



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Problèmes mathématiques de la mécanique

Aspects dynamiques du contact unilatéral entre un fluide et une structure

*Dynamical aspects of the unilateral contact between a fluid and a structure*Philippe Destuynder^a, Caroline Fabre^b^a Chaire de Calcul Scientifique, Conservatoire National des Arts et Métiers, 292 rue Saint Martin, Paris 75003, France^b Laboratoire de Mathématiques CNRS-UMR 8628, Université de Paris sud, bat. 425, 91400 Orsay, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 31 mars 2008

Accepté après révision le 13 janvier 2010

Disponible sur Internet le 13 février 2010

Présenté par Pierre-Louis Lions

R É S U M É

La modélisation du contact unilatéral entre une structure et un fluide est un phénomène assez complexe à décrire car la surface mouillée de la structure est inconnue et par ailleurs, les mouvements de cette dernière peuvent être très variés. Un modèle qui tente de prendre en compte les différentes natures d'impacts possibles est discuté dans cette note. Pour cela, nous introduisons deux modèles approchés par une technique de pénalité-intégration correspondant à deux situations extrêmes où les taux de restitution d'énergie après impact seraient de 0 ou de 1, modèles dont nous étudions le caractère bien posés et présentons l'analyse asymptotique par rapport au coefficient de pénalisation.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

The unilateral contact between a structure and a fluid is difficult to modelize for several reasons: first of all the wet surface of the structure is an unknown; secondly the coupling with the movements of the structure can be very complex and finally the interaction with the waves (even if the eigenfrequencies of the structure and the one of the fluids are very different) can be at the origin of very stiff solutions. This notes aims at giving a simple mathematical model based on two penalty-integration methods which enables one to reproduce the extreme cases where the energy release rate is 0 or 1. It is proved that this model is well posed and an asymptotic analysis versus the penalty parameter is carried out.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

A model describing the unilateral contact between a structure (for instance a boat) and a fluid (for instance the sea) is discussed in this Note. In order to point out the mathematical difficulties, we restrict ourselves to the case where the displacement of the body is vertical (see Fig. 1). Extensions of this model are given in [2] and we refer to [3] for a study of the three dimensional Wagner impact problem. The water surrounding the body is assumed to be incompressible and unviscid and it occupies at rest a volume Ω which is an open and bounded set of \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$) the boundary of which being $\partial\Omega$ with unit outward normal ν . Let us assume that $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_{00}$ where Γ_0 is the bottom, Γ_2 the free part of the fluid surface and Γ_{00} the part of the surface where the contact between the fluid and the structure may occur. Let us denote by $\Gamma_1 = \Gamma_2 \cup \Gamma_{00}$ the full surface of the fluid. The flow velocity can be modelled by a potential function—say φ ,

Adresses e-mail : philippe.destuynder@cnam.fr (P. Destuynder), caroline.fabre@u-psud.fr (C. Fabre).

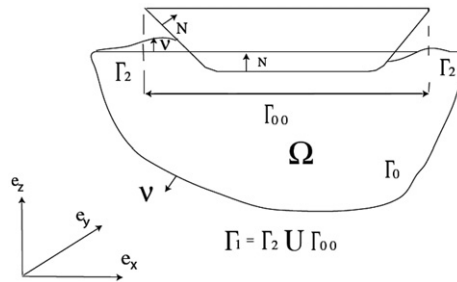


Fig. 1. Notations géométriques.

Fig. 1. Geometrical notations.

and the normal displacement of the free surface Γ_1 is denoted η . It is zero on the bottom Γ_0 . The (vertical) displacement of the body is denoted by $q(t) = d(t)e_z$ with $d = d(t) \in \mathbb{R}$ and it satisfies (1) where λ is the contact pressure of the body on the water and N the inward unit normal to the body. The displacement on the free surface η satisfies (2) and the velocity potential satisfies (5). Let us assume that the body–fluid contact is non sticking; therefore $\lambda \leq 0$ and the unilateral contact conditions are summarized in (10). The full model we are led to is then the variational inequality (11) where one should point out that the bilinear form a_{sf} is not always coercive on the admissible space for the displacements of the fluid.

The main difficulty in such an inequality relies in the fact that the contact force λ is singular and it is sometimes difficult to give a mathematical sense to the terms. The non well-posedness of such problems is known. Even for finite dimensional models, these difficulties appear and we refer to the works of M. Schatzman and L. Paoli for contributions in the case of ODE [7,6], and to those of A. Bamberger and M. Schatzman [1] in the case of a vibrating string. In order to justify our model, let us introduce two approximate equations called respectively ‘the weak model’ and ‘the strong model’ that we present directly in terms of the first integral (in time) of the displacements. This gives us more regularity. The first one is a classical penalty method for an inequality (11); it is analyzed in Theorem 2.1 where it is proved that its asymptotic behaviour allows one to obtain a solution of (11) that conserves the (natural) energy in the two-dimensional case. In dimension three, the asymptotic analysis is performed but the interpretation of the contact condition still leads to unsolved mathematical problems. Let us note that, in general, the limit problem do not have a unique solution (this can be seen in the very simple case of a spring). In Theorem 2.2, referring to the second model, we consider another approximate model which amounts to a localization in time of the term involving the contact force in the inequality (13) and leads to the new inequality (17). We prove that the unique solution of (17) converges to the unique solution of problem (19) which satisfies the contact conditions quoted in Theorem 2.2(iii). In this case, we get the well-posedness of the limit problem and a global meaning can also be recovered.

1. Introduction

La motivation de ce travail est l’étude de la tenue à la mer des bateaux et sa contribution est de prendre en compte le couplage unilatéral structure–fluide, la capillarité de la surface libre, les phénomènes de vagues et une loi de restitution d’énergie. Nous référons au livre [4] pour une étude prenant en compte les phénomènes de vagues et un contact bilatéral bateau–mer. Nous renvoyons aussi à [3] pour une étude du problème d’impact de Wagner en dimension 3. Nous proposons un modèle dont la formulation comporte des difficultés (mathématiques) dues à la singularité de la force de contact et à un défaut d’unicité. Pour en effectuer l’analyse, nous en considérons deux approximations régulières, dont les interprétations physiques des problèmes limites correspondent au problème de départ auquel on aurait ajouté la donnée d’une loi de restitution d’énergie. Ce phénomène rappelle fortement les résultats sur les modèles d’impacts de masses contre un obstacle obtenus par M. Schatzman [7] et L. Paoli et M. Schatzman [6] pour l’étude d’impacts ponctuels et A. Bamberger et M. Schatzman [1] pour une corde. C’est ce manque d’information relative à l’entropie du système, qui a constitué un point de départ à notre réflexion.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) un ouvert non vide borné de classe $W^{1,\infty}$ modélisant le volume occupé par le fluide à l’état d’équilibre. La frontière $\partial\Omega$ est supposée connexe et partagée en deux parties, Γ_1 et Γ_0 , respectant les conditions suivantes : Γ_1 est un ouvert non vide de $\partial\Omega$ et représente la surface libre dont une sous-partie ouverte, notée Γ_{00} , peut être en contact avec le bateau et l’autre Γ_2 est toujours libre. La surface de contact est inconnue mais on suppose qu’elle est un-ensemble de Γ_{00} . La partie Γ_0 est d’intérieur non vide dans $\partial\Omega$ et représente le fond de l’eau. On note ν la normale unitaire extérieure à la frontière de Ω (voir Fig. 1). Le gradient dans \mathbb{R}^n d’une fonction f est noté par ∇f et la composante tangentielle sur Γ_1 est $\nabla_s f$. Le laplacien dans \mathbb{R}^n est noté Δ et, sur Γ_1 , il est noté Δ_s . Le produit scalaire de deux vecteurs de \mathbb{R}^n est noté (\cdot, \cdot) , $(u, e_z) = u_z$ et $\frac{\partial f}{\partial t} = \dot{f}$

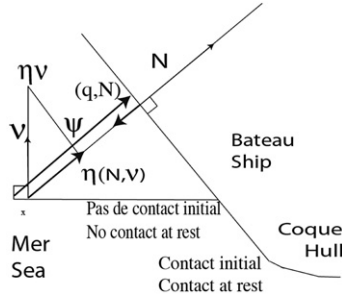


Fig. 2. Espace entre la surface et la structure.
Fig. 2. Gap between the structure and the fluid.

1.1. Modélisation de la structure

La structure de masse M est un corps rigide de normale unitaire rentrante N dont le seul mouvement pris en compte est le déplacement $q = q(t) = d(t)e_z \in \mathbb{R}^n$ et qui est solution de :

$$M\ddot{d}(t) = - \int_{\Gamma_{00}} \lambda N_z ds, \quad d(0) = d_0 \in \mathbb{R}, \quad \dot{d}(0) = d_1 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1.2. Modélisation du fluide et de la surface libre

Comme le fluide est supposé incompressible et irrotationnel, sa vitesse est modélisée à l'aide d'un potentiel de vitesse notée φ . Le déplacement normal sur la surface libre est notée η . Sur la partie Γ_{00} , l'équilibre des forces doit prendre en compte la pression λ exercée par la structure sur le fluide et nous supposons le contact non collant ($\lambda \leq 0$). La pression s'écrit : λN . Pour $\lambda = 0$, il n'y a pas de contact actif entre la structure et l'eau. L'équation d'équilibre de la surface libre est $(c(t)$ dépend de η , σ est la constante de capillarité, ρ_f est la masse volumique du fluide enfin g est la gravité) :

$$-\sigma \Delta_s \eta + g\eta v_z + \rho_f \dot{\varphi} + c(t) = \lambda N \cdot \nu \quad \text{dans } \Gamma_1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \nu_{\Gamma_1}} = 0 \quad \text{sur } \partial \Gamma_1. \tag{2}$$

On introduit les notations et espaces fonctionnels suivants : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la dualité entre $H^{-1/2}(\Gamma_1)$ et $H^{1/2}(\Gamma_1)$ et

$$H_0^{-1/2} = \{v \in H^{-1/2}(\Gamma_1), \langle v, 1 \rangle = 0\}, \quad L_0^2 = L^2(\Gamma_1) \cap H_0^{-1/2}, \quad V = H^1(\Gamma_1) \cap L_0^2. \tag{3}$$

La formulation variationnelle traduisant l'équilibre de la surface libre est : trouver $\eta \in V$ tel que :

$$\forall v \in V, \quad a_{sf}(\eta, v) + \int_{\Gamma_1} \rho_f \dot{\varphi} v ds = \int_{\Gamma_1} \lambda N \cdot \nu v ds \quad \text{où } a_{sf}(\eta, v) = \int_{\Gamma_1} [\sigma \nabla_s \eta \cdot \nabla_s v + g v_z \eta v] ds. \tag{4}$$

La forme bilinéaire a_{sf} est continue sur V mais n'est pas forcément coercive sur V car v_z peut être négative. Par contre, elle est coercive au sens de Garding puisque l'on montre :

$$\exists a_0 \geq 0, \quad c_0 > 0, \quad \forall v \in V, \quad a_{sf}(v, v) + a_0 \|v\|_{-1/2, \Gamma_1}^2 \geq c_0 \|v\|_{1, \Gamma_1}^2,$$

où $\|\cdot\|_{1, \Gamma_1}$ est la norme dans $H^1(\Gamma_1)$ et $\|\cdot\|_{-1/2, \Gamma_1}$ celle dans $H_0^{-1/2}$. La normale unitaire dans la configuration déformée peut être approchée par ν . Nous obtenons ainsi pour la vitesse normale à la surface libre : $u = \dot{\eta} = (\nabla \varphi, \nu)$ et la condition aux limites sur Γ_1 devient $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \dot{\eta}$. On introduit l'opérateur Φ de $H_0^{-1/2}$ dans l'espace $\mathbb{V} = \{\psi \mid \psi \in H^1(\Omega), \int_{\Gamma_1} \psi = 0\}$ défini par $\Delta \Phi(g) = 0$ dans Ω et $\frac{\partial \Phi(g)}{\partial \nu} = g$ sur Γ_1 et $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0$ sur Γ_0 . On note m_{sf} le produit scalaire sur $H_0^{-1/2}$ défini par :

$$m_{sf}(g, h) = \rho_f \int_{\Omega} (\nabla \Phi(g), \nabla \Phi(h)) dx = \rho_f \langle g, \Phi_{\Gamma_1}(h) \rangle. \tag{5}$$

La formulation variationnelle satisfaite par le déplacement normal η s'écrit alors :

$$\forall v \in V, \quad m_{sf}(\ddot{\eta}, v) + a_{sf}(\eta, v) = \int_{\Gamma_{00}} \lambda N \cdot \nu v, \quad \eta(0) = \eta_0 \dot{\eta}(0) = \eta_1. \tag{6}$$

1.3. Modélisation du couplage surface du liquide – corps rigide

Nous choisissons ici une approximation de la condition de non pénétration de l'eau à l'intérieur du corps rigide (voir Fig. 2). Il y a en fait plusieurs façons de procéder mais toutes sont équivalentes au premier ordre. Soit ψ la fonction mesurant l'espace libre entre la surface libre et la structure dans la configuration d'équilibre mesurée suivant N . La fonction ψ est positive et on suppose qu'elle est régulière sur Γ_{00} . La condition de non pénétration s'écrit :

$$\eta N \cdot \nu \leq dN_z + \psi \quad \text{on } \Gamma_{00} \quad (7)$$

et nous supposons (condition qui n'est pas restrictive car en un point de contact, on a $\nu = N$) :

$$N \cdot \nu \geq n_0 > 0 \quad \text{on } \Gamma_{00}. \quad (8)$$

Enfin, on introduit l'ensemble convexe fermé non vide de $V \times \mathbb{R}$ des déplacements admissibles :

$$C = \{(v, p) \in V \times \mathbb{R}, N \cdot \nu v \leq pN_z + \psi \text{ on } \Gamma_{00}\}. \quad (9)$$

La condition de contact unilatéral entre la structure et la surface libre s'écrit :

$$\begin{cases} \text{(i)} & \lambda \leq 0, \quad \text{sur } \Gamma_{00} \times]0, T[, \\ \text{(ii)} & \eta N \cdot \nu \leq dN_z + \psi \quad \text{et} \quad \lambda[\eta N \cdot \nu - dN_z - \psi] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{00} \times]0, T[. \end{cases} \quad (10)$$

1.4. Le modèle couplé

La formulation variationnelle couplée devient : trouver $(\eta, q)(t) \in C$ tels que :

$$\forall (v, p) \in C, \quad M(\ddot{d}, p - d) + m_{sf}(\ddot{\eta}, v - \eta) + a_{sf}(\eta, v - \eta) \geq 0. \quad (11)$$

Une difficulté importante dans cette formulation vient de la singularité de la force de contact, ainsi il n'est pas aisé de donner un sens local aux termes et d'autre part, lorsque cela est fait, il n'y a en général pas unicité. Ces difficultés apparaissent déjà pour des modèles simples (même sans variable d'espace) d'impacts de masses contre un obstacle fixe. Nous renvoyons aux travaux de M. Schatzman [7] et L. Paoli et M. Schatzman [6] pour l'étude d'impacts ponctuels et à ceux de A. Bamberger et M. Schatzman [1] pour des études relatives à une corde vibrante.

2. Analyse mathématique

Nous introduisons deux modèles s'approchant du modèle mécanique et dont la justification précise provient d'une étude faite pour des ressorts. Le premier modèle, dit fort, correspond à une pénalisation classique de l'inégalité et on montre qu'il approche une solution conservant l'énergie. Le second modèle, dit faible, converge vers une solution qui absorbe complètement l'énergie. Ces deux situations (extrêmes en terme d'énergie) permettent d'envisager des modèles intermédiaires où le taux de restitution d'énergie serait compris entre 0 et 1. Afin de gagner en régularité, nous travaillons dans la suite avec des intégrales premières en temps et nous définissons les problèmes suivants :

Modèle fort : Trouver $(\eta^\varepsilon, d^\varepsilon)(t) \in V \times \mathbb{R}$ tels que : $\forall (v, p) \in V \times \mathbb{R}$

$$M\ddot{d}^\varepsilon p + m_{sf}(\ddot{\eta}^\varepsilon, v) + a_{sf}(\eta^\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{00}} [\eta^\varepsilon N \cdot \nu - d^\varepsilon N_z - \psi]^+ [vN \cdot \nu - pN_z] ds = 0. \quad (12)$$

On introduit $\mathbf{V} = V \times \mathbb{R}$ et $\mathbf{H} = H_0^{-1/2} \times \mathbb{R}$ et les deux formes bilinéaires définies respectivement sur \mathbf{H} et sur \mathbf{V} pour $X = (H, D)$ et $Y = (K, P)$: $\mathbf{M}(X, Y) = MD P + m_{sf}(H, K)$ et $\mathbf{A}(X, Y) = a_{sf}(H, K)$. L'intégrale première en temps du modèle devient : trouver $X^\varepsilon(t) = (H^\varepsilon(t), D^\varepsilon(t)) \in \mathbf{V}$ tel que : $\forall Y = (K, P) \in \mathbf{V}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\ddot{X}^\varepsilon, Y) + \mathbf{A}(X^\varepsilon, Y) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{00}} \left\{ \int_0^t [N \cdot \nu \dot{H}^\varepsilon - \dot{D}^\varepsilon N_z - \psi]^+ \right\} [KN \cdot \nu - PN_z] \\ = M\dot{d}^\varepsilon(0)P + m_{sf}(\dot{\eta}^\varepsilon(0), K) = \mathbf{M}((\eta_1, d_1), Y), \end{aligned} \quad (13)$$

avec les conditions initiales : $X^\varepsilon(0) = (0, 0)$, $\dot{X}^\varepsilon(0) = (\eta_0, d_0)$. On introduit l'énergie :

$$E_\varepsilon = \frac{1}{2} \left\{ M(\dot{d}^\varepsilon)^2 + m_{sf}(\dot{\eta}^\varepsilon, \dot{\eta}^\varepsilon) + a_{sf}(\eta^\varepsilon, \eta^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{00}} |(\eta^\varepsilon N \cdot \nu - d^\varepsilon N_z - \psi)^+|^2 ds \right\}$$

et l'intégrale de la pression de contact : $\Lambda^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t [\eta^\varepsilon N \cdot \nu - d^\varepsilon N_z - \psi]^+ dt$. On démontre dans [2] le suivant :

Théorème 2.1.

- (i) Soit $(\eta_0, \eta_1, d_0, d_1) \in V \times H_0^{-1/2} \times \mathbb{R}^2$. Il existe une unique solution $(H^\varepsilon(t), D^\varepsilon(t)) \in \mathbf{V}$ à (13) vérifiant $X^\varepsilon(0) = 0$ et $\dot{X}^\varepsilon(0) = (\eta_0, d_0)$. Sa dérivée en temps $(\eta^\varepsilon, q^\varepsilon)$ est l'unique solution de (12) et son énergie est conservée au cours du temps soit $\forall \varepsilon, \forall t \in [0, T], E_\varepsilon(t) = E_\varepsilon(0)$. On note $M_{eas}(\bar{A})$ le dual de $C(\bar{A})$.
- (ii) Si $(\eta_0, d_0) \in C$, à l'extraction d'une sous-suite près, on a les convergences faibles* suivantes lorsque ε tend vers 0 : $X^\varepsilon \rightharpoonup X^*$ dans $W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{V})$; $\ddot{X}^\varepsilon \rightharpoonup \ddot{X}^*$ dans $L^\infty(0, T; \mathbf{H})$; $\Lambda^\varepsilon \rightharpoonup \Lambda^*$ dans $L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_{00}))$ et dans $L^\infty(0, T; M_{eas}(\bar{\Gamma}_{00}))$ et $\dot{\Lambda}^\varepsilon \rightharpoonup \dot{\Lambda}^* \geq 0$ in $M_{eas}([0, T] \times \bar{\Gamma}_{00})$ où $X^*(t) = (H^*(t), D^*(t))$ et Λ^* vérifient $X^*(0) = (0, 0)$, $\dot{X}^*(0) = (\eta_0, d_0)$ et les deux assertions (on a posé $\eta^* = \dot{H}^*$ et $d^* = \dot{D}^*$)

$$\forall Y = (K, P) \in \mathbf{V}, \quad \mathbf{M}(\ddot{X}^*, Y) + \mathbf{A}(X^*, Y) + \langle \Lambda^*, [KN \cdot \nu - PN_z] \rangle = Md_1 P + m_{sf}(\eta_1, K), \quad (14)$$

$$\eta^* N \cdot \nu - d^* N_z - \psi \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_{00}, \quad \Lambda^* \geq 0 \quad \text{et} \quad \dot{\Lambda}^* \geq 0. \quad (15)$$

- (iii) Si $n = 2$, on a de plus,

$$\langle \dot{\Lambda}^*, \eta^* N \cdot \nu - d^* N_z - \psi \rangle_{\mathbf{M}([0, T] \times \bar{\Gamma}_{00}), C([0, T] \times \bar{\Gamma}_{00})} = 0 \quad (16)$$

et l'énergie de (η^*, d^*) est conservée au cours du temps.

Remarque 1. En dimension 2, le sens des conditions de contact (10) est clair mais il n'y a pas unicité du problème limite. En dimension 3, le sens et l'obtention de la condition de contact $\langle \dot{\Lambda}^*, [\eta^* N \cdot \nu - d^* N_z - \psi] \rangle = 0$ est encore un problème ouvert.

Modèle faible : Après localisation en temps de la force de contact dans (13), on obtient un modèle proche de ceux étudiés par J.L. Lions dans son livre [5] auquel nous nous référons amplement pour cette analyse (qui repose sur une propriété de monotonie).

On considère le problème : trouver $X^\varepsilon(t) = (H^\varepsilon(t), D^\varepsilon(t)) \in \mathbf{V}$ vérifiant pour tout $Y = (K, P) \in \mathbf{V}$

$$\mathbf{M}(\ddot{X}^\varepsilon, Y) + \mathbf{A}(X^\varepsilon, Y) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{00}} \{ [N \cdot \nu \dot{H}^\varepsilon - \dot{D}^\varepsilon N_z - \psi]^+ \} [KN \cdot \nu - PN_z] = \mathbf{M}((\eta_1, d_1), Y) \quad (17)$$

avec les conditions initiales : $X^\varepsilon(0) = (0, 0)$ et $\dot{X}^\varepsilon(0) = (\eta^\varepsilon(0), q^\varepsilon(0)) = (\eta_0, d_0)$. On introduit le convexe :

$$\mathbf{K}_1 = \{ Y \mid Y = (K, P) \in L^\infty(]0, T[; \mathbf{V}), KN \cdot \nu - PN_z - \psi \leq 0 \text{ sur } \Gamma_{00} \times]0, T[\} \quad (18)$$

et la force de contact $\Lambda^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} [\eta^\varepsilon N \cdot \nu - (N, q^\varepsilon) - \psi]^+$. On montre le

Théorème 2.2.

- (i) Soit $(\eta_0, \eta_1, d_0, d_1) \in V \times H_0^{-1/2} \times \mathbb{R}^2$. Il existe une unique solution $X^\varepsilon(t) = (H^\varepsilon(t), D^\varepsilon(t)) \in \mathbf{V}$ à (17) vérifiant $X^\varepsilon(0) = 0$ et $\dot{X}^\varepsilon(0) = (\eta_0, d_0)$.
- (ii) Si $(\eta_0, d_0) \in C$, on a les convergences faibles* suivantes lorsque ε tend vers 0 : $X^\varepsilon \rightharpoonup X^*$ dans $W^{1,\infty}(]0, T[; \mathbf{V})$; $\ddot{X}^\varepsilon \rightharpoonup \ddot{X}^*$ dans $L^\infty(0, T; \mathbf{H})$; $\Lambda^\varepsilon \rightharpoonup \Lambda^*$ dans $L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\Gamma_{00}))$ où $X^*(t) = (H^*(t), D^*(t))$ est l'unique solution de (on note $\mathbf{L}(Y) = \mathbf{M}((\eta_1, d_1), Y)$) :

$$\dot{X}^* \in \mathbf{K}_1 \quad \text{et} \quad \forall Y = (K, P) \in \mathbf{K}_1, \quad \int_0^T \mathbf{M}(\ddot{X}^*, Y - \dot{X}^*) + \mathbf{A}(X^*, Y - \dot{X}^*) \geq \int_0^T \mathbf{L}(Y - \dot{X}^*) \quad (19)$$

avec $X^*(0) = 0$, $\dot{X}^*(0) = (\eta_0, d_0)$.

- (iii) On a

$$\Lambda^* \geq 0 \quad \text{et} \quad \langle \Lambda^*, N \cdot \nu \dot{H}^* - \dot{D}^* N_z - \psi \rangle = 0. \quad (20)$$

Remarque 2. La condition (20) n'est pas la même que (10), cependant elle permet de donner un sens aux conditions de contacts. En dimension 2, on donne un sens local à (20) justifiant (10) grâce à l'injection compacte de $H^1(\Gamma_1)$ dans $C(\Gamma_1)$ et on montre que $\dot{\Lambda}^*$ est nulle sur tout ouvert où $N \cdot \nu \dot{H}^* - \dot{D}^* N_z - \psi < 0$. En dimension 3, on peut donner un sens « local » en se restreignant à des segments de la surface libre. Ce second modèle a l'avantage de ne pas perdre l'unicité à limite. Par ailleurs, dans le cas du ressort, on peut montrer qu'il correspond à la solution du problème de contact unilatéral qui absorbe complètement l'énergie après le premier impact.

Références

- [1] A. Bamberger, M. Schatzman, New results on the vibrating string with a continuous obstacle, *SIAM J. Math. Anal.* 14 (3) (1983) 560–595.
- [2] Ph. Destuynder, C. Fabre, A modelling of slamming, springing and whipping for ships, *CPAA* 8 (1) (2009) 209–235.
- [3] Th. Gazzola, A. Korobkin, Sime Malenica, Yves-Marie Scolan, Three-dimensional Wagner problem using variational inequalities, in: *Proceedings of the 20th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, 2005.
- [4] A.J. Hermans, G.C. Hsiao, R. Timman, *Water Waves and Ship Hydrodynamics*, Delft University Press, The Netherlands, 1985.
- [5] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [6] L. Paoli, M. Schatzman, Penalty approximation for dynamical systems submitted to multiple non-smooth constraints, *Multibody System Dynamics* 8 (2002) 347–366.
- [7] M. Schatzman, A class of nonlinear equations of second order time, *Nonlinear Analysis, TMA* 2 (1978) 335–373.