



Géométrie différentielle

Compatibilité d'un fibré de Dirac avec une connexion

Compatibility between an almost Dirac structure and a connection

Atallah Affane

Faculté de mathématiques, U.S.T.H.B, B.P. 32 El Alia, Bab Ezzouar, Alger, Algérie

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 27 septembre 2010

Accepté après révision le 14 octobre 2010

Disponible sur Internet le 29 octobre 2010

Présenté par Charles-Michel Marle

R É S U M É

Nous généralisons aux fibrés de Dirac et aux connexions affines la notion de compatibilité d'un champ de bivecteurs ou d'une 2-forme différentielle avec une pseudo-métrique. La compatibilité avec une connexion symétrique assure l'intégrabilité. Nous nous intéressons particulièrement au cas des fibrés de Dirac invariants sur un groupe de Lie ou sur un espace riemannien homogène.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

We extend to an almost Dirac structure and affine connections the notion of compatibility of a bivectors field or a 2-differential form with a pseudo-metric. Compatibility with a symmetric connection implies integrability. We shall be interested especially by such structures on Lie groups or Riemannian homogeneous spaces.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let L be an almost Dirac structure (see [3]) and ∇ an affine symmetric connection on a smooth manifold M . For two sections (X, α) and (Y, β) , the function $\alpha(Y)$ depends only on X and Y . So, $\varepsilon^L(X, Y) = \alpha(Y)$ defines a skew-symmetric 2-form on the projection $\rho(L)$ on TM . We say that the pair (L, ∇) is compatible when $[(X, \alpha) \in \Gamma(L)$ and $(Y, \beta) \in \Gamma(L)] \Rightarrow (\nabla_X Y, \nabla_X \beta) \in \Gamma(L)$. It is useful to formulate this compatibility by some property of the form ε^L .

Theorem 1. *The pair (L, ∇) is compatible if and only if*

- (i) $(X, Y) \in [\Gamma(\rho(L))]^2 \Rightarrow \nabla_X Y \in \Gamma(\rho(L))$,
- (ii) $(X, Y, Z) \in [\Gamma(\rho(L))]^3 \Rightarrow Z.[\varepsilon^L(X, Y)] = \varepsilon^L(\nabla_Z X, Y) + \varepsilon^L(X, \nabla_Z Y)$.

Corollary 2. *When the pair (L, ∇) is compatible, L is integrable.*

For an almost Dirac structure induced by a bivectors field $P \in A^2(M)$ (resp. a skew-symmetric 2-form $\omega \in \Omega^2(M)$), we find again a result of [1] (resp. [6]).

Lie groups and Riemannian homogeneous spaces give examples. Since we shall use invariance properties, we state precisely that an almost Dirac structure L is invariant by a diffeomorphism $\phi \in \text{Diff}(M)$ when $L_x = \mathcal{B}(d_x \phi)(L_{\phi(x)})$ or equivalently

Adresse e-mail : atallahaffane@gmail.com.

$L_{\phi(x)} = \mathcal{F}(d_x\phi)(L_x)$ where \mathcal{F} and \mathcal{B} are the push-forward and pull-back operators (see [2]). So, we consider a Lie group G and let ∇ be its natural connection defined by $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ for X and Y in its Lie algebra \mathcal{G} . $\{\partial_j\}_{j=1}^m$ is a basis of \mathcal{G} , $\{\partial^j\}_{j=1}^m$ its duale basis. Let c_{kl}^r be the constants of structure in this basis. The version of Theorem 1 for Lie groups is the following:

Theorem 3. *A left invariant almost Dirac structure compatible with the natural connection of G is the data of a subalgebra \mathcal{A} of \mathcal{G} and a 2-form $\varepsilon \in \Lambda^2 \mathcal{A}^*$ such that $\varepsilon([\mathcal{A}, \mathcal{A}], \mathcal{A}) = 0$.*

For example, we take $G = SL(3, \mathbf{R})$ and \mathcal{A} the Heisenberg Lie algebra. There is a basis $\{\partial_j\}_{j=1}^3$ of \mathcal{A} such that $[\partial_1, \partial_2] = \partial_3$, $[\partial_1, \partial_3] = 0$, $[\partial_2, \partial_3] = 0$. We can choose $\varepsilon = \partial^1 \wedge \partial^2$.

In the particular case of a left invariant bivectors field $P = P^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$ ($P^{ij} = -P^{ji} \in \mathbf{R}$) we have the

Proposition 4. *The almost Dirac structure L_P induced by P is compatible with the natural connection of G if and only if $P^{k\lambda} c_{\lambda\mu}^n P^{\mu l} = 0$, $\forall k, l, n$.*

When $m \geq 4$, we may suppose that $[\partial_1, \partial_2] = 0$. Then, we take $P = \partial_1 \otimes \partial_2 - \partial_2 \otimes \partial_1$. But for $G = SL(2, \mathbf{R})$ or $G = SO(3, \mathbf{R})$, L_P is compatible only if $P = 0$.

For a left invariant 2-form $\omega = \omega_{ij} \partial^i \wedge \partial^j$ ($\omega_{ij} = -\omega_{ji} \in \mathbf{R}$), the compatibility of the induced almost Dirac structure L_ω is equivalent to $\omega([\mathcal{G}, \mathcal{G}], \mathcal{G}) = 0$. Such a form ω on $SL(2, \mathbf{R})$ or $SO(3, \mathbf{R})$ must be trivial. For the Heisenberg group, one can take $\omega = \partial^1 \wedge \partial^2$.

In the end, we suppose that G carries a bi-invariant metric b . We consider a Riemannian homogeneous space $M = G/K = \{gK; g \in G\}$ where K is a closed and connected subgroup of G . In a canonical way, b induces a metric b' on M such that the projection $\pi : G \rightarrow M$ becomes a Riemannian submersion (see [5]). Let ∇' be the Levi-Civita connexion of b' and \mathcal{K} the Lie algebra of K . We have

Theorem 5. *A G -invariant almost Dirac structure on G/K which is compatible with ∇' is the data of a subalgebra \mathcal{A} of \mathcal{G} and a 2-form $\varepsilon \in \Lambda^2 \mathcal{A}^*$ invariant under $Ad(K)$ and such that $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$, $\varepsilon([\mathcal{A}, \mathcal{A}], \mathcal{A}) = 0$ and $\varepsilon(\mathcal{A}, \mathcal{K}) = 0$.*

1. Préliminaires

Une structure de Dirac linéaire (voir [3]) sur un espace vectoriel réel V est un sous-espace vectoriel L de $V \oplus V^*$ isotrope maximal pour la forme bilinéaire

$$\langle (X, \alpha), (Y, \beta) \rangle_+ = \frac{1}{2}(\alpha(Y) + \beta(X)), \quad (X, \alpha), (Y, \beta) \in V \oplus V^*.$$

On note $Dir(V)$ l'ensemble des structures de Dirac linéaires sur V . A toute application linéaire $\phi \in \mathcal{L}(V, V')$, correspondent (voir [2]) les applications $\mathcal{F}(\phi) : Dir(V) \rightarrow Dir(V')$ et $\mathcal{B}(\phi) : Dir(V') \rightarrow Dir(V)$ définies respectivement par

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\phi)(L) &= \{(\phi(X), \eta') / X \in V, \eta' \in V'^* \text{ et } (X, \phi^* \eta') \in L\}, \\ \mathcal{B}(\phi)(L') &= \{(X, \phi^* \eta') / X \in V, \eta' \in V'^* \text{ et } (\phi(X), \eta') \in L'\}. \end{aligned}$$

On a les formules $\mathcal{F}(\phi \circ \psi) = [\mathcal{F}(\phi)] \circ [\mathcal{F}(\psi)]$ et $\mathcal{B}(\phi \circ \psi) = [\mathcal{B}(\psi)] \circ [\mathcal{B}(\phi)]$.

Un fibré de Dirac (almost Dirac structure dans [3]) sur une variété différentiable M est un sous-fibré L de son fibré de Pontryaguine $TM = TM \oplus T^*M$ dont chaque fibre L_x est une structure de Dirac linéaire sur $T_x M$. On note ρ_M la projection de TM sur M et $\Gamma(\rho_M(L)) = \{X \in A^1(M) / (\exists \alpha \in \Omega^1(M)) / (X, \alpha) \in \Gamma(L)\}$. Pour X et $Y \in \Gamma(\rho_M(L))$, la fonction $\alpha(Y)$ ($= -\beta(X)$) ne dépend que de X et Y et définit donc une forme $C^\infty(M)$ -bilinéaire alternée ε^L . On distingue particulièrement trois types de fibré de Dirac. Un champ de bivecteurs $P \in A^2(M)$ induit un morphisme de fibrés $\#_P : T^*M \rightarrow TM$ par la formule $\beta(\#_P(\alpha)) = P(\alpha, \beta)$. Le graphe L_P de ce morphisme est un fibré de Dirac. De même une forme $\omega \in \Omega^2(M)$ induit un morphisme $\flat_\omega : TM \rightarrow T^*M$ dont le graphe L_ω est un fibré de Dirac. Enfin, un sous-fibré F de TM définit le fibré de Dirac L_F dont la fibre en x est $Ann(F_x) = \{(X, \alpha) / X \in F_x, \alpha \in T_x^*M \text{ et } \alpha|_{F_x} = 0\}$.

Un fibré de Dirac L est dit intégrable lorsqu'il est stable par le crochet de Courant défini sur TM par $[(X, \alpha), (Y, \beta)]_C = ([X, Y], \mathcal{L}_X \beta - \mathcal{L}_Y \alpha + \frac{1}{2}d(\alpha(Y) - \beta(X)))$. Dans [3], on montre que l'identité $\langle [(X, \alpha), (Y, \beta)]_C, (Z, \gamma) \rangle_+ = 0$ sur $\Gamma(L)$ est une condition nécessaire et suffisante pour l'intégrabilité de L . Mais, un calcul direct donne que sur $\Gamma(L)$, on a l'identité

$$\begin{aligned} \langle [(X, \alpha), (Y, \beta)]_C, (Z, \gamma) \rangle_+ &= X.\varepsilon^L(Y, Z) - Y.\varepsilon^L(X, Z) + Z.\varepsilon^L(X, Y) - \varepsilon^L([X, Y], Z) \\ &\quad + \varepsilon^L([X, Z], Y) - \varepsilon^L([Y, Z], X). \end{aligned}$$

On obtient alors la caractérisation suivante :

Proposition 1.1. *Un fibré de Dirac L est intégrable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

- (i) $X, Y \in \Gamma(\rho(L)) \Rightarrow [X, Y] \in \Gamma(\rho(L))$,
- (ii) $\forall X, Y, Z \in \Gamma(\rho(L))$,

$$X.\varepsilon^L(Y, Z) - Y.\varepsilon^L(X, Z) + Z.\varepsilon^L(X, Y) = \varepsilon^L([X, Y], Z) - \varepsilon^L([X, Z], Y) + \varepsilon^L([Y, Z], X).$$

Dans la section suivante, on définit la compatibilité d'un fibré de Dirac L avec une connexion affine ∇ . La compatibilité avec une connexion symétrique assure l'intégrabilité. Un champ $P \in A^2(M)$ induit une dérivation contravariante (voir [1] et [4]) sur T^*M par la formule $\nabla_\alpha^P \beta = \nabla_{\#_P(\alpha)} \beta$. La compatibilité de L_P avec ∇ se traduit par $\nabla^P P = 0$ et ainsi, nous retrouvons un résultat de [1]. De même, la compatibilité d'un fibré de Dirac de type L_ω équivaut à la condition $\nabla\omega = 0$ et on retrouve alors un résultat de [6]. Dans la Section 3, on caractérise les fibrés de Dirac invariants à gauche sur un groupe de Lie G et compatible avec la connexion naturelle définie par $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ pour $X, Y \in \mathcal{G}$. Des exemples sont donnés. Dans la dernière section, on établit le lien entre les fibrés de Dirac invariants à gauche et compatibles sur G et ceux G -invariants sur un espace riemannien homogène G/K et compatibles avec la connexion de Levi-Civita de ce dernier.

2. Compatibilité entre un fibré de Dirac et une connexion

On dira qu'un fibré de Dirac L est compatible avec une connexion affine ∇ lorsque

$$(X, \alpha) \text{ et } (Y, \beta) \in \Gamma(L) \Rightarrow (\nabla_X Y, \nabla_X \beta) \in \Gamma(L).$$

La compatibilité se lit sur la forme ε^L .

Proposition 2.1. *L est compatible avec ∇ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) $(X, Y) \in [\Gamma(\rho(L))]^2 \Rightarrow \nabla_X Y \in \Gamma(\rho(L))$.
- (ii) $(X, Y, Z) \in [\Gamma(\rho(L))]^3 \Rightarrow Z.[\varepsilon^L(X, Y)] - \varepsilon^L(\nabla_Z X, Y) - \varepsilon^L(X, \nabla_Z Y) = 0$.

Preuve. Supposons L compatible avec ∇ . Le point (i) est trivial. Pour (ii), choisissons α et β dans $\Omega^1(M)$ telles que (X, α) et (Y, β) soient dans $\Gamma(L)$. Donc $(\nabla_Z X, \nabla_Z \alpha)$ et $(\nabla_Z Y, \nabla_Z \beta)$ sont aussi dans $\Gamma(L)$. D'où $Z.[\varepsilon^L(X, Y)] = Z.[\alpha(Y)] = [\nabla_Z \alpha](Y) + \alpha(\nabla_Z Y) = \varepsilon^L(\nabla_Z X, Y) + \varepsilon^L(X, \nabla_Z Y)$. Réciproquement, soit (X, α) et (Y, β) dans $\Gamma(L)$. Pour une troisième section quelconque (Z, γ) , on a

$$\begin{aligned} 2\langle (\nabla_X Y, \nabla_X \beta), (Z, \gamma) \rangle_+ &= [\nabla_X \beta](Z) + \gamma(\nabla_X Y) = X.[\beta(Z)] - \beta(\nabla_X Z) + \gamma(\nabla_X Y) \\ &= X.[\varepsilon^L(Y, Z)] - \varepsilon^L(Y, \nabla_X Z) + \varepsilon^L(Z, \nabla_X Y) = 0. \end{aligned}$$

Comme, L contient son orthogonal pour la forme \langle, \rangle_+ , $(\nabla_X Y, \nabla_X \beta) \in \Gamma(L)$. \square

Corollaire 2.1. *Un fibré de Dirac compatible avec une connexion symétrique ∇ est intégrable.*

Preuve. La symétrie de ∇ assure la condition (i) de la Proposition 1.1. Puis, pour (X, Y, Z) dans $[\Gamma(\rho(L))]^3$, on pose $T(X, Y, Z) = X.[\varepsilon^L(Y, Z)] - \varepsilon^L(\nabla_X Y, Z) - \varepsilon^L(Y, \nabla_X Z)$. Puis, on écrit $T(X, Y, Z) + T(Y, Z, X) + T(Z, X, Y) = 0$. \square

Par exemple, on associe à tout champ de bivecteurs P une dérivation contravariante ∇^P sur T^*M en posant $\nabla_\alpha^P \beta = \nabla_{\#_P(\alpha)} \beta$ (voir [1] et [4]). Une condition nécessaire et suffisante pour la compatibilité d'un fibré de type L_P avec ∇ est l'équation $\nabla^P P = 0$. Pour un fibré de type L_ω , c'est l'équation $\nabla\omega = 0$. On retrouve ainsi des résultats de [1] et [6]. Enfin, un fibré de Dirac de type L_F est compatible avec une connexion symétrique ∇ si et seulement si la distribution F est involutive et son feuilletage totalement géodésique.

3. Le cas des structures invariantes sur un groupe de Lie

Dans cette section, G est un groupe de Lie de dimension m et \mathcal{G} son algèbre de Lie. On se donne une base $\{\partial_k\}_{k=1}^m$ de \mathcal{G} et soit $\{\partial^k\}_{k=1}^m$ sa base duale. On désigne par c_{rs}^n les constantes de structure de \mathcal{G} dans cette base. On sait que G porte une connexion affine symétrique naturelle définie par $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$ pour $X, Y \in \mathcal{G}$. De manière générale, on dit qu'un fibré de Dirac L sur une variété M est invariant par un difféomorphisme ϕ lorsque $L_{\phi(h)} = \mathcal{F}(d_h \phi)(L_h)$ ou, ce qui est équivalent $L_h = \mathcal{B}(d_h \phi)(L_{\phi(h)})$. Un fibré de Dirac sur G est dit invariant à gauche lorsqu'il l'est par les translations à gauche l_g . Il est dit compatible lorsqu'il l'est avec la connexion naturelle de G .

Proposition 3.1. *La donnée d'un fibré de Dirac L invariant à gauche et compatible sur G est équivalente à celle d'une sous-algèbre de Lie \mathcal{A} de \mathcal{G} et d'une 2-forme bilinéaire alternée $\varepsilon \in \Lambda^2 \mathcal{A}^*$ telle que $\varepsilon([X, Y], Z) = 0$ sur \mathcal{A} .*

Preuve. C'est une application de la Proposition 2.1. $\rho(L)$ est une distribution invariante à gauche et intégrable. Donc $\mathcal{A} = \rho(L_e)$ est une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} et la forme ε^L est invariante à gauche. On prend $\varepsilon = \varepsilon^L(e)$. La compatibilité donne l'identité $\varepsilon([X, Y], Z) + \varepsilon(Y, [X, Z]) = 0$ sur \mathcal{A} . D'un autre côté, l'intégrabilité de L donne par la Proposition 1.1 $\varepsilon([X, Y], Z) - \varepsilon([X, Z], Y) + \varepsilon([Y, Z], X) = 0$. D'où le résultat. Réciproquement, si on dispose de \mathcal{A} et de ε , en prenant $L_e = \{(X, \alpha)/X \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathcal{G}^*, \alpha(Y) = \varepsilon(X, Y) \forall Y \in \mathcal{A}\}$, puis $L_g = \mathcal{F}(d_e l_g)(L_e)$, on obtient un fibré de Dirac invariant à gauche et compatible. \square

Exemple 3.1. Sous-algèbre de Lie propre \mathcal{A} telle que $\dim[\mathcal{A}, \mathcal{A}] \leq \dim \mathcal{A} - 2$.

On peut trouver une forme non nulle $\varepsilon \in \Lambda^2 \mathcal{A}^*$ telle que $\varepsilon([\mathcal{A}, \mathcal{A}], \mathcal{A}) = 0$. On obtient un «vrai» fibré de Dirac compatible (il n'est ni du type L_P , ni du type L_ω , ni du type L_F). Ainsi, $sl(3, \mathbf{R})$ contient l'algèbre de Heisenberg. Celle-ci possède une base $\{\partial_k\}_{k=1}^3$ telle que $[\partial_1, \partial_2] = \partial_3$, $[\partial_1, \partial_3] = 0$, $[\partial_2, \partial_3] = 0$. On prend $\varepsilon = \partial^1 \wedge \partial^2$.

Examinons le cas des champs de bivecteurs. Soit des réels P^{ij} ($P^{ij} = -P^{ji}$) et considérons le champ de bivecteurs invariant à gauche $P = P^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$.

Proposition 3.2. *Le graphe L_P est compatible $\Leftrightarrow P^{k\lambda} c_{\lambda\mu}^n P^{\mu l} = 0, \forall k, l, n$.*

Preuve. $\Gamma(\rho(L_P))$ est engendré par $\{\#_P(\partial^k)\}_{k=1}^m$ et on a les formules

$$\#_P(\partial^k) = P^{k\lambda} \partial_\lambda, \quad \varepsilon^{L_P}(\#_P(\partial^k), \#_P(\partial^l)) = P^{lk}, \quad \nabla_{\partial_\lambda} \partial^s = -\frac{1}{2} c_{\lambda\mu}^s \partial^\mu, \quad \mathcal{L}_{\partial_\lambda} \partial^l = -c_{\lambda\mu}^l \partial^\mu.$$

Par définition, L_P est compatible si et seulement si $\#_P[\nabla_{\#_P(\partial^n)} \partial^l] = \nabla_{\#_P(\partial^n)}[\#_P \partial^l]$, ce qui équivaut à

$$P^{n\lambda} c_{\lambda\mu}^k P^{\mu l} + P^{n\lambda} c_{\lambda\mu}^l P^{k\mu} = 0. \quad (3.1)$$

Mais comme L_P est intégrable, on a (voir [1]) l'identité

$$\partial^n \{ \#_P([\partial^k, \partial^l]_P) - [\#_P(\partial^k), \#_P(\partial^l)] \} = 0$$

où $[\partial^k, \partial^l]_P = \mathcal{L}_{\#_P(\partial^k)} \partial^l - \mathcal{L}_{\#_P(\partial^l)} \partial^k$. Cette identité se traduit par

$$P^{k\lambda} c_{\lambda\mu}^l P^{\mu n} - P^{l\lambda} c_{\lambda\mu}^k P^{\mu n} + P^{k\lambda} c_{\lambda\mu}^n P^{l\mu} = 0. \quad (3.2)$$

D'où le résultat puisque $P^{k\lambda} c_{\lambda\mu}^l P^{\mu n} = P^{n\lambda} c_{\lambda\mu}^l P^{k\mu}$ et $P^{n\lambda} c_{\lambda\mu}^k P^{\mu l} = P^{\lambda l} c_{\lambda\mu}^k P^{\mu n}$. \square

Corollaire 3.1. *Si $m \geq 4$, G porte un champ de Poisson non nul, invariant à gauche et compatible.*

Preuve. Soit p la projection canonique de $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ sur $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ et $ad' : \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ telle que $ad' \circ p = ad$. On a $\dim \text{Ker } ad' \geq m^2 - m$. Ce noyau contient le sous-espace vectoriel S de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ constitué des éléments symétriques. Pour $m \geq 4$, $\dim \text{Ker } ad' > \dim S$. Donc, il existe deux éléments linéairement indépendants v et w de \mathcal{G} tels que $[v, w] = 0$. On peut donc supposer $[\partial_1, \partial_2] = 0$ et prendre $P = \partial_1 \otimes \partial_2 - \partial_2 \otimes \partial_1$. \square

Remarque 3.1. On suppose que pour tout (r, s) , il existe n tel que $c_{rs}^n \neq 0$ et $c_{\lambda\mu}^n = 0$ pour $\{\lambda, \mu\} \neq \{r, s\}$. Alors tout champ de bivecteurs invariant à gauche et compatible est nul.

En effet, pour tout couple (r, s) , on a $0 = P^{r\lambda} c_{\lambda\mu}^n P^{\mu s} = P^{rs} c_{sr}^n P^{rs}$ et donc $P^{rs} = 0$. On peut voir ainsi que les groupes $SO(3, \mathbf{R})$ et $SL(2, \mathbf{R})$ ne portent pas de champ de bivecteurs compatible non nul.

Comme cas particulier de la Proposition 3.1, on obtient la

Proposition 3.3. *Soit $\omega \in \Omega^2(G)$ invariante à gauche. Alors L_ω est compatible si et seulement si $\omega([X, Y], Z) = 0$ sur \mathcal{G} .*

Pour avoir $\omega \in \Omega^2(G)$ non nulle, invariante à gauche et telle que L_ω soit compatible, il faut et il suffit que $\dim[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \leq \dim \mathcal{G} - 2$.

4. Espaces riemanniens homogènes

On munit G d'une métrique bi-invariante b et donc compatible avec la connexion naturelle. Soit K un sous-groupe fermé connexe, \mathcal{K} son algèbre de Lie et π la projection de G sur $M = G/K = \{gK; g \in G\}$. Les distributions verticales et horizontales définies par $\mathcal{V}_g = \text{Ker } d_g\pi$ et $b_g(\mathcal{H}_g, \mathcal{V}_g) = 0$ sont invariantes à gauche et aussi par les translations à droite $r_k, k \in K$. On notera X^H le relèvement horizontal d'un champ de vecteurs X , $p_{\mathcal{H}}$ la projection orthogonale de TG sur \mathcal{H} et $i_{\mathcal{H}}$ l'inclusion de \mathcal{H} dans TG . En tout point $g \in G$, l'application $d_g\pi : \mathcal{H}_g \rightarrow T_{\pi(g)}M$ est un isomorphisme dont on notera π_g^{-1} l'inverse. On munit M d'une métrique b' de sorte que π soit une submersion riemannienne. On note ∇' sa connexion de Levi-Civita et Exp son exponentielle. Les identités $\nabla'_X Y = \pi_*(\nabla_{X^H} Y^H)$ et $[X^H, V] = 0, V \in \Gamma(\mathcal{V})$ (voir [5]) seront utiles pour ce qui suit.

Théorème 4.1. *La donnée sur M d'un fibré de Dirac L' compatible avec ∇' et G -invariant est équivalente à celle d'une sous-algèbre de Lie \mathcal{A} de \mathcal{G} contenant \mathcal{K} et d'une forme $\varepsilon \in \Lambda^2 \mathcal{A}^*$ invariante par $\text{Ad}(K)$ et telle que*

$$\varepsilon([\mathcal{A}, \mathcal{A}], \mathcal{A}) = 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon(\mathcal{A}, \mathcal{K}) = 0.$$

Preuve. Elle est basée sur la construction suivante. Pour tout point $g \in G$ on choisit une section s de G au dessus d'un voisinage ouvert U' de $p = \pi(g)$ et définie par $s(\text{Exp}_p \eta) = g \exp[d_g l_{g^{-1}} \circ \pi_g^{-1}(\eta)]$. Ainsi, les géodésiques issues de g avec une vitesse horizontale restent dans $s(U')$. Tout point h de $U = \pi^{-1}(U')$ s'écrit de manière unique $h = s(\pi(u))k(u)$ avec $k(u) \in K$. A partir d'une famille $\{\xi_i\} \subseteq T_e G$, on construit les champs Y_i, X_i et Z_i définis respectivement sur G, U et U' par $Z_i(g) = d_e l_g(\xi_i)$, $Y_i(u) = d_{s(\pi(u))} r_{k(u)}[Z_i(s(\pi(u)))]$ et $X_i(u') = d_{s(u')} \pi[Z_i(s(u'))]$. En fait, $Y_i = X_i^H$ si $\xi_i \in \mathcal{H}_e$, tandis que $Y_i \in \mathcal{V}$ et $X_i \equiv 0$ pour $\xi_i \in \mathcal{V}_e$. De plus, $Z_i = Y_i$ sur $s(U')$.

(i) Soit L' un fibré de Dirac G -invariant sur M et compatible avec la connexion ∇' . On prend $L_g = \mathcal{B}(d_g\pi)(L'_{\pi(g)})$ puis $L = \bigcup_{g \in G} L_g$. La G -invariance de L' assure que L est un fibré de Dirac invariant à gauche sur G . De plus, l'identité $\pi = \pi \circ r_k, k \in K$, entraîne que L est aussi invariant par $r_K = \{r_k; k \in K\}$ et donc par les automorphismes intérieurs $\text{Int}_k, k \in K$. Ainsi, le sous-espace $\mathcal{A} = \rho_G(L_e)$ et la forme $\varepsilon = \varepsilon_e^L$ sont invariants par $\text{Ad}(K)$. Comme visiblement $(\mathcal{K}, 0) \subseteq L_e$, alors $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$. De plus, L étant construit par pull-back, on a

$$\rho_G(L_g) = (d_g\pi)^{-1}(\rho_M(L'_{\pi(g)})) \quad \text{et} \quad \varepsilon_g^L(\xi, \xi') = \varepsilon_{\pi(g)}^{L'}(d_g\pi(\xi), d_g\pi(\xi')). \tag{4.1}$$

On en déduit tout de suite $\varepsilon(\mathcal{K}, \mathcal{A}) = 0$. Passons à la compatibilité de L . Comme la distribution $\rho_M(L')$ est intégrable, la distribution $\rho_G(L)$ l'est aussi et donc \mathcal{A} est une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} . Soit $g \in G, p = \pi(g)$ et $\{\eta_j\}$ une base de $T_p M$. Posons $\xi_j = (d_g l_{g^{-1}}) \circ \pi_g^{-1}(\eta_j)$ pour $j = 1, \dots, \dim M$ et complétons cette famille par une famille $\{\xi_j\}_{j=1+\dim M}^{\dim G}$ d'éléments verticaux en une base de \mathcal{A} . On dispose alors d'un repère $\{Z_j\}$ de $\rho_G(L)$ et d'une famille $\{X_j\} \subseteq \Gamma[\rho_M(L')]$ tels que $[\nabla'_{X_j} X_k](p) = d_g\pi[(\nabla_{Z_j} Z_k)(g)]$. Grâce à (4.1), on peut conclure par la Proposition 2.1 que L est compatible.

(ii) Réciproquement, à partir de \mathcal{A} et de ε vérifiant $\varepsilon([\mathcal{A}, \mathcal{A}], \mathcal{A}) = 0$, on construit un fibré de Dirac L sur G , invariant à gauche et compatible. L'invariance de \mathcal{A} et de ε par $\text{Ad}(K)$ assure l'invariance de L par r_K et donc espace $L'_{\pi(g)} = \mathcal{F}(d_g\pi)(L_g)$ ne dépend que de $\pi(g)$. D'où un fibré de Dirac G -invariant L' sur M . L'hypothèse $\varepsilon(\mathcal{A}, \mathcal{K}) = 0$ assure que si $(\xi, \eta) \in L_g$, alors $(d_g\pi(\xi), \eta \circ i_{\mathcal{H}} \circ \pi_g^{-1}) \in L'_{\pi(g)}$. On en déduit l'inclusion $d_g\pi[\rho_G(L_g)] \subseteq \rho_M[L'_{\pi(g)}]$ et l'identité $\varepsilon_g^L(\xi, \xi') \equiv \varepsilon_{\pi(g)}^{L'}(d_g\pi(\xi), d_g\pi(\xi'))$ sur $\rho_G(L_g)$.

Pour un point $p \in M$, on choisit $g \in \pi^{-1}(p)$ et une famille $\{\xi_i\} \subseteq T_e G$ telle que $d_e(\pi \circ l_g)(\xi_i)$ soit une base de L'_p . Les champs X_i obtenus constituent un repère de $\rho_M(L')$, les Y_i sont dans $\Gamma[\rho_G(L)]$, $X_i^H = Y_i$ et $[\nabla'_{X_j} X_k](p) = d_g\pi[(\nabla_{Y_j} Y_k)(g)]$. On conclut encore par la Proposition 2.1. \square

Références

- [1] M. Boucetta, Compatibilité des structures pseudo-riemanniennes et des structures de Poisson, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 333 (8) (2001) 763–768.
- [2] H. Bursztyn, O. Radko, Gauge equivalence of Dirac structures and symplectic groupoids, Ann. Inst. Fourier 53 (2003) 309–337.
- [3] J.T. Courant, Dirac manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 319 (1990) 631–661.
- [4] R.L. Fernandes, Connections in Poisson geometry. I. Holonomy and invariants, J. Differential Geom. 54 (2000) 303–366.
- [5] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, Riemannian Geometry, Springer-Verlag, 1987.
- [6] J. Rakotondralambo, Compatibilité d'une forme symplectique et d'une pseudo-métrique, Thèse de l'Université de Pau, Décembre 1997.