vartheta - v\|^2 p_n(\vartheta | X^{(n)}) d\vartheta = \int_{\Theta} \|\tilde{\vartheta}_n - \vartheta\|^2 p_n(\vartheta | X^{(n)}) d\vartheta,$$

où la densité à postériori est définie par

$$p_n(\vartheta | X^{(n)}) = p(\vartheta) L(\vartheta, \vartheta_1, X^{(n)}) \left(\int_{\Theta} p(v) L(v, \vartheta_1, X^{(n)}) dv \right)^{-1}.$$

Notons E l'espérance mathématique par rapport à la mesure $dP_\vartheta \times p(\vartheta)$. On démontre alors que l'on peut prendre comme solution de cette equation

$$\tilde{\vartheta}_n = E(\vartheta | X^{(n)}) = \int_{\Theta} v p_n(v | X^{(n)}) dv.$$

Soit la matrice

$$\Psi_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}.$$

Introduisons les processus de Poisson spatiaux indépendants $N_1(dx, dy)$ et $N_2(dx, dy)$ à réalisations sur $\mathcal{R} \times [0, 1]$ d'intensités respectives γ et α , les variables aléatoires gaussiennes indépendantes ψ_1 et ψ_2 et le champ aléatoire $Z(u_1, u_2, u_3) = Z_1(u_1) Z_2(u_2) Z_3(u_3)$ de \mathcal{R}^3 , où

$$\begin{aligned} - Z_1(u_1) &= \exp \left\{ \left(\ln \frac{\alpha}{\gamma} N_1([0, 2\pi r u_1][0, 1]) - 2\pi r u_1(\alpha - \gamma) \right) \chi_{\{u_1 > 0\}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\ln \frac{\gamma}{\alpha} N_2([0, -2\pi r u_1][0, 1]) + 2\pi r u_1(\alpha - \gamma) \right) \chi_{\{u_1 \leq 0\}} \right\}, \\ - Z_2(u_2) &= \exp \left\{ u_2 \psi_1 - \frac{\pi r^2}{2\alpha} u_2^2 \right\} \text{ avec } \psi_1 \sim \mathcal{N} \left(0, \sqrt{\frac{\pi}{\alpha} r} \right), \\ - Z_3(u_3) &= \exp \left\{ u_3 \psi_2 - \frac{\pi(C^2 - r^2)}{2\gamma} u_3^2 \right\} \text{ avec } \psi_2 \sim \mathcal{N} \left(0, \sqrt{\frac{\pi(C^2 - r^2)}{\gamma}} \right). \end{aligned}$$

3. Résultats

On définit le vecteur aléatoire $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ où

$$\zeta_i = \int_{\mathcal{R}^3} u_i Z(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3 \left(\int_{\mathcal{R}^3} Z(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3 \right)^{-1}, \quad i \in [1, 3].$$

Théorème 3.1. *Sous les conditions du modèle on a l'inégalité*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{\tilde{\vartheta}_n \mid |\theta - \tilde{\vartheta}_n| < \delta} \mathbf{E}_\theta^{(n)} \|\Psi_n^{-1}(\tilde{\vartheta}_n - \theta)\|^2 \geq \mathbf{E}\|\zeta\|^2,$$

où inf est pris sur tous les estimateurs possibles $\tilde{\vartheta}_n$ du paramètre ϑ .

Introduisons la définition suivante :

Définition 3.2. Nous dirons que l'estimateur $\tilde{\vartheta}_n$ de ϑ est asymptotiquement efficace si pour tout $\vartheta \in \Theta$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|\theta - \tilde{\vartheta}_n| < \delta} \mathbf{E}_\theta^{(n)} \|\Psi_n^{-1}(\tilde{\vartheta}_n - \theta)\|^2 = \mathbf{E}\|\zeta\|^2.$$

Théorème 3.3. *Sous les conditions du modèle l'estimateur $\tilde{\vartheta}_n$ est asymptotiquement efficace au sens de la définition précédente, et pour tout compact K de Θ on a uniformément en $\vartheta \in K$*

(i) la consistance de $\tilde{\vartheta}_n$: pour tout $\delta > 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\vartheta \in K} \mathbf{P}_\vartheta^{(n)} \{ \|\tilde{\vartheta}_n - \vartheta\| > \delta \} = 0,$$

(ii) la convergence en loi de $\tilde{\vartheta}_n$:

$$\mathcal{L}_\vartheta \{ \Psi_n^{-1}(\tilde{\vartheta}_n - \vartheta) \} \implies \mathcal{L}(\zeta),$$

(iii) la convergence des moments de $\tilde{\vartheta}_n$: pour tout $p > 0$ on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_\vartheta^{(n)} \|\Psi_n^{-1}(\tilde{\vartheta}_n - \vartheta)\|^p = \mathbf{E}\|\zeta\|^p.$$

Les démonstrations proposées reposent sur les méthodes développées par Ibragimov et Khasminskii dans [4] et par Kutoyants dans [6]. On trouvera les preuves détaillées dans [3]. Soit le rapport de vraisemblance

$$Z_n(u) = \frac{L\left(r + \frac{u_1}{n}, \alpha + \frac{u_2}{\sqrt{n}}, \gamma + \frac{u_3}{\sqrt{n}}, r_1, \alpha_1, \gamma_1, X^{(n)}\right)}{L(r, \alpha, \gamma, r_1, \alpha_1, \gamma_1, X^{(n)})},$$

pour

$$(u_1, u_2, u_3) \in U_n = \left\{ u_1, u_2, u_3 : \left(r + \frac{u_1}{n}, \alpha + \frac{u_2}{\sqrt{n}}, \gamma + \frac{u_3}{\sqrt{n}} \right) \in]r_1, r_2[\times]\alpha_1, \alpha_2[\times]\gamma_1, \gamma_2[\right\},$$

et K un compact de Θ . On démontre les deux lemmes suivants :

Lemme 3.4. *Soit $(u, v) \in U_n^2$, alors pour tout ϑ de K il existe $K_1, K_2, K_3 > 0$ tel que :*

$$\sup_{\vartheta \in K} \mathbf{E}_\vartheta^{(n)} \left| Z_n^{\frac{1}{2}}(u) - Z_n^{\frac{1}{2}}(v) \right|^2 \leq K_1 |u_1 - v_1| + K_2 (u_2 - v_2)^2 + K_3 (u_3 - v_3)^2.$$

Lemme 3.5. *Pour tout ϑ de K et $u = (u_1, u_2, u_3)$ dans U_n , il existe $\kappa > 0$ tel que :*

$$\sup_{\vartheta \in K} \mathbf{E}_\vartheta^{(n)} Z_n^{\frac{1}{2}}(u) \leq \exp\{-\kappa(|u_1| + u_2^2 + u_3^2)\}.$$

Le calcul de la limite de la fonction caractéristique de $Z_n(u_1, u_2, u_3)$ pour $u_1 \geq 0$ donne

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\vartheta}^{(n)} \exp\{i\lambda Z_n(u_1, u_2, u_3)\} \\ &= \exp\left\{-\frac{\pi r^2}{2\alpha}(\lambda u_2)^2 - \frac{\pi(C^2 - r^2)}{2\gamma}(\lambda u_3)^2 + 2r\pi u_1[\gamma(e^{i\lambda \ln \frac{\alpha}{\gamma}} - 1) - i\lambda(\alpha - \gamma)]\right\} \end{aligned}$$

qui est la fonction caractéristique de $Z(u_1, u_2, u_3)$, et le calcul des limites des fonctions caractéristiques multidimensionnelles permet alors d'obtenir le lemme suivant :

Lemme 3.6. *Les distributions marginales du processus $Z_n(\cdot)$ convergent vers les distributions marginales du processus $Z(\cdot)$. Cette convergence est uniforme pour tout ϑ de K .*

Les propriétés de $Z_n(\cdot)$ décrites dans ces lemmes permettent de vérifier les conditions du Théorème A.2 de [6] qui induit le Théorème 3.2. Le Théorème 3.1 est une conséquence des Théorèmes 3.2 et A.3 de [6].

Références

- [1] M. Brown, Statistical analysis of nonhomogeneous Poisson processes, in: P.A.W. Lewis (Ed.), Stochastic Point Processes, Wiley, New York, 1972, pp. 67–89.
- [2] D.J. Daley, D. Vere-Jones, An Introduction to the Theory of Point Processes, Springer, New York, 1988.
- [3] C. Farinetta, Estimation paramétrique d'intensités de Processus de Poisson Spatiaux Non Homogènes, Thèse de doctorat de l'université du Maine, 2001.
- [4] I.A. Ibragimov, R.Z. Khasminskii, Statistical Estimation, Asymptotic Theory, Springer, New York, 1981.
- [5] A.F. Karr, Point Processes and their Statistical Inference, second edition, Marcel Dekker, New York, 1991.
- [6] Yu.A. Kutoyants, Statistical Inference for Spatial Poisson Processes, Springer, New York, 1998.
- [7] D.R. Snyder, M.J. Miller, Random Point Processes in Time and Space, Springer, New York, 1991.