



Analyse complexe/Géométrie analytique

Réduction de la conjecture de Hodge à une continuité

Reduction of the Hodge conjecture to a continuity

Michel Méo

I.E.C.N., Université de Nancy I, boulevard des Aiguillettes, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 7 décembre 2009

Accepté après révision le 24 mars 2010

Présenté par Jean-Pierre Demailly

R É S U M É

Les obstructions, pour une forme différentielle fermée dans une variété projective, à être cohomologue à un cycle algébrique à coefficients complexes, sont explicitées au moyen de la transformation de Chow. Elles s'expriment par l'orthogonalité, dans la variété elle-même, à des familles paramétrées par la Grassmannienne de courants complètement déterminés. Un paramètre ne crée pas d'obstruction si le sous-espace projectif associé coupe proprement la variété. Le plongement de la variété est dégénéré, pour avoir la caractérisation des courants associés aux cycles algébriques par la transformation de Chow. On étudie l'ensemble des périodes obtenu en faisant varier le paramètre, en particulier, on prouve un résultat de continuité, grâce à la constructibilité du polynôme de Bernstein. Quand la classe de cohomologie est rationnelle, on conjecture la connexité de cet ensemble.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

The obstructions, for a closed differential form on a projective manifold, to be cohomologous to an algebraic cycle with complex coefficients, are computed in terms of the Chow transformation. They can be expressed as an orthogonality condition, on the manifold itself, with families parametrized by the Grassmannian of currents which are completely determined. A parameter does not yield any obstruction if the associated projective subspace meets properly the manifold. The embedding of the manifold is degenerated, in view of applying the characterization of currents associated to algebraic cycles by the Chow transformation. We study the set of periods obtained when the parameter varies, in particular, we prove a continuity result, thanks to the constructibility of the Bernstein polynomial. When the cohomology class is rational, we conjecture that this set is connected.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Régularisation canonique du potentiel du courant transformé de Chow

Soit X une sous-variété complexe fermée connexe de l'espace projectif complexe \mathbb{P}_n , de dimension notée d_X . Pour $e_0 \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq d_X$, on note $G(p+1, V^*)$ la Grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension $p+1$ de V^* où V désigne la puissance symétrique $S^{e_0}(\mathbb{C}^{n+1})$.

Pour T un courant de bidimension (p, p) dans X , on considère le *transformé de Chow* $C'(T)$ d'ordre e_0 , qui est un courant de bidegré $(1, 1)$ dans $G(p+1, V^*) = G(q, V)$ avec $q = N - p$ et $\dim V = N + 1 = \binom{e_0+n}{n}$. On a $C'(T) = C(v_* T)$ où $v : X \hookrightarrow P(V)$ désigne la composée de l'injection $X \hookrightarrow \mathbb{P}_n$ avec le plongement de Veronese de degré e_0 de \mathbb{P}_n dans $P(V)$ et C la

Adresse e-mail : Michel.Meo@iecn.u-nancy.fr.

transformation de Chow des courants définis sur $\mathbb{P}_N = P(V)$. On a par définition $\mathcal{C}(\Theta) = pr_{2*}pr_1^*\Theta$ où $pr_1 : \Gamma \rightarrow P(V)$, $pr_2 : \Gamma \rightarrow G(q, V)$ sont les deux projections de la variété d'incidence Γ dans $P(V) \times G(q, V)$, formée des couples $([x], s)$ vérifiant $x \in s$.

Nous reprenons ici des idées étudiées dans [3,4], elles-mêmes issues en partie de suggestions faites par Jean-Pierre Demailly lors de mon travail de thèse [2].

Pour $d \in \mathbb{N}^*$, on note $V^{d,q}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômiales $f(z)$ sur V^q telles que $f(a_{11}z^1 + \dots + a_{1q}z^q, \dots, a_{q1}z^1 + \dots + a_{qq}z^q) = (\det A)^d f(z)$ pour toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq q}$ dans $M_q(\mathbb{C})$ et tout $z = (z^1, \dots, z^q)$ dans V^q . Pour des $d_\nu \in \mathbb{N}^*$ et des $f_\nu \in V^{d_\nu, q}$ non nulles, on note D_ν le diviseur de $G(q, V)$ défini par f_ν .

Dans la note [4], on construit une famille finie d'opérateurs différentiels linéaires $(\mathcal{P}_j)_{1 \leq j \leq j_0}$ sur $G(q, V)$ et une famille finie de fonctions $(\psi_j)_{1 \leq j \leq j_0}$ de classe C^∞ sur $G(q, V)$ tels que le diviseur $\sum_\nu c_\nu D_\nu$ avec des $c_\nu \in \mathbb{C}$ est la forme de Chow d'un cycle algébrique de X à coefficients complexes si et seulement si il existe $t \in \mathbb{C}$ vérifiant pour tout $1 \leq j \leq j_0$ l'égalité $\mathcal{P}_j(\sum_\nu c_\nu \log \|f_\nu\|) = t\psi_j$. On suppose désormais T fermé et on écrit $\mathcal{C}'(T) = (\deg T)\Omega + dd^c U$ avec U une distribution sur $G(q, V)$, Ω la $(1, 1)$ -forme fondamentale de la métrique sur $G(q, V)$ et $\deg T$ le degré de T par rapport à la métrique induite dans X par la forme de Fubini–Study ω dans $P(V)$.

Le résultat principal de [4] dit alors que s'il existe une suite $(U_m)_m$ de fonctions C^∞ dans $G(q, V)$ convergeant faiblement vers U telles que $\mathcal{P}_j(U_m) \rightarrow (\deg T)\psi_j$ dans l'espace $\mathcal{D}^k(G(q, V))$ des fonctions de classe C^k dans $G(q, V)$, pour tout $1 \leq j \leq j_0$ et pour un entier k assez grand, alors la classe de cohomologie $\{T\}$ contient un cycle algébrique à coefficients complexes.

On va dans un premier temps définir une régularisation canonique U_m de U pour laquelle on va discuter la nature de la convergence de $\mathcal{P}_j(U_m)$ vers $(\deg T)\psi_j$.

Pour $s \in G(q, V)$, rappelons comment obtenir une forme de Green (cf. [5]) du sous-espace projectif $P(s)$ de $P(V)$ associé à s . Partant de l'expression comme opérateur de Monge–Ampère du courant d'intégration $[P(s)] = (\omega + \frac{1}{2} dd^c \log \rho_s)^{p+1}$ avec $\rho_s([x]) = \{\text{dist}(x, s)\}^2 / (|x|^2)$ pour $x \in V \setminus \{0\}$ et utilisant que $(dd^c \log \rho_s)^{k+1} = dd^c \{-\frac{1}{k} (\frac{dd^c \rho_s}{\rho_s})^k\}$ pour $k \geq 1$, on a $[P(s)] = \omega^{p+1} + dd^c \gamma_s$ avec $\gamma_s = \frac{1}{2}(p+1)(\log \rho_s)\omega^p - \sum_{k'=1}^p \frac{\binom{p+1}{k'+1}}{k'2^{k'+1}} (\frac{dd^c \rho_s}{\rho_s})^{k'} \wedge \omega^{p-k'}$. Ajoutant un multiple de ω^p à l'expression précédente de γ_s , on peut supposer que $\int_{P(V)} \gamma_s \wedge \omega^q = 1$. Avec T de plus C^∞ , on peut alors prendre, pour presque tout $s \in G(q, V)$, $U(s) = \int_X T \wedge (\gamma_s|_X)$. Dans la définition de γ_s , remplaçant ρ_s par $\rho_s + \frac{1}{m}$, on obtient une régularisation $\gamma_{s,m}$ de γ_s . On pose $U_m(s) = \int_X T \wedge (\gamma_{s,m}|_X)$, alors comme au sens des distributions $\mathcal{P}_j(U) = (\deg T)\psi_j$, la suite $\mathcal{P}_j(U_m)$ converge faiblement dans $G(q, V)$ vers $(\deg T)\psi_j$. De plus pour presque tout $s \in G(q, V)$, $\mathcal{P}_j(U_m)(s)$ converge vers $(\deg T)\psi_j(s)$.

On peut écrire, pour une certaine constante C_0 ,

$$\mathcal{P}_j(\gamma_{s,m}) = C_0 \mathcal{P}_j(1)\omega^p + \log\left(\rho_s + \frac{1}{m}\right)\theta_{j,s,0} + \sum_{1 \leq l \leq d_j} \frac{\theta_{j,s,l}}{(\rho_s + \frac{1}{m})^l}$$

avec $\theta_{j,s,l}$ de classe C^∞ dans $P(V)$.

Dans le cas où $X \subset P(s)$,

$$\mathcal{P}_j(U_m)(s) = C_0(\deg T)\mathcal{P}_j(1) - (\log m) \int_X T \wedge \theta_{j,s,0}|_X + \sum_{1 \leq l \leq d_j} m^l \int_X T \wedge \theta_{j,s,l}|_X$$

a une limite finie lorsque $m \rightarrow \infty$ si et seulement si tous les coefficients sont nuls et alors cette limite est 0, de sorte que $\psi_j(s) = 0$. Les coefficients de \mathcal{P}_j sont divisibles par ψ_j , donc les $\theta_{j,s,l}$ le sont aussi : par exemple on a $\theta_{j,s,0} = \frac{1}{2}(p+1) \times \mathcal{P}_j(1)\omega^p$. Les $\theta_{j,s,l}$ sont donc bien nuls si $X \subset P(s)$. Les coefficients des dérivées partielles de \mathcal{P}_j se décomposent aussi sur les dérivées partielles de ψ_j , qui sont nulles en un tel s , lorsque l'ordre est inférieur ou égal à k . Ainsi, dans le cas où $X \subset P(s)$, la convergence a lieu indépendamment de T .

Dans le cas où $X \not\subset P(s)$, par le théorème de division de Hörmander–Lojasiewicz, les $\frac{1}{(\rho_s|_X)^k}$ sont des distributions bien définies dans X , donc $\mathcal{P}_j(\gamma_s|_X)$ existe comme courant dans X . Ainsi $\mathcal{P}_j(U)(s) = \int_X T \wedge \mathcal{P}_j(\gamma_s|_X)$ est défini et égal à $(\deg T)\psi_j(s)$.

La convergence de $\mathcal{P}_j(U_m)(s)$ vers $(\deg T)\psi_j(s)$ équivaut alors, en notant $\int_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge \mathcal{P}_j(\gamma_s|_X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\rho_s|_X > \epsilon} T \wedge \mathcal{P}_j(\gamma_s|_X)$, à $0 = \int_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge (\mathcal{P}_j(\gamma_s) - \psi_j(s)\omega^p)|_X$. Comme $\mathcal{P}_j(U) = (\deg T)\psi_j$ pour toute forme différentielle T de classe C^∞ fermée de bidimension (p, p) dans X , on peut écrire au sens des courants dans X toujours si $X \not\subset P(s)$, $\mathcal{P}_j(\gamma_s|_X) = \psi_j(s)\omega|_X^p + \partial(\rho_s|_X^{1-L} a_{j,s}) + \bar{\partial}(\rho_s|_X^{1-L} b_{j,s})$ avec $a_{j,s}$ de bidegré $(p-1, p)$ et $b_{j,s}$ de bidegré $(p, p-1)$. Notons $c_{j,s} = \partial\rho_s|_X \wedge a_{j,s} + \bar{\partial}\rho_s|_X \wedge b_{j,s}$.

Proposition A. La convergence en s tel que $X \not\subset P(s)$ équivaut à l'orthogonalité $\int_X T \wedge \Delta_{j,s} = 0$ avec un (p, p) -courant $\partial\bar{\partial}$ -fermé $\Delta_{j,s} = \mu_s c_{j,s}$ où μ_s est la distribution résidu en $-L$ du prolongement méromorphe $\lambda \rightarrow \rho_s^\lambda|_X$.

Démonstration. Pour presque tout $s \in G(q, V)$, la convergence de $\mathcal{P}_j(U_m)(s)$ vers $(\deg T)\psi_j(s)$ a lieu, ce qui équivaut à dire que l'intégrale $\int_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge \mathcal{P}_j(\gamma_s|_X)$ est égale à $(\deg T)\psi_j(s)$, en particulier cette intégrale est définie.

On utilise la formule de Stokes qui permet d'écrire

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\rho_{s|X} > \epsilon} T \wedge (\mathcal{P}_j(\gamma_s) - \psi_j(s)\omega^p)|_X = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon^{L-1}} \frac{d}{d\epsilon} \int_{\rho_{s|X} < \epsilon} T \wedge c_{j,s} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{L}{\epsilon^L} \int_{\rho_{s|X} < \epsilon} T \wedge c_{j,s}.$$

De façon classique par transformation de Mellin, c'est ensuite égal à $\lim_{\lambda \rightarrow -L^+} (\lambda + L) \int_X \rho_{s|X}^\lambda T \wedge c_{j,s}$.

Plus généralement, pour tout s tel que $X \not\subset P(s)$, le courant $\Delta_{j,s}$ est encore défini.

D'après [4], l'algébricité de $\{T\}$ s'exprime par $\int_{G(q,V)} U\varphi = 0$ pour toute fonction φ de classe C^∞ sur $G(q, V)$ s'écrivant $\varphi = \sum_j \langle \mathcal{P}_j, \beta_j \rangle$ avec les β_j des distributions d'ordres $\leq k$ telles que $\sum_j \int_{G(q,V)} \beta_j \psi_j = 0$. Or on a $\int_{G(q,V)} U\varphi = \int_{G(q,V)} \varphi(s) \int_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge \gamma_{s|X} = \sum_j \int_{G(q,V)} (\int_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge \mathcal{P}_j(\gamma_{s|X})) \beta_j(s)$. En prenant les β_j de classe C^∞ , on a $\int_{G(q,V)} U\varphi = 0$ sans hypothèse sur T et donc pour presque tout s , $\int_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge \mathcal{P}_j(\gamma_{s|X}) = (\deg T) \psi_j(s)$. En prenant les β_j quelconques, si $\{T\}$ est algébrique, on a cette dernière égalité pour tout s tel que $X \not\subset P(s)$, de sorte que la convergence en s est aussi une condition nécessaire d'algébricité.

Maintenant si $T = \partial\bar{\partial}S$ avec S de bidimension $(p+1, p+1)$, alors la classe de cohomologie $\{T\}$ est nulle donc algébrique et $\int_X T \wedge \Delta_{j,s} = 0$. Donc $\Delta_{j,s}$ est $\partial\bar{\partial}$ -fermé dans X . \square

La distribution μ_s est à support dans l'ensemble algébrique $(\rho_{s|X})^{-1}(0) = X \cap P(s)$ qui est de dimension $\geq d_X - p - 1$ avec égalité pour s générique dans $G(q, V)$.

Comme $\Delta_{j,s}$ est $\partial\bar{\partial}$ -fermé, on peut écrire grâce aux propriétés des variétés kähleriennes compactes $\psi_j(s)^{-1} \Delta_{j,s} = \Theta_{j,s} + \partial u_{j,s} + \bar{\partial} v_{j,s}$ avec $\Theta_{j,s}$ une (p, p) -forme harmonique dans X , $u_{j,s}$ un $(p-1, p)$ -courant dans X et $v_{j,s}$ un $(p, p-1)$ -courant dans X . La convergence en s équivaut ainsi à l'orthogonalité $\int_X T \wedge \Theta_{j,s} = 0$.

Identifions la fonction φ de la démonstration de la Proposition A à une forme différentielle de degré maximum sur $G(q, V)$ et écrivons $\varphi = dd^c \Phi$ avec une forme différentielle Φ telle que $\int_{G(q,V)} \Phi \wedge \Omega = 0$. Alors $\int_{G(q,V)} U\varphi = \int_X T \wedge \langle \mathcal{C}' \rangle(\Phi)$ avec $\langle \mathcal{C}' \rangle(\Phi)$ qui est $\partial\bar{\partial}$ -fermée dans X puisque ici encore T $\partial\bar{\partial}$ -exact entraîne $\{T\}$ algébrique. Écrivons ensuite $\langle \mathcal{C}' \rangle(\Phi) = H_\Phi$ modulo $(\text{im } \partial + \text{im } \bar{\partial})$ avec H_Φ harmonique, pour obtenir la formule cohomologique

$$\int_X \{T\} \{H_\Phi\} = \sum_j \int_{G(q,V)} \left(\int_X \{T\} \{ \Theta_{j,s} \} \right) \psi_j(s) \beta_j(s).$$

Proposition B. *Sans hypothèse sur sa classe de cohomologie, si T est réel, T s'écrit comme limite faible dans X d'une suite $(\sigma_l)_l$ de chaînes singulières C^∞ de dimension $2p$, fermées et à coefficients rationnels.*

Démonstration. Écrivons $T = \sum_i \lambda_i \varepsilon_i + dS$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$, ε_i chaîne singulière fermée à coefficients rationnels et S un courant réel dans X de dimension $2p+1$. Alors S est limite faible dans X d'une suite τ_l de chaînes singulières à coefficients réels. Cela résulte par bidualité du fait que si une forme différentielle g de degré $2p+1$ de classe C^∞ dans X est telle que $\int_\tau g = 0$ pour toute chaîne singulière τ , alors $g \equiv 0$. On peut supposer que τ_l est à coefficients rationnels et on pose $\sigma_l = \sum_i \lambda_{i,l} \varepsilon_i + d\tau_l$ avec $\lambda_{i,l}$ rationnel tendant vers λ_i . \square

Proposition C. *Si $\{T\}$ est rationnelle, alors $\int_X \{T\} \{ \Theta_{j,s} \} \in \mathbb{Q}$ pour tous j, s .*

Démonstration. On note $\kappa_s = \psi_j(s)^{-1} \mathcal{P}_j(\gamma_{s|X})$, alors l'intégrale $\int_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge \kappa_s = \int_X \{T\} \{ \Theta_{j,s} \} + \deg T$ ne dépend que de la classe de cohomologie $\{T\}$ et elle est égale à $\int_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge \tilde{\kappa}_s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\rho_{s|X} > \epsilon} T \wedge \tilde{\kappa}_s$ avec $\tilde{\kappa}_s = \omega_{|X}^p + d(\rho_{s|X}^{1-L}(a_{j,s} + b_{j,s})/\psi_j(s))$. Il existera T_0 un courant de dimension $2p$ fermé avec $\{T_0\}$ rationnelle tel que $\int_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge \tilde{\kappa}_s = \int_X T_0 \wedge \omega_{|X}^p = \deg T_0$. Ainsi $\int_X \{T\} \{ \Theta_{j,s} \} = \deg(T_0 - T)$ sera rationnel.

Pour la construction de T_0 , si T est réel, on utilise des chaînes singulières σ_l fermées dans X , à coefficients rationnels, telles que $T|_{X \setminus (X \cap P(s))} = \lim_l (\sigma_l|_{X \setminus (X \cap P(s))})$ et que $\int_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge \tilde{\kappa}_s = \lim_l \int_X \sigma_l \wedge \omega_{|X}^p$. On prend alors $T_0 = \lim_l \sigma_l$ et il reste à obtenir la rationalité.

Comme $\{ \text{classe de cohomologie de cycle algébrique de } X \}$ est engendré par $\{ \text{classe de cohomologie de cycle algébrique de } X \text{ à coefficients rationnels} \} \subset H^{d_X-p, d_X-p}(X) \cap H^{2(d_X-p)}(X, \mathbb{Q})$, ce sous-espace vectoriel s'obtient comme étant orthogonal à des éléments de $H^{p,p}(X)$ envoyant $H^{d_X-p, d_X-p}(X) \cap H^{2(d_X-p)}(X, \mathbb{Q})$ dans \mathbb{Q} . Quitte à changer \mathcal{P}_j , on peut supposer qu'ils sont de la forme $\{ \Theta_{j,s} \}$ et donc que \mathcal{P}_j vérifie : les $\{ \Theta_{j,s} \}$ envoient $H^{d_X-p, d_X-p}(X) \cap H^{2(d_X-p)}(X, \mathbb{Q})$ dans \mathbb{Q} . \square

2. Étude de la connexité de l'ensemble des périodes

Considérons d'abord le cas générique où s est tel que $\dim(X \cap P(s)) = d_X - p - 1$. D'après [6], en raison du bidegré, il y a un voisinage ouvert W de $X \cap P(s)$ dans X tel que $T|_W = dd^c S$ avec S une forme différentielle de bidegré $(d_X - p - 1, d_X - p - 1)$ de classe C^∞ dans W . Soit χ une fonction C^∞ à support compact dans W égale à 1 au voisinage de $X \cap P(s)$.

Alors $\tilde{T} = T - dd^c(\chi S)$ est cohomologue à T et nulle au voisinage de $X \cap P(s)$. Ainsi $C'(\tilde{T})$ est nul au voisinage de s et écrivant $C'(\tilde{T}) = (\deg T)\Omega + dd^c\tilde{U}$, le laplacien de \tilde{U} est C^∞ au voisinage de s donc \tilde{U} est lui-aussi C^∞ au voisinage de s . Dans ce cas s ne produit pas d'obstruction : on a bien $\int_X T \wedge \Delta_{j,s} = 0$ puisque c'est $\int_X \tilde{T} \wedge \Delta_{j,s}$ et que $\Delta_{j,s}$ est à support dans $X \cap P(s)$.

Pour cette fois s quelconque tel que $X \not\subset P(s)$, avec $F_{j,s} = T \wedge \psi_j(s)^{-1}c_{j,s}$, soit $h(s) = \int_X T \wedge \Theta_{j,s} = \int_X \mu_s F_{j,s}$.

Proposition D. *Il y a une stratification analytique réelle de $\{s \in G(q, V), X \not\subset P(s)\}$ telle que $h(s)$ est continue par rapport à s dans chaque strate.*

Démonstration. Il y a une stratification analytique réelle de $\{s \in G(q, V), X \not\subset P(s)\}$ telle que μ_s est continue par rapport à s dans chaque strate.

En effet, en choisissant l assez grand et en itérant l'équation de Bernstein, on a localement dans X

$$\lambda \rho_{s|X}^{\lambda-L} = \frac{Q_s(\lambda, y, \bar{y}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}})(\rho_{s|X}^{\lambda-L+l})}{\mathcal{B}_s(\lambda-L) \cdots \mathcal{B}_s(\lambda-L+l-1)}$$

où y est un système de coordonnées dans X , \mathcal{B}_s est le polynôme de Bernstein, $Q_s = \sum_i \lambda^i Q_{i,s}$ est polynômial en λ . Avec n_s l'ordre de 0 comme racine de $\mathcal{B}_s(\lambda-L) \cdots \mathcal{B}_s(\lambda-L+l-1)$, $h(s)$ s'obtient en intégrant dans X une forme différentielle définie par recollement par partition de l'unité à partir de $D(s)^{-1} \rho_{s|X}^{l-L} Q_{n_s,s}^* F_{j,s}$ pour une certaine fonction $D(s)$ provenant du dénominateur. Comme \mathcal{B}_s est indépendant de s dans une strate (cf. [1]), il en résulte qu'il y a continuité de $h(s)$ par rapport à s dans une strate. \square

Puisque les coefficients de \mathcal{P}_j sont divisibles par ψ_j , on peut écrire $\mathcal{P}_j = \psi_j \mathcal{M}_j$ avec \mathcal{M}_j un opérateur différentiel linéaire à coefficients C^∞ et on a $h(s) = \int_{X \setminus (X \cap P(s))} T \wedge (\mathcal{M}_j(\gamma_{s|X}) - \omega_{j|X}^p)$.

Conjecture. *Si $\{T\}$ est rationnelle, alors l'ensemble des valeurs $h(s)$ pour $s \in G(q, V)$ tel que $X \not\subset P(s)$ est connexe.*

Écrivons encore la fonction φ de la démonstration de la Proposition A sous la forme $\varphi = dd^c\Phi$ avec Φ forme différentielle de classe C^∞ de bidimension $(1, 1)$ sur $G(q, V)$ telle que $\int_{G(q, V)} \Phi \wedge \Omega = 0$. Alors la transformée de Radon $\mathcal{R}(\Phi)$, définie sur l'espace $\text{Div}(G(q, V)) = \bigcup_{d \geq 1} P(V^{d,q})$ des diviseurs à coefficients entiers > 0 de $G(q, V)$, est nulle sur $C_p(X) \subset \text{Div}(G(q, V))$ l'espace des cycles algébriques de X à coefficients entiers > 0 de dimension p . Si $\mathcal{R}(\Phi) \equiv 0$ alors $\Phi \in \text{im } \partial + \text{im } \bar{\partial}$ et donc $({}^t C')(\Phi) \in \text{im } \partial + \text{im } \bar{\partial}$ puis $\{H_\Phi\} = 0$. Il existe donc un noyau $K(\cdot, \cdot)$ sur $X \times \text{Div}(G(q, V))$ tel que

$$H_\Phi = \int_{[f] \in \text{Div}(G(q, V))} K(\cdot, [f]) \mathcal{R}(\Phi)([f]) \text{ modulo } (\text{im } \partial + \text{im } \bar{\partial}).$$

Écrivant ensuite $\mathcal{R}(\Phi)([f]) = \int_{G(q, V)} \varphi \log \|f\| = \sum_j \int_{G(q, V)} \mathcal{P}_j(\log \|f\|) \beta_j$, on obtient l'égalité à une constante près $h(s) = \int_{[f] \in \text{Div}(G(q, V)), f(s) \neq 0} \int_X T \wedge K(\cdot, [f]) w_j(f, s)$ avec $w_j(f, s) = \mathcal{M}_j(\log \|f\|) = \frac{\nu_j(f, s)}{\|f(s)\|^{2m_j}}$ où m_j est l'ordre de \mathcal{M}_j et ν_j est une fonction explicite. Ici la dimension de $\{[f] \in P(V^{d,q}), f(s) = 0\}$ est indépendante de s .

Soit $\|\cdot\|_0$ une norme hermitienne sur chaque $V^{d,q}$ telle que $\|f(s)\| \leq \|f\|_0$ pour tout $f \in V^{d,q}$ et soit $R_s([f]) = \frac{\|f(s)\|}{\|f\|_0}$. Alors à une constante près $h(s) = \int_0^1 \frac{\alpha(t, s)}{t^{2m_j}} dt$ avec $\alpha(t, s) dt$ qui est l'image directe par R_s de $(\int_X T \wedge K(\cdot, [f])) \nu_j(\frac{f}{\|f\|_0}, s)$ identifiée sur chaque $P(V^{d,q})$ à un courant de degré maximum. Pour $(t, s) \in]0, \frac{1}{2}] \times G(q, V)$, on a $\alpha(t, s) = \sum_{r, r'} \mathcal{L}_{r, r'}(s) t^r |\log t|^{r'} + \delta(t, s) t^{2m_j}$ où δ est bornée et où $(r, r') \in \mathbb{Q}^2$. À cause de la convergence de l'intégrale, $\mathcal{L}_{r, r'}(s) \neq 0$ pour un s , implique $r > 2m_j - 1$ ou $r = 2m_j - 1$ avec $r' < -1$.

Dans le développement asymptotique (r, r') parcourt un ensemble fini indépendant de s et donc si $\alpha(t, s)$ est continue là où $t \neq 0$, alors h est continue. Remarquons que $K(\cdot, [f]) = M T_0(\cdot, [f])$ où M est un opérateur différentiel linéaire à coefficients C^∞ en $[f]$ et $T_0(\cdot, [f])$ est un (p, p) -courant dans X dépendant continûment de $[f]$. Avec $j : C_p(X) \hookrightarrow \text{Div}(G(q, V))$ l'injection naturelle, la continuité de h équivaut à l'existence d'une mesure ν sur $C_p(X)$ telle que $M(\int_X T \wedge T_0(\cdot, [f])) - j_* \nu$ soit dans $\text{Ker}({}^t \mathcal{R})$ (cf. [4, Proposition 5]) ou encore ici soit L_{loc}^1 dans $\text{Div}(G(q, V))$ modulo un élément de $\text{Ker}({}^t \mathcal{R})$.

Références

- [1] R. Bahloul, Polynôme de Bernstein–Sato générique local, J. Math. Soc. Japan 58 (2006) 595–616.
- [2] M. Meo, Transformations intégrales pour les courants positifs fermés et théorie de l'intersection, Thèse Université de Grenoble I, Institut Fourier, 17 janvier 1996, 58 p.
- [3] M. Meo, Caractérisation des courants associés aux cycles algébriques par leur transformé de Chow, J. Math. Pures Appl. (9) 79 (1) (2000) 21–56.
- [4] M. Méo, Caractérisation fonctionnelle de la cohomologie algébrique d'une variété projective, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I 346 (2008) 1159–1162.
- [5] C. Soulé, Lectures on Arakelov Geometry, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 33 (1992).
- [6] J. Varouchas, Sur l'image d'une variété kählérienne compacte, Fonctions de plusieurs variables complexes V, Lecture Notes in Math. 1188 (1986) 245–259.