



Probabilités/Statistique

Un contre-exemple à une conjecture de Hutchinson et Lai

A counterexample to a conjecture of Hutchinson and Lai

Patrick Munroe, Thomas Ransford, Christian Genest

Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, 1045, avenue de la Médecine, Québec (Québec), Canada G1V 0A6

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 14 décembre 2009

Accepté le 18 décembre 2009

Disponible sur Internet le 23 février 2010

Présenté par Paul Deheuvels

R É S U M É

En 1990, Hutchinson et Lai ont conjecturé que si un couple aléatoire (X, Y) est stochastiquement croissant en X et en Y , le rho de Spearman et le tau de Kendall sont tels que $1 + 3\tau \leq (\rho + 1)^2$. Cette conjecture est réfutée.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

In 1990, Hutchinson and Lai conjectured that if a random pair (X, Y) is stochastically increasing in X and Y , then Spearman's rho and Kendall's tau are such that $1 + 3\tau \leq (\rho + 1)^2$. This conjecture is disproved.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let (X, Y) be a pair of continuous random variables whose cumulative distribution function $H(x, y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y)$ has margins $F(x) = \Pr(X \leq x)$ and $G(y) = \Pr(Y \leq y)$, where $x, y \in \mathbb{R}$. To measure the degree of dependence between X and Y , it is common to employ Spearman's rho or Kendall's tau, defined by

$$\rho = -3 + 12 \iint F(x)G(y) dH(x, y), \quad \tau = -1 + 4 \iint H(x, y) dH(x, y).$$

The relation between ρ and τ has been the subject of numerous works since it was shown in [2,3] and [4] that $\tau - (1 - \tau^2) \leq 3\tau - 2\rho \leq \tau + (1 - \tau^2)$. These inequalities, of which an elementary proof was recently given in [5], are the best possible. They can only be improved if further conditions are imposed on the nature of the dependence between X and Y . For instance it was proved in [1] that $\rho \geq \tau \geq 0$ when X is both left-tail decreasing and right-tail increasing with respect to Y , in the sense of [8].

In the case where the distribution of (X, Y) is stochastically increasing, empirical calculations led Hutchinson and Lai to conjecture in [7] that

$$-1 + \sqrt{1 + 3\tau} \leq \rho \leq \min(3\tau/2, 2\tau - \tau^2). \quad (1)$$

By stochastically increasing is meant that the maps $t \mapsto \Pr(X > x | Y = t)$ and $t \mapsto \Pr(Y > y | X = t)$ are both increasing for all $x, y \in \mathbb{R}$. This condition is often fulfilled in practice.

It was checked in [7] that the inequalities (1) hold for a large number of commonly occurring bivariate distributions; in particular, they are valid for all extreme-value models [6]. An example was eventually found where $\rho \not\leq 3\tau/2$; see

Adresses e-mail : Patrick.Munroe.1@ulaval.ca (P. Munroe), Thomas.Ransford@mat.ulaval.ca (T. Ransford), Christian.Genest@mat.ulaval.ca (C. Genest).

Exercise 5.36 in [9]. To this day, however, the two other inequalities have neither been proved nor disproved for general stochastically increasing distributions.

This note brings to light the fact that there exist stochastically increasing distributions for which $-1 + \sqrt{1+3\tau} > \rho$, or, equivalently, $\rho^2 + 2\rho - 3\tau < 0$. The counterexample is furnished by a cumulative distribution function defined for all $x, y \in [0, 1]$ by

$$H_\theta(x, y) = x \wedge y \wedge (xy + \theta) = xy + (x \wedge y - xy) \wedge \theta$$

for a certain $\theta \in [0, 1/4]$, where $a \wedge b = \min(a, b)$.

The verification that H_θ is a stochastically increasing distribution for all $\theta \in [0, 1/4]$ is detailed in Section 2, and then in Section 3 it is shown that $\rho_\theta^2 + 2\rho_\theta - 3\tau_\theta < 0$ if $0 < \theta < e^{-12}/4 \approx 1.536 \times 10^{-6}$. Further features of the family (H_θ) are described in Section 4, including graphs of $\rho_\theta^2 + 2\rho_\theta - 3\tau_\theta$ against θ which illustrate just how delicate this example is. It seems reasonable to guess that an equally delicate argument may be needed to prove or disprove the last conjecture in [7], to the effect that $\rho \leq 2\tau - \tau^2$ for stochastically increasing bivariate distributions.

1. Introduction

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires continues dont la loi $H(x, y) = \Pr(X \leq x, Y \leq y)$ a pour marges $F(x) = \Pr(X \leq x)$ et $G(y) = \Pr(Y \leq y)$, où $x, y \in \mathbb{R}$. Pour mesurer le degré de dépendance entre X et Y , on fait souvent appel au rho de Spearman ou au tau de Kendall, définis par

$$\rho = -3 + 12 \iint F(x)G(y) dH(x, y), \quad \tau = -1 + 4 \iint H(x, y) dH(x, y).$$

La relation entre ρ et τ a fait l'objet de divers travaux depuis qu'il a été établi dans [2,3] et [4] que $\tau - (1 - \tau^2) \leq 3\tau - 2\rho \leq \tau + (1 - \tau^2)$. Ces inégalités, dont une démonstration élémentaire a récemment été fournie dans [5], sont les meilleures possibles. Elles ne peuvent être améliorées que si des conditions particulières sont imposées sur la nature de la dépendance entre X et Y . À titre d'exemple, il a été démontré dans [1] que $\rho \geq \tau \geq 0$ lorsque X est à la fois LTD et RTI par rapport à Y au sens de [8].

Dans le cas où la loi de (X, Y) est stochastiquement croissante, des calculs empiriques ont amené Hutchinson et Lai à conjecturer dans [7] que

$$-1 + \sqrt{1+3\tau} \leq \rho \leq \min(3\tau/2, 2\tau - \tau^2). \quad (2)$$

Par croissance stochastique, on entend le fait que les applications $t \mapsto \Pr(X > x|Y = t)$ et $t \mapsto \Pr(Y > y|X = t)$ sont toutes deux croissantes pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Cette condition est souvent remplie en pratique.

Il a été signalé dans [7] que les inégalités (2) valent pour un grand nombre de lois usuelles; elles ont notamment été prouvées dans [6] pour les modèles de valeurs extrêmes. On a éventuellement pu identifier un cas où $\rho \not\leq 3\tau/2$; voir l'exercice 5.36 dans [9]. À ce jour, les deux autres inégalités n'ont toutefois pu être confirmées ou infirmées pour l'ensemble des lois stochastiquement croissantes.

Le but de cette note est de mettre en lumière le fait qu'il existe des lois stochastiquement croissantes pour lesquelles on a $-1 + \sqrt{1+3\tau} > \rho$ ou, de façon équivalente, $\rho^2 + 2\rho - 3\tau < 0$. Le contre-exemple est fourni par une loi définie pour tous $x, y \in [0, 1]$ par

$$H_\theta(x, y) = x \wedge y \wedge (xy + \theta) = xy + (x \wedge y - xy) \wedge \theta$$

pour un certain $\theta \in [0, 1/4]$. Ici et dans la suite, $a \wedge b = \min(a, b)$. Ce résultat a été obtenu par tâtonnement en opérant de petites perturbations de la distribution H_0 , qui est à la fois un zéro et un point critique de la fonctionnelle $\rho^2 + 2\rho - 3\tau$.

On montre d'abord au §2 que H_θ est une loi stochastiquement croissante pour tout $\theta \in [0, 1/4]$. On vérifie ensuite au §3 que $\rho_\theta^2 + 2\rho_\theta - 3\tau_\theta < 0$ lorsque $0 < \theta < e^{-12}/4 \approx 1.536 \times 10^{-6}$. D'autres propriétés de la famille de lois (H_θ) sont évoquées en conclusion.

2. H_θ est une copule stochastiquement croissante si $\theta \in [0, 1/4]$

Il s'avère que pour tout $\theta \in [0, 1/4]$, la fonction H_θ est une copule, c'est-à-dire une fonction de répartition à marges uniformes sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour s'en assurer, on doit vérifier deux conditions : (i) $H_\theta(x, 0) = H_\theta(0, x) = 0$ et $H_\theta(x, 1) = H_\theta(1, x) = x$ pour tout $x \in [0, 1]$; (ii) $H_\theta(x_2, y_2) - H_\theta(x_2, y_1) - H_\theta(x_1, y_2) + H_\theta(x_1, y_1) \geq 0$ dès que $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$ et $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1$.

On se convainc facilement que la condition (i) est vraie. Pour vérifier la condition (ii), on pose $z_{ij} = x_i \wedge y_j - x_i y_j$ pour $i, j \in \{1, 2\}$ et on montre que

$$\Delta = (z_{22} \wedge \theta) - (z_{21} \wedge \theta) - (z_{12} \wedge \theta) + (z_{11} \wedge \theta) + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1)$$

est toujours positif. On considère pour ce faire six cas distincts :

1. Lorsque $z_{11} \geq \theta$ et $z_{22} \geq \theta$, on a

$$\Delta \geq \theta - \theta - \theta + \theta + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0.$$

2. Lorsque $z_{11} \geq \theta$, $z_{22} < \theta$ et $x_2 \geq y_2$, on a

$$\Delta \geq z_{22} - z_{21} - \theta + \theta + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = (1 - x_1)(y_2 - y_1) \geq 0.$$

3. Lorsque $z_{11} \geq \theta$, $z_{22} < \theta$ et $x_2 < y_2$, on a

$$\Delta \geq z_{22} - \theta - z_{12} + \theta + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)(1 - y_1) \geq 0.$$

4. Lorsque $z_{11} < \theta$, $z_{22} \geq \theta$ et $x_1 \geq y_1$, on a

$$\Delta \geq \theta - z_{21} - \theta + z_{11} + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = (x_2 - x_1)y_2 \geq 0.$$

5. Lorsque $z_{11} < \theta$, $z_{22} \geq \theta$ et $x_1 < y_1$, on a

$$\Delta \geq \theta - \theta - z_{12} + z_{11} + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = x_2(y_2 - y_1) \geq 0.$$

6. Lorsque $z_{11} < \theta$ et $z_{22} < \theta$, on a

$$\Delta \geq z_{22} - z_{21} - z_{12} + z_{11} + (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = x_2 \wedge y_2 - x_2 \wedge y_1 - x_1 \wedge y_2 + x_1 \wedge y_1 \geq 0.$$

Puisque $\Delta \geq 0$ dans tous les cas, on conclut que H_θ est bien une copule.

Par ailleurs, au vu du Corollaire 5.2.11 de [9], H_θ est stochastiquement croissante dans la mesure où les applications $t \mapsto H_\theta(x, t)$ et $t \mapsto H_\theta(t, y)$ sont concaves pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Ceci découle d'usages répétés du simple fait que si f et g sont des fonctions concaves d'une variable réelle, il en va de même de $f + g$ et de $f \wedge g$.

3. Le contre-exemple

On va maintenant montrer que (A) $0 \leq \rho_\theta \leq 12\theta$ et (B) $2\rho_\theta - 3\tau_\theta \leq 12\theta^2 \log(4\theta)$ pour tout $\theta \in [0, 1/4]$. Ceci permet de réfuter l'inégalité $\rho^2 + 2\rho - 3\tau \geq 0$, qui équivaut à celle de gauche dans l'énoncé (2). En effet, H_θ est une loi stochastiquement croissante pour laquelle, en vertu de (A) et (B),

$$\rho_\theta^2 + 2\rho_\theta - 3\tau_\theta \leq 144\theta^2 + 12\theta^2 \log(4\theta) = 12\theta^2 \{12 + \log(4\theta)\}.$$

Le membre de droite étant strictement négatif pour $0 < \theta < e^{-12}/4 \approx 1.536 \times 10^{-6}$, on peut conclure.

Étant donné $\theta \in [0, 1/4]$, on définit l'application $A_\theta : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ par

$$A_\theta(x, y) = H_\theta(x, y) - xy = (x \wedge y - xy) \wedge \theta$$

pour tous $x, y \in [0, 1]$. L'identité de Hoeffding permet alors d'écrire

$$\rho_\theta = 12 \iint A_\theta(x, y) \, dx \, dy.$$

L'énoncé (A) est une conséquence immédiate du fait que $0 \leq A_\theta(x, y) \leq \theta$ pour tous $x, y \in [0, 1]$. La démonstration de (B) est plus délicate. En faisant appel à l'équation 5.1.12 de [9], on trouve

$$\begin{aligned} \tau_\theta &= 1 - 4 \iint \frac{\partial H_\theta}{\partial x}(x, y) \frac{\partial H_\theta}{\partial y}(x, y) \, dx \, dy \\ &= 1 - 4 \iint \left\{ y + \frac{\partial A_\theta}{\partial x}(x, y) \right\} \left\{ x + \frac{\partial A_\theta}{\partial y}(x, y) \right\} \, dx \, dy \\ &= -4 \iint \left\{ x \frac{\partial A_\theta}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial A_\theta}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial A_\theta}{\partial x}(x, y) \frac{\partial A_\theta}{\partial y}(x, y) \right\} \, dx \, dy \\ &= 8 \iint A_\theta(x, y) \, dx \, dy - 4 \iint \frac{\partial A_\theta}{\partial x}(x, y) \frac{\partial A_\theta}{\partial y}(x, y) \, dx \, dy, \end{aligned}$$

la dernière identité découlant d'une intégration par parties. Par conséquent,

$$2\rho_\theta - 3\tau_\theta = 12 \iint \frac{\partial A_\theta}{\partial x}(x, y) \frac{\partial A_\theta}{\partial y}(x, y) \, dx \, dy.$$

Cette expression s'exprime comme la somme de deux termes correspondant aux domaines d'intégration $0 < x < y < 1$ et $0 < y < x < 1$. Par symétrie, ces deux intégrales sont égales. Ainsi,

$$\iint \frac{\partial A_\theta}{\partial x}(x, y) \frac{\partial A_\theta}{\partial y}(x, y) dx dy = 2 \int_0^1 \int_0^y \frac{\partial A_\theta}{\partial x}(x, y) \frac{\partial A_\theta}{\partial y}(x, y) dx dy.$$

Lorsque $0 < x < y < 1$, on trouve

$$A_\theta(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x(1-y) < \theta, \\ \theta & \text{si } x(1-y) > \theta, \end{cases}$$

et donc

$$\frac{\partial A_\theta}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 1-y & \text{si } x(1-y) < \theta, \\ 0 & \text{si } x(1-y) > \theta, \end{cases} \quad \frac{\partial A_\theta}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} -x & \text{si } x(1-y) < \theta, \\ 0 & \text{si } x(1-y) > \theta. \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \int_0^y \frac{\partial A_\theta}{\partial x}(x, y) \frac{\partial A_\theta}{\partial y}(x, y) dx dy &= -2 \int_0^1 \int_0^{y \wedge (\theta/(1-y))} (1-y)x dx dy \\ &= - \int_0^1 (1-y) \left(y \wedge \frac{\theta}{1-y} \right)^2 dy = - \int_0^1 \left\{ y^2(1-y) \wedge \frac{\theta^2}{1-y} \right\} dy. \end{aligned}$$

Puisque les racines de l'équation $y(1-y) = \theta$ sont $1/2 \pm \sqrt{1-4\theta}/2$, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ y^2(1-y) \wedge \frac{\theta^2}{1-y} \right\} dy &\geq \int_{(1-\sqrt{1-4\theta})/2}^{(1+\sqrt{1-4\theta})/2} \frac{\theta^2}{1-y} dy \\ &= \theta^2 \log \left(\frac{1+\sqrt{1-4\theta}}{1-\sqrt{1-4\theta}} \right) = \theta^2 \log \left\{ \frac{(1+\sqrt{1-4\theta})^2}{4\theta} \right\} \geq \theta^2 \log \left(\frac{1}{4\theta} \right). \end{aligned}$$

En combinant ces différents éléments, on conclut que $2\rho_\theta - 3\tau_\theta \leq 12\theta^2 \log(4\theta)$, ce qui achève la démonstration de (B).

4. Autres propriétés de H_θ

Les copules H_θ ont d'autres propriétés intéressantes. On note d'emblée que $H_0(x, y) = xy$ et $H_{1/4}(x, y) = x \wedge y$ pour tous $x, y \in [0, 1]$; ainsi, H_0 est la copule d'indépendance et $H_{1/4}$ la borne supérieure de Fréchet–Hoeffding.

Quand $\theta \in (0, 1/4)$, la loi H_θ comporte de parties singulière et absolument continue. Soient

$$\ell_\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4\theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4\theta}, \quad L_x = \frac{\theta}{1-x}, \quad U_x = 1 - \frac{\theta}{x}.$$

Le support de la partie singulière est alors donné par

$$S_\theta = \{(x, x): 0 \leq x \leq \ell_\theta\} \cup \{(x, x): u_\theta \leq x \leq 1\} \cup \{(x, L_x): \ell_\theta < x < u_\theta\} \cup \{(x, U_x): \ell_\theta < x < u_\theta\}.$$

Le graphe de cet ensemble est représenté à la Fig. 1.

De plus, la composante absolument continue de H_θ vaut 1 sur l'ensemble $\{(x, y): \ell_\theta < x < u_\theta \text{ et } L_x < y < U_x\}$ et s'annule partout ailleurs. La masse associée à la composante absolument continue est

$$\sqrt{1-4\theta} - 2\theta \log \left(\frac{1+\sqrt{1-4\theta}}{1-\sqrt{1-4\theta}} \right).$$

On note enfin que $H_{\theta_1}(x, y) \leq H_{\theta_2}(x, y)$ pour tous $x, y \in [0, 1]$, dès lors que $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1/4$. La famille de lois (H_θ) est donc ordonnée en dépendance positive par quadrant, ce qui entraîne que l'application $\theta \mapsto \kappa(H_\theta)$ est croissante pour toute mesure de concordance κ au sens de [10].

De fait, on vérifie sans peine que les applications

$$\theta \mapsto \rho_\theta = 1 - \sqrt{1-4\theta} + 10\theta\sqrt{1-4\theta} - 12\theta^2 \log \left(\frac{1+\sqrt{1-4\theta}}{1-\sqrt{1-4\theta}} \right),$$

et

$$\theta \mapsto \tau_\theta = 1 - \sqrt{1-4\theta} + 6\theta\sqrt{1-4\theta} - 4\theta^2 \log \left(\frac{1+\sqrt{1-4\theta}}{1-\sqrt{1-4\theta}} \right),$$

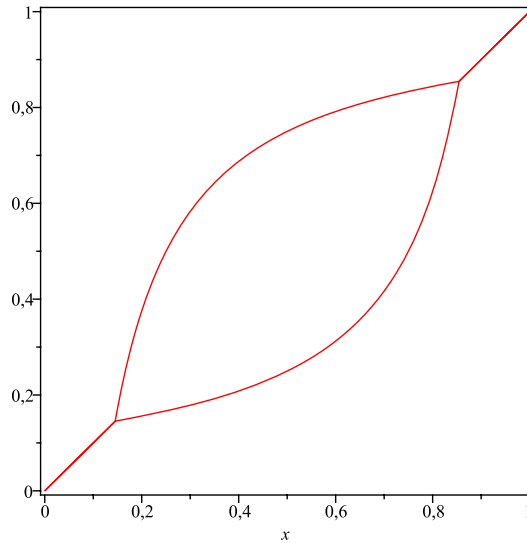


Fig. 1. Ensemble sur lequel la partie singulière de H_θ est concentrée lorsque $\theta \in (0, 1/4)$.
Fig. 1. Set on which the singular part of C_θ is concentrated when $\theta \in (0, 1/4)$.

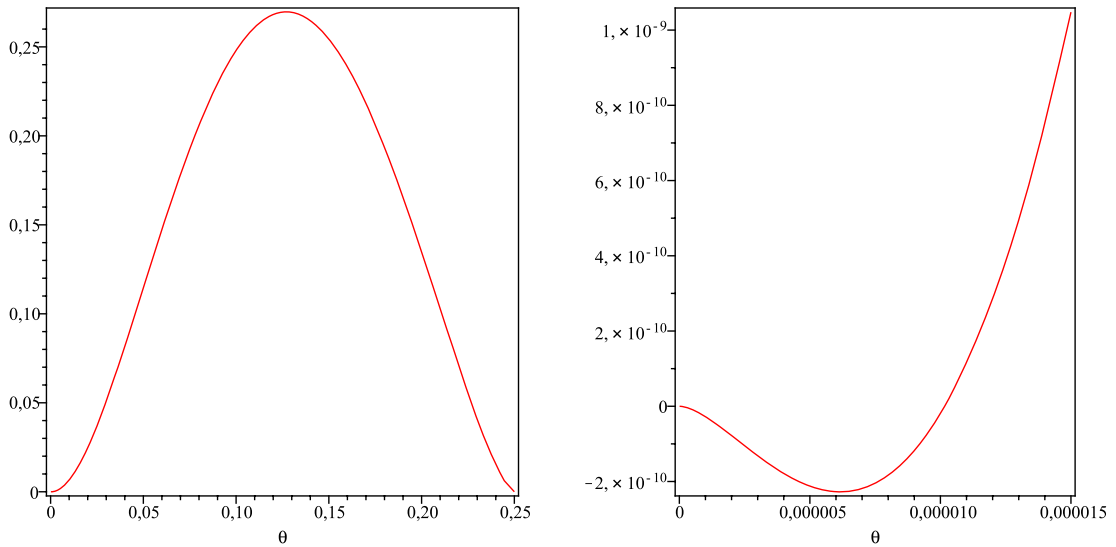


Fig. 2. Graphe de $\rho_\theta^2 + 2\rho_\theta - 3\tau_\theta$ lorsque $\theta \in [0, 1/4]$ (gauche) et $\theta \in [0, 1.5 \times 10^{-5}]$ (droite).
Fig. 2. Graph of $\rho_\theta^2 + 2\rho_\theta - 3\tau_\theta$ when $\theta \in [0, 1/4]$ (left) and $\theta \in [0, 1.5 \times 10^{-5}]$ (right).

sont croissantes. Ces formules permettent de tracer le graphe de l'application $\theta \mapsto \rho_\theta^2 + 2\rho_\theta - 3\tau_\theta$; voir la Fig. 2. Le graphe de gauche donne la fausse impression que la fonction est positive pour tout $\theta \in [0, 1/4]$; il faut restreindre le domaine à l'intervalle $[0, 1.5 \times 10^{-5}]$, comme sur le graphe de droite, pour que l'image soit concluante.

De toute évidence, le contre-exemple présenté ici fonctionne de justesse. Il y a donc fort à parier qu'un argument tout aussi délicat sera nécessaire pour établir ou réfuter la dernière conjecture de [7], à savoir que $\rho \leq 2\tau - \tau^2$ pour les lois bivariées stochastiquement croissantes.

Remerciements

Les auteurs remercient Mme Johanna Nešlehová pour ses commentaires et suggestions. Ces travaux ont été financés par le programme des Chaires de recherche du Canada, le Conseil de recherches en sciences naturelles et en génie du Canada, le Fonds québécois de la recherche sur la nature et les technologies, ainsi que l'Institut de finance mathématique de Montréal.

Références

- [1] P. Capéraà, C. Genest, Spearman's ρ is larger than Kendall's τ for positively dependent random variables, *J. Nonparametr. Statist.* 2 (1993) 183–194.
- [2] H.E. Daniels, Rank correlation and population models, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 12 (1950) 171–181.
- [3] H.E. Daniels, Note on Durbin and Stuart's formula for $E(r_s)$, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 13 (1951) 310.
- [4] J. Durbin, A. Stuart, Inversions and rank correlation coefficients, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 13 (1951) 303–309.
- [5] C. Genest, J. Nešlehová, Analytical proofs of classical inequalities between Spearman's ρ and Kendall's τ , *J. Statist. Plann. Inference* 139 (2009) 3795–3798.
- [6] W. Hürlimann, Hutchinson–Lai's conjecture for bivariate extreme value copulas, *Statist. Probab. Lett.* 61 (2003) 191–198.
- [7] T.P. Hutchinson, C.D. Lai, *Continuous Bivariate Distributions, Emphasising Applications*, Rumsby Scientific, Adelaide, 1990.
- [8] E.L. Lehmann, Some concepts of dependence, *Ann. Math. Statist.* 37 (1966) 1137–1153.
- [9] R.B. Nelsen, *An Introduction to Copulas*, Springer, New York, 1999.
- [10] M. Scarsini, On measures of concordance, *Stochastica* 8 (1984) 201–218.