



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Analyse mathématique

Approximation forte des ensembles dans $BV(\Omega)$ par des ensembles à frontière C^1

Strong approximation of sets in $BV(\Omega)$ by sets with C^1 boundary

Thierry Quentin de Gromard

Université Paris Sud 11, Mathématique, Bâtiment 425, 91405 Orsay Cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 6 juillet 2009

Accepté le 15 février 2010

Présenté par Jean-Pierre Kahane

RÉSUMÉ

Nous montrons qu'un ensemble E de périmètre fini dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^N peut être approché, au sens de la norme de $BV(\Omega)$, par un ensemble dont la frontière est une hypersurface C^1 ; plus précisément, la frontière essentielle de E et la frontière de l'ensemble approchant ne diffèrent que d'un ensemble de mesure \mathcal{H}_{N-1} arbitrairement petite.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

We prove that a set E of finite perimeter in an open set Ω of \mathbb{R}^N may be approached, in the sense of the $BV(\Omega)$ norm, by mean of a set whose boundary is a C^1 hypersurface; more precisely, the essential boundary of E and the boundary of the approximating set differ only from a set of arbitrary small \mathcal{H}_{N-1} measure.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Nous avons prouvé dans [3] qu'un ensemble de périmètre fini dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^N ($N \geq 2$) peut être approché, au sens de la norme de $BV(\Omega)$, par un ensemble dont la frontière est contenue dans une réunion finie d'hypersurfaces C^1 . Nous modifions ici légèrement l'ensemble approximant construit dans [3], de façon à rendre deux à deux transverses les frontières des ensembles intervenant dans cette construction, en s'assurant de plus qu'elles sont C^∞ là où on veut « lisser » une réunion ou une intersection de ces ensembles. Cette opération repose en effet implicitement sur le théorème de Sard, qui réclame pour les fonctions de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} une régularité C^k d'ordre $k > 1$ (il suffit de prendre $k \geq N$). Elle permet d'obtenir un nouvel ensemble, dont la frontière est constituée d'une seule hypersurface C^1 , et qui approche encore l'ensemble de périmètre fini initial au sens de la norme de $BV(\Omega)$ ainsi qu'en un sens de métrique euclidienne.

2. Notations et résultat principal

Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$). Notons χ_E sa fonction caractéristique. Si E est mesurable, on note $m_N(E)$ ou $m(E)$ sa mesure de Lebesgue. Pour un ouvert Ω de \mathbb{R}^N et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ on pose (avec l'abus de langage habituel) :

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \phi(x) \, dx \mid \phi = (\phi_1, \dots, \phi_N) \in C_0^1(\Omega)^N, \sum_{1 \leq i \leq N} \phi_i^2 \leq 1 \right\},$$

Adresse e-mail : thierry.quentin@math.u-psud.fr.

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} |Du| < \infty \right\}, \quad BV_{\text{loc}}(\Omega) = \left\{ u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \mid \int_{\Omega'} |Du| < \infty \text{ pour tout ouvert } \Omega' \Subset \Omega \right\}.$$

Lorsque $u \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$, on note Du la mesure de Radon vectorielle définie par $\forall \phi \in C_0^1(\Omega)^N \int \phi \cdot Du = - \int u(x) \operatorname{div} \phi(x) dx$ et on note $|Du|$ la mesure variation totale associée à la mesure Du .¹

On pose $\mathcal{P}_{\Omega}(E) = \int_{\Omega} |D\chi_E|$; on dit que E est un ensemble de périmètre fini (resp. de périmètre localement fini) dans Ω si E est mesurable et $\mathcal{P}_{\Omega}(E) < \infty$ (resp. $\chi_E \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$). Soit E un ensemble de périmètre localement fini dans Ω . D'après le théorème de Besicovitch, on a $D\chi_E = n_E |D\chi_E|$ où n_E est le vecteur défini en tout point de la frontière réduite de E dans Ω , notée $\Omega \cap \mathcal{F}^*E$, i.e. l'ensemble des $x \in \Omega$ tels que

$$\forall \rho > 0 \quad |D\chi_E|(B(x, \rho)) > 0, \quad n_E(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{D\chi_E(B(x, \rho))}{|D\chi_E|(B(x, \rho))} \text{ existe, } |n_E(x)| = 1,$$

où on note $B(x, \rho)$ (resp. $Q(x, \rho)$) la boule ouverte (resp. le cube ouvert) de \mathbb{R}^N de centre x et de rayon ρ , et parfois plus brièvement $B_{\rho} = B(0, \rho)$, et on pose $n_E(x) = 0$ si $x \in \Omega \setminus \mathcal{F}^*E$.

Si \mathcal{H}_{N-1} est la mesure de Hausdorff $(N-1)$ -dimensionnelle, on a : $|D\chi_E| = \chi_{\Omega \cap \mathcal{F}^*E} \mathcal{H}_{N-1}$, $\Omega \cap \mathcal{F}^*E \subset \Omega \cap \partial^*E \subset \Omega \cap \partial E$ et $\mathcal{H}_{N-1}(\Omega \cap (\partial^*E \setminus \mathcal{F}^*E)) = 0$, où ∂E désigne la frontière topologique de E , et ∂^*E désigne sa frontière essentielle, i.e. le complémentaire des points de densité de E et de $(\mathbb{R}^N \setminus E)$ (on renvoie à [1] pour l'étude des ensembles de périmètre fini et des fonctions appartenant à $BV(\Omega)$).

Pour $g \in C^1(\Omega)$, on note $R_g = \{x \in \Omega \mid g(x) \geq 0\}$. Si 0 est une valeur régulière de g (i.e. $Dg(x) \neq 0$ quand $g(x) = 0$), ce qu'on note $g \pitchfork 0$, alors R_g est de périmètre localement fini dans Ω , $\Omega \cap \mathcal{F}^*R_g = \Omega \cap \partial R_g = \{g = 0\}^2$ est une hypersurface C^1 , qui est C^∞ si $g \in C^\infty(\Omega)$, et $n_{R_g}(x) = Dg(x)/|Dg(x)|$ pour tout $x \in \Omega \cap \partial R_g$. Pour $p = 1$ ou $p = \infty$ et pour un ouvert $\Omega' \subset \Omega$, on définit les classes d'ensembles réguliers : $\mathcal{R}^p(\Omega) = \{R_g \mid g \in C^p(\Omega), g \pitchfork 0\}$, $\mathcal{R}_c^p(\Omega) = \{R_g \mid g \in C^p(\Omega), g \pitchfork 0, \{g = 0\} \text{ compact}\}$, $\mathcal{R}^{1,\infty}(\Omega, \Omega') = \{R_g \mid g \in C^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega'), g \pitchfork 0\}$.

Pour des sous-ensembles E et L de Ω , de périmètre localement fini dans Ω , et pour tout $\varepsilon > 0$, on convient d'écrire : $L \in v_\varepsilon(E)$ (ou encore L est v_ε -voisin de E) si

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & m(E \Delta L) < \varepsilon, \quad \text{soit } L \in v_\varepsilon^{(i)}(E) \\ \text{(ii)} & \int_{\Omega} |D(\chi_E - \chi_L)| < \varepsilon, \quad \text{soit } L \in v_\varepsilon^{(ii)}(E) \\ \text{(iii)} & L \subset E + B_\varepsilon \text{ et } \Omega \setminus L \subset (\Omega \setminus E) + B_\varepsilon, \quad \text{soit } L \in v_\varepsilon^{(iii)}(E). \end{array} \right.$$

On note aussi : $L \in w_\varepsilon(E)$ (ou encore L w_ε -voisin de E) si $L \in v_\varepsilon^{(i)}(E) \cap v_\varepsilon^{(ii)}(E)$.

Voici le résultat principal à démontrer :

Théorème 2.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Soit $E \subset \Omega$ un ensemble de périmètre fini dans Ω (i.e. $\chi_E \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ et $\int_{\Omega} |D\chi_E| < \infty$). Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $L \in \mathcal{R}^1(\Omega) \cap v_\varepsilon(E)$. Plus précisément, il existe un ensemble compact $C \subset \Omega$ tel que

$$C \subset \Omega \cap \mathcal{F}^*E \cap \partial L, \tag{2.1}$$

$$\forall x \in C, \quad n_E(x) = n_L(x), \tag{2.2}$$

$$|D\chi_E|(\Omega \setminus C) < \varepsilon, \tag{2.3}$$

$$L \in \mathcal{R}^{1,\infty}(\Omega, \Omega \setminus C). \tag{2.4}$$

3. Approximations de réunions et intersections finies d'ensembles réguliers

3.1. Résultat de transversalité

Deux sous-variétés X et Y de \mathbb{R}^N sont dites transverses, et on note $X \pitchfork Y$, si, en tout $a \in X \cap Y$, leurs espaces tangents $T_a X$ et $T_a Y$ vérifient $T_a X + T_a Y = \mathbb{R}^N$ (voir [2]). Du théorème de transversalité (voir [2] p. 69) ou directement du théorème de Sard (voir [2] p. 205), on peut déduire le

Théorème 3.1. Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^N , I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , X une sous-variété C^∞ de Ω et $\Sigma \in C^\infty(\Omega \times I)$. Pour tout $(x, t) \in \Omega \times I$, on suppose que $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}(x, t) \neq 0$ et on note $\Sigma_t(x) = \Sigma(x, t)$. Alors, pour presque tout $t \in I$, $\Sigma_t \pitchfork 0$ et $\{\Sigma_t = 0\} \pitchfork X$.

¹ Si $u \in C^1(\Omega)$, $Du(x)$ représente aussi le gradient ordinaire au point x , et $\int_{\Omega} |Du| = \int_{\Omega} |Du(x)| dx$.

² Si $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}$, nous remplacerons souvent la notation $\{x \in \Omega \mid g(x) \in A\}$ par $\{g \in A\}$.

3.2. Quelques propriétés des ensembles réguliers

Nous utilisons d'abord le théorème 3.1 pour obtenir des propriétés probablement classiques en géométrie différentielle, et de preuves très similaires entre elles. La proposition 3.4 ne fait intervenir qu'une partition de l'unité et la proposition 3.2.

Proposition 3.2. *Supposons C compact, Ω et Ω' ouverts de \mathbb{R}^N , $C \subset \Omega' \subset \Omega$, et soit $f \in C^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega' \setminus C)$, avec $f \not\equiv 0$, $\{f = 0\}$ compact et $C \subset \{f = 0\} \subset \Omega'$. Alors il existe $h \in C^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega \setminus C)$ tel que $h \not\equiv 0$, $R_h = R_f$ et que $\{|h| \leq 1\}$ soit compact et inclus dans Ω' .*

Preuve résumée. Soient U, V ouverts tels que $\{f = 0\} \subset U \Subset V \Subset \Omega'$ et $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta|_{\bar{V}} = 1$, $(\text{support } \theta) \subset \Omega'$. Pour tout $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, posons $\Sigma(x, t) = \theta(x)f(x) + t(1 - \theta(x)) \text{sgn } f(x)$. Or $\alpha = \sup_{\bar{V}} |f| > 0$ car $f \not\equiv 0$, et $\text{sgn } f$ est localement constant sur $\Omega \setminus \bar{U}$. Par le théorème 3.1, on montre qu'on peut choisir t , hors d'un ensemble négligeable, tel que $t > \alpha$ et $h = \Sigma(\cdot, t) \in C^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega \setminus C)$, $h \not\equiv 0$ et $E = R_h$. Enfin $\{|h| \leq \alpha\} \subset (\text{support } \theta)$, donc $\{|h| \leq \alpha\}$ est compact $\subset \Omega'$. \square

Proposition 3.3. *Soient $E \in \mathcal{R}^\infty(\Omega)$, V un ouvert relativement compact dans Ω et (X_q) une suite de sous-variétés C^∞ de Ω avec $(\Omega \cap \partial E) \not\subset X_q$ ($q = 1, 2, \dots$). Alors il existe $E' \in \mathcal{R}_c^\infty(\Omega)$ tel que $E' \cap V = E \cap V$ et que $(\Omega \cap \partial E') \not\subset X_q$ ($q = 1, 2, \dots$).*

Proposition 3.4. *Supposons E compact, $E \subset V$, V ouvert de Ω . Si $E \in \mathcal{R}^{1,\infty}(V, V \setminus C)$ où C est compact, $C \subset V \cap \partial E$, alors $E \in \mathcal{R}^{1,\infty}(\Omega, \Omega \setminus C)$. En particulier, si $E \in \mathcal{R}^\infty(V)$, alors $E \in \mathcal{R}^\infty(\Omega)$.*

3.3. Cas de deux ensembles réguliers

Pour approcher la réunion ou l'intersection de deux ensembles réguliers, nous utilisons quelques lemmes, mettant à profit des suggestions antérieures de Patrice Assouad. L'ouvert Ω étant fixé dans ce paragraphe ainsi que dans le suivant, si $S \subset \Omega$, nous écrivons souvent ∂S au lieu de $\Omega \cap \partial S$.

Lemme 3.5. *Supposons Ω ouvert de \mathbb{R}^N et $f, g \in C^1(\Omega)$, alors on a $R_f \cup R_g = R_{f \vee g}$, et, si de plus $f \not\equiv 0$, $g \not\equiv 0$, $\{f = 0\} \not\subset \{g = 0\}$ avec $K = \{f = 0\} \cap \{g = 0\} \neq \emptyset$, alors on a*

- (i) K est une sous-variété de dimension $N - 2$ de Ω .
- (ii) Il existe une application continue $\xi : K \rightarrow \mathbb{R}^N$ telle que $\forall x \in K, |\xi(x)| = 1, Df(x) \cdot \xi(x) > 0, Dg(x) \cdot \xi(x) > 0$.
- (iii) $\partial R_{f \vee g} = \{f \vee g = 0\}$ i.e. $\hat{R}_{f \vee g} = \{f \vee g > 0\} = \{f > 0\} \cup \{g > 0\}$.

Lemme 3.6. *Soit $\delta > 0$. Il existe $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tel que :*

- (i) $r \vee t \leq \sigma(r, t) < r \vee t + \delta$,
- (ii) $\sigma(r, t) = r \vee t$ si $|r - t| > \delta$,
- (iii) $\sigma'_r \geq 0, \sigma'_t \geq 0$ et $\sigma'_r + \sigma'_t = 1$.

Lemme 3.7. *Soient $\xi \in \mathbb{R}^N, |\xi| = 1$, B une boule ouverte de rayon ρ et $s \in C^1(B)$ tels que, pour tout $x \in B$, on ait $|Ds(x)| \leq M$ et $\xi \cdot Ds(x) > \eta$ (avec M et η réels > 0 fixés). Alors $\mathcal{H}_{N-1}(\{s = 0\} \cap B) \leq C_1(M, \eta, N)\rho^{N-1}$.*

Lemme 3.8. *Soit K une sous-variété compacte de dimension $N - 2$ de \mathbb{R}^N . Il existe $\rho_1(K) > 0$ tel que, si $\mathcal{B} = (B(x_i, \rho))$ est une famille de boules centrées sur K et de rayon $\rho \in]0, \rho_1(K)[$ telle que tout point de \mathbb{R}^N appartienne à au plus k boules de \mathcal{B} , alors $\text{card } \mathcal{B} \leq C_2(K, k, N)/\rho^{N-2}$.*

Théorème 3.9. *On suppose $\Omega' \subset \Omega$ ouverts de \mathbb{R}^N , F et G dans $\mathcal{R}^{1,\infty}(\Omega, \Omega')$ tels que ∂F compact inclus dans Ω' , $\partial F \not\subset \partial G$, $\partial F \not\subset X_q, \partial G \not\subset X_q$ ($q = 1, 2, \dots$) où (X_q) est une suite de sous-variétés C^∞ de Ω' . Soient $\varepsilon > 0$ et U un ouvert relativement compact tel que $\partial F \cap \partial G \subset U \subset \bar{U} \subset \Omega'$. On pose $E = F \cup G$. Il existe $L \in \mathcal{R}^{1,\infty}(\Omega, \Omega') \cap \nu_\varepsilon(E)$ tel que $E \subset L, L \setminus E \Subset U$ et $\partial L \not\subset X_q$ pour tout q .*

De même si $E' = F \cap G$, il existe $L' \in \mathcal{R}^{1,\infty}(\Omega, \Omega') \cap \nu_\varepsilon(E')$ tel que $L' \subset E', E' \setminus L' \Subset U$ et $\partial L' \not\subset X_q$ pour tout q .

Si on suppose de plus ∂F et ∂G compacts, on peut ajouter que ∂L et $\partial L'$ sont compacts.

Preuve résumée. Supposons $F = R_f, G = R_g$ avec $f, g \in C^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega')$, $f \not\equiv 0, g \not\equiv 0$ et $\{|f| \leq 1\}$ compact inclus dans Ω' (voir la proposition 3.2). On a $E = R_{f \vee g}$. On introduit K et ξ comme dans le lemme 3.5, puis $\eta > 0$ tel que $2\eta < \inf_K \inf(Df \cdot \xi, Dg \cdot \xi)$, et on choisit $\rho \in]0, \varepsilon[$ assez petit en particulier pour que $(|x - y| < \rho, x \in K) \implies (Df(y) \cdot \xi(x) > \eta \text{ et } Dg(y) \cdot \xi(x) > \eta)$. On choisit un recouvrement fini de K , d'ordre $\leq 3^N$, par des boules $B(x_i, \rho) \subset U, x_i \in K$. Il existe $\delta > 0$ tel que $K_\delta = \{-2\delta \leq f \leq 0\} \cap \{-2\delta \leq g \leq 0\} \subset V = \bigcup_i B(x_i, \rho)$. A ce δ , on associe $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ comme dans le lemme 3.6, et on pose $s = \sigma \circ (f, g)$. On a $s \in C^1(\Omega)$ et d'après le lemme 3.6, $Ds(x) \cdot \xi(x_i) > \eta$ pour tout $x \in B(x_i, \rho)$, donc $Ds(x) \neq 0$ si $x \in V$, ce qui conduit à $s \not\equiv 0$. On trouve que $s \in C^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega')$, $E \subset R_s$ et $R_s \setminus E \Subset V$. Tout en gardant ces propriétés, on

remplace s par ℓ de façon que $\{l=0\} \pitchfork X_q$ pour tout q : on applique le théorème 3.1 avec $\Sigma = s + t\theta$, $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta|_{K_\delta} = 1$, $(\text{support } \theta) \subset V$ et on pose $\ell = \Sigma(\cdot, t)$ pour un certain réel $t \in]0, \eta/(2\|D\theta\|_\infty)[$.

Comme ρ est assez petit, avec les lemmes 3.7 et 3.8, on montre que $L = R_\ell \in v_{c\varepsilon}(E)$. \square

Lemme 3.10. *Si on suppose $\chi_A, \chi_B \in \text{BV}_{\text{loc}}(\Omega)$, $A' \in w_\varepsilon(A)$, $A \Delta A' \Subset U$ où U est un ouvert de Ω et $|D\chi_B|(U) < \varepsilon$, alors $A' \cup B \in w_{2\varepsilon}(A \cup B)$ et $A' \cap B \in w_{2\varepsilon}(A \cap B)$.*

Si on suppose $A' \in v_\varepsilon(A)$ et de plus $A \subset A'$ (resp. $A' \subset A$), alors $A' \cup B \in v_{2\varepsilon}(A \cup B)$ (resp. $A' \cap B \in v_{2\varepsilon}(A \cap B)$).

Preuve résumée. De l'égalité $\chi_{A' \cup B} - \chi_{A \cup B} = (\chi_{A'} - \chi_A)(1 - \chi_B)$, on déduit $|D(\chi_{A' \cup B} - \chi_{A \cup B})|(\Omega) \leq |D(\chi_{A'} - \chi_A)|(\Omega) + |D\chi_B|(U)$. \square

3.4. Réunions finies de cubes

Soit Q un cube dans \mathbb{R}^N , $Q = \bigcap_{k=1}^N H_k$ où les H_k sont les intersections avec Ω de demi-espaces, et soit X une sous-variété de \mathbb{R}^N . Par abus de notation, on convient d'écrire $\partial Q \pitchfork X$ si $\partial H_k \pitchfork X$ pour tout $k = 1, \dots, n$, ainsi que $\partial Q \pitchfork \partial Q'$ si Q' est un cube tel que $\partial Q' \pitchfork \partial H_k$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

Ainsi que dans [3], une des raisons d'utiliser des cubes plutôt que des boules euclidiennes est de garder la possibilité de remplacer D , dans la définition des « voisinages » $v_\varepsilon(E)$ en section 2, par un opérateur de dérivation relatif à seulement certaines coordonnées. En utilisant la proposition 3.3, le théorème 3.9 et le lemme 3.10, on montre :

Proposition 3.11. *Supposons $0 < \delta < \rho$. Soient $Q_i = Q(x_i, \rho)$ ($i = 1, \dots, p$) des cubes tels que $\bar{Q}(x_i, \rho + \delta) \subset \Omega$ et (X_q) une suite de sous-variétés C^∞ de Ω vérifiant $\partial Q_i \pitchfork \partial Q_j$ si $i \neq j$ et $\partial Q_i \pitchfork X_q$ ($q = 1, 2, \dots$). Posons $U_\delta = (\bigcup_{i=1}^p Q(x_i, \rho + \delta)) \setminus (\bigcup_{i=1}^p \bar{Q}(x_i, \rho - \delta))$ et $E = \bigcup_{i=1}^p Q_i$. Alors il existe un ensemble compact $\tilde{E} \in \mathcal{R}_c^\infty(\Omega) \cap w_\delta(\tilde{E})$ tel que $\bigcup_{i=1}^p \bar{Q}(x_i, \rho - \delta) \subset \tilde{E} \subset \bigcup_{i=1}^p Q(x_i, \rho + \delta)$, $\partial \tilde{E} \subset U_\delta$, $\tilde{E} \Delta E \Subset U_\delta$, et $\partial \tilde{E} \pitchfork X_q$ (pour tout q).*

4. Résumé de la preuve du théorème 2.1

Soit $\varepsilon > 0$. Comme dans la preuve du théorème 3.1 de [3], on choisit des sous-ensembles C, F, V de Ω avec C compact, $C \subset \Omega \cap \mathcal{F}^*E$, $|D\chi_E|(\Omega \setminus C) < \varepsilon$, V ouvert relativement compact dans Ω , vérifiant les conditions :

$C \subset V \subset C + B_\varepsilon$, $F \in \mathcal{R}^{1,\infty}(V, V \setminus C)$, $n_F|_C = n_E|_C$, $|D\chi_F|(V \setminus C) < \varepsilon$, $m(V) < \varepsilon$, où $F = R_f$, f étant obtenue, par le théorème d'extension de Whitney, en prolongeant le germe $(0, n_E)$ de fonction C^1 défini sur C , en un élément de $C^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega \setminus C)$.

On choisit ensuite des réels ρ, ρ' avec $0 < \rho < \rho' < \varepsilon \wedge \text{dist}_\infty(C, V^c)$, un ensemble $G \in \mathcal{R}^\infty(\Omega) \cap v_\varepsilon^{(\text{iii})}(E)$ approchant E au sens de la convergence stricte (voir [1] et [3]), et un ensemble fini $\{x_i\}_{i \in I} \subset C$ de sorte que $C \subset \bigcup_{i \in I} Q(x_i, \rho/2)$, les deux familles $Q_i = Q(x_i, \rho)$, $i \in I$ et $Q'_i = Q(x_i, \rho')$, $i \in I$ soient d'ordre majoré, et que tous les ensembles Q_i, Q'_j, F et G aient des frontières d'intersections deux à deux transverses et contenues dans V . On pose $A = \Omega \setminus (\bigcup_{i \in I} \bar{Q}_i)$ et $B' = \bigcup_{i \in I} Q'_i$. On montre, par des méthodes très proches de celles de [3], que $L = (F \cap \bar{B}') \cup (G \cap \bar{A}) \in v_\varepsilon(E)$.

Posons $W(r) = \bigcup_{i \in I} Q(x_i, r)$, $U_\delta = W(\rho + \delta) \setminus \bar{W}(\rho - \delta)$, $U'_\delta = W(\rho' + \delta) \setminus \bar{W}(\rho' - \delta)$ et choisissons δ tel que $0 < \delta < \inf(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho' - \rho}{2})$, $\bar{W}(\rho' + \delta) \subset V$, $|D\chi_G|(U_\delta \cup U'_\delta) < \varepsilon$. En utilisant la proposition 3.11, on remplace \bar{B}' (resp. \bar{A}) par un ensemble w_δ -voisin $\tilde{B}' \in \mathcal{R}_c^\infty(\Omega)$ (resp. $\tilde{A} \in \mathcal{R}_c^\infty(\Omega)$) avec $\partial \tilde{B}' \cap \partial \tilde{A} = \emptyset$, et tel que $\partial \tilde{B}', \Omega \cap \partial \tilde{A}, V \cap \partial F, \Omega \cap \partial G$ aient des intersections deux à deux transverses contenues dans $V \setminus C$.

En appliquant le théorème 3.9 et la proposition 3.4, on remplace $\tilde{B}' \cap F$ (resp. $\tilde{A} \cap G$) par un ensemble v_ε -voisin $\tilde{F} \in \mathcal{R}^{1,\infty}(\Omega, \Omega \setminus C)$ (resp. $\tilde{G} \in \mathcal{R}^\infty(\Omega)$) en conservant les conditions de transversalité nécessaires, les modifications effectuées pour obtenir \tilde{B}' et \tilde{F} (resp. \tilde{A} et \tilde{G}) étant fortement incluses dans U'_δ (resp. U_δ). On remplace de même $\tilde{F} \cup \tilde{G}$ par $\tilde{L} \in \mathcal{R}^{1,\infty}(\Omega, \Omega \setminus C)$, avec modification incluse dans $W(\rho' + \delta) \setminus \bar{W}(\rho - \delta)$. Avec le lemme 3.10, on montre que $\tilde{L} \in w_{c\varepsilon}(L)$. On a $\tilde{L} \Delta L \subset V \subset C + B_\varepsilon$ et $C \subset \Omega \cap \partial L$, d'où $\tilde{L} \in v_\varepsilon^{(\text{iii})}(L)$. Or $L \in v_\varepsilon(E)$, donc $\tilde{L} \in v_{(1+c)\varepsilon}(E)$.

Remerciements

L'auteur remercie Raphaël Cerf pour ses constants encouragements et Patrice Assouad pour son aide efficace.

Références

- [1] L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Clarendon Press, Oxford, 2000.
- [2] V. Guillemin, A. Pollack, *Differential Topology*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1974.
- [3] T. Quentin de Gromard, *Strong approximation of sets in $\text{BV}(\Omega)$* , Proc. R. Soc. Edinburgh 138A (2008) 1291–1312.