



Géométrie différentielle

Décomposition locale d'une structure bihamiltonienne en produit Kronecker-symplectique

Local decomposition into a Kronecker-symplectic product of a bihamiltonian structure

Francisco-Javier Turiel

Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Campus de Teatinos, 29071 Málaga, Espagne

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 25 octobre 2010

Accepté après révision le 19 novembre 2010

Disponible sur Internet le 28 décembre 2010

Présenté par Charles-Michel Marle

RÉSUMÉ

On montre qu'au voisinage de chaque point d'un ouvert dense, une structure bihamiltonienne, analytique réelle ou holomorphe, se décompose en un produit Kronecker-symplectique, lorsqu'une condition nécessaire portant sur le polynôme caractéristique du facteur symplectique est satisfaite.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

One shows that, around every point of a dense open set, a real analytic or holomorphic bihamiltonian structure decomposes into a Kronecker-symplectic product if a necessary condition on the characteristic polynomial of the symplectic factor holds.

© 2010 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Les variétés considérées seront réelles (au moins de classe C^∞) ou complexes (holomorphes), ainsi que les espaces vectoriels ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Deux structures de Poisson Λ et Λ_1 sur une variété M étant données on dira, suivant Magri (voir [2]), que (Λ, Λ_1) est une *structure bihamiltonienne* si $\Lambda + \Lambda_1$ est aussi une structure de Poisson. Les structures bihamiltoniennes donnent une méthode fort utile pour calculer des intégrales premières de certains champs hamiltoniens, mais elles ont aussi un intérêt géométrique par elles-mêmes.

Du point de vue algébrique, et selon la classification de Gelfand et Zakharevich (voir [1]), un couple de bivecteurs sur un espace vectoriel de dimension finie est essentiellement isomorphe au produit d'un couple de Kronecker et d'un couple symplectique (voir ci-dessous pour les définitions). Il est donc naturel de se demander si, au voisinage de chaque point, une structure bihamiltonienne est le produit d'une structure bihamiltonienne de Kronecker et d'une symplectique. Dans cette Note, on donne une réponse affirmative à cette question déjà classique pour les points d'un ouvert dense de M , dans le cas analytique réel et dans le cas complexe, lorsqu'une certaine condition nécessaire portant sur le polynôme caractéristique du facteur symplectique est satisfaite. Dans un prochain travail, on donnera un exemple qui montre que la classe C^∞ ne suffit pas, en général, à entraîner le résultat.

1. Quelques préliminaires

Rappelons tout d'abord la classification algébrique des couples de bivecteurs (voir [1,3]). Considérons un couple de bivecteurs (λ, λ_1) sur un espace vectoriel W de dimension finie. Par définition, le *rang de* (λ, λ_1) est le maximum des rangs de $(1-t)\lambda + t\lambda_1$, $t \in \mathbb{K}$; alors $\text{rang}(\lambda, \lambda_1) = \text{rang}((1-t)\lambda + t\lambda_1)$, sauf pour un nombre fini de valeurs de t qui est $\leq (\dim W)/2$.

Adresse e-mail : turiel@agt.cie.uma.es.

Un couple (λ, λ_1) est dit *maximal* lorsque $\text{rang } \lambda = \text{rang } \lambda_1 = \text{rang}(\lambda, \lambda_1)$. Un espace vectoriel de dimension impaire U étant donné, l'action de son groupe linéaire sur $(\Lambda U^2) \times (\Lambda U^2)$ possède une orbite ouverte et dense dont les éléments sont appelés les couples *élémentaires de Kronecker* (blocs de Kronecker); ils sont maximaux et leur rang est égal à $\dim U - 1$. Un couple maximal (μ, μ_1) sur un espace vectoriel U' est appelé *symplectique* (bloc de Jordan) si $\text{rang}(\mu, \mu_1) = \dim U'$; en particulier la dimension de U' sera paire. Par définition le *polynôme caractéristique de (μ, μ_1)* est celui l'endomorphisme K donné par la relation $\tau_1(u, v) = \tau(Ku, v)$, où (τ, τ_1) est le couple de formes symplectiques associé à (μ, μ_1) . Selon la classification de Gelfand et Zakharevich (voir [1,3]), tout couple maximal (λ, λ_1) est le produit de r couples élémentaires de Kronecker, où $r = \text{corang}(\lambda, \lambda_1)$, et d'un possible couple symplectique; bien sûr les facteurs sont uniques à isomorphisme et changement d'ordre près. Lorsque il n'y a pas de facteur symplectique, on dira que le couple est *Kronecker*. À son tour, une structure bihamiltonienne définie sur une variété M est dite *Kronecker*, respectivement *symplectique*, si en chaque point elle a ce caractère.

Soit $\mathbb{K}_P[t]$ l'algèbre des polynômes d'une variable à coefficients dans l'anneau des fonctions différentiables sur une variété P . Un polynôme $\varphi \in \mathbb{K}_P[t]$ sera appelé *irréductible* s'il est irréductible en chaque point. De manière analogue, on dira que $\varphi, \rho \in \mathbb{K}_P[t]$ sont *premiers entre eux* s'ils le sont partout. Un fibré vectoriel E sur P de dimension \tilde{m} , et un morphisme $H : E \rightarrow E$ étant donnés, on dira que le *type algébrique de H est constant* s'il existe des polynômes irréductibles $\varphi_1, \dots, \varphi_s \in \mathbb{K}_P[t]$, premiers entre eux, et des entiers positifs $a_{jk}, j = 1, \dots, r_k, k = 1, \dots, s$, tels que, pour chaque point p de la base, $\{\varphi_k^{a_{jk}}(p)\}, j = 1, \dots, r_k, k = 1, \dots, s$, soit la famille des diviseurs élémentaires de $H(p)$.

Supposons maintenant que E soit un feuilletage, c'est-à-dire un sous-fibré involutif de TP , et que $N_H = 0$ sur chaque feuille, où N_H est la torsion de Nijenhuis de H . Soit $g_j = \text{trace}(H^j)$; alors $j \, dg_{j+1} = (j+1) \, dg_j \circ H$ sur E . À rappeler que pour des raisons algébriques, chaque g_j est une fonction de $g_1, \dots, g_{\tilde{m}}$; par suite $\tilde{E} = \bigcap_{j=1}^{\tilde{m}} \text{Ker } dg_j$ est H -invariant. On dira qu'un point $p \in P$ est *régulier*, s'il existe un voisinage ouvert B de p tel que \tilde{E} sur B est un sous-fibré, donc un feuilletage, et que les types algébriques de H et de $H|_{\tilde{E}}$ sont constants. L'ensemble des point réguliers est un ouvert dense de P , qu'on appellera *l'ouvert régulier*.

2. Le résultat principal

Considérons une structure bihamiltonienne (Λ, Λ_1) sur une variété M de dimension m . L'ensemble des points de M au voisinage desquels le rang de (Λ, Λ_1) est constant, est un ouvert dense. Ainsi, pour simplifier, on supposera pour l'instant, $r = \text{corang}(\Lambda, \Lambda_1)$ localement constant et (Λ, Λ_1) maximal partout; cette dernière condition, quitte à remplacer, toujours localement, (Λ, Λ_1) par $((1-a)\Lambda + a\Lambda_1, (1-b)\Lambda + b\Lambda_1)$ où a, b sont des scalaires convenables. Il n'est pas difficile de voir que la dimension du facteur symplectique de $(\Lambda(p), \Lambda_1(p))$, donné par la classification algébrique, est localement constante sur un ouvert dense. À remarquer que si (Λ, Λ_1) se décompose en un produit Kronecker-symplectique au voisinage d'un point p , alors la dimension du dit facteur symplectique doit être constante près de p .

Supposons donc, que sur un certain ouvert $M' \subset M$, la structure bihamiltonienne (Λ, Λ_1) soit maximale et que son rang, ainsi que la dimension $2m'$ du facteur symplectique, soient constants. Puisque r est le nombre de facteurs élémentaires de Kronecker, $m+r$ est pair et on peut faire $m = 2m' + 2n - r$ (voir [3] pour les détails algébriques). Pour chaque $p \in M'$ soit $\mathcal{A}_1(p)$ l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(\Lambda + t\Lambda_1)(p)$, $t \in \mathbb{K}$, tels que $\text{rang}(\Lambda + t\Lambda_1)(p) = m - r$. Alors $\dim \mathcal{A}_1(p) = m - n = 2m' + n - r$ et $\mathcal{A}_1 = \bigcup_{p \in M'} \mathcal{A}_1(p)$ est un feuilletage sur M' , qu'on appellera *l'axe (principal) de (Λ, Λ_1)* . En outre $\mathcal{A}_1 \subset \text{Im } \Lambda$ et $\dim(\text{Im}(\Lambda + t\Lambda_1) + \mathcal{A}_1) = m - r$ pour tout $t \in \mathbb{K}$.

Soit \mathcal{A}'_1 l'annulateur de \mathcal{A}_1 ; alors $\Lambda(\mathcal{A}'_1, \cdot) = \Lambda_1(\mathcal{A}'_1, \cdot)$ est un feuilletage de dimension $n - r$, qu'on notera \mathcal{A}_2 et on appellera *l'axe secondaire de (Λ, Λ_1)* . Bien sûr $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$. La structure bihamiltonienne (Λ, Λ_1) se projette, sur le quotient local P de M' par \mathcal{A}_2 , en une structure bihamiltonienne (Λ', Λ'_1) telle que $\text{Im}(\Lambda') = \text{Im}(\Lambda'_1) = \mathcal{A}$ où \mathcal{A} est la projection de \mathcal{A}_1 . Rappelons qu'une structure de Poisson de rang constant est définie par son image, qui est un feuilletage, et une forme symplectique sur cette image. Par conséquent, il existe sur \mathcal{A} deux formes symplectiques ω et ω_1 associées à Λ' et Λ'_1 respectivement. En outre, pour chaque $q \in M'$, le couple de bivecteurs dual de $(\omega(q), \omega_1(q))$ est isomorphe au facteur symplectique de $(\Lambda(q), \Lambda_1(q))$; plus exactement, la restriction de $\pi_*(q)$ au facteur symplectique, où $\pi : M' \rightarrow P$ est la projection canonique, donne un tel isomorphisme.

Soit ℓ l'isomorphisme de \mathcal{A} défini par la relation $\omega_1(X, Y) = \omega(\ell X, Y)$; alors $N_\ell = 0$ sur les feuilles de \mathcal{A} , car Λ' et Λ'_1 sont compatibles. En outre, l'image réciproque par π du polynôme caractéristique de ℓ , est égal au polynôme caractéristique $\varphi = t^{2m'} + \sum_{j=0}^{2m'-1} h_j t^j$ du facteur symplectique de (Λ, Λ_1) ; ceci entraîne que φ appartient à $\mathbb{K}_{M'}[t]$ et que $h_0, \dots, h_{2m'-1}$ sont en involution par rapport à Λ et Λ_1 .

Maintenant supposons que (M', Λ, Λ_1) est difféomorphe à un produit $(M_1, \Lambda^1, \Lambda_1^1) \times (M_2, \Lambda^2, \Lambda_1^2)$ d'une structure bihamiltonienne de Kronecker et d'une symplectique. Soient \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 les feuilletages définis par le premier et second facteur respectivement. Alors $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{B}_2$ et les fonctions $h_0, \dots, h_{2m'-1}$ sont \mathcal{B}_1 -basiques, donc la dimension du sous-espace vectoriel de $T_q^* M'$ engendré par $dh_0(q), \dots, dh_{2m'-1}(q)$ et celle du sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}_1^*(q)$ engendré par $dh_{0|\mathcal{A}_1}(q), \dots, dh_{2m'-1|\mathcal{A}_1}(q)$ coïncident pour tout $q \in M'$. En particulier, *la condition précédente est nécessaire* pour l'existence d'une décomposition locale en produit Kronecker-symplectique.

On dira qu'un point $p \in M$ est *régulier* pour (Λ, Λ_1) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) Le rang de (Λ, Λ_1) est constant sur un voisinage M' de p .

Cette première condition permet de supposer la structure (Λ, Λ_1) maximale, quitte à le remplacer par $(1 - a)\Lambda + a\Lambda_1$ et $(1 - b)\Lambda + b\Lambda_1$ pour des scalaires a, b convenables, et à rapetisser M' . Alors :

- (2) La dimension du facteur symplectique est constante près de p , c'est-à-dire sur M' , quitte à rapetisser de nouveau ce voisinage si nécessaire.
- (3) Le point $\pi(p)$ est régulier pour ℓ .

Bien sûr, il y a plusieurs choix possibles de scalaires a, b , mais on montre facilement que les conditions (2) et (3) n'en dépendent pas.

Théorème 1. *Considérons une structure bihamiltonienne (Λ, Λ_1) analytique réelle ou holomorphe sur une variété M , réelle ou complexe, et un point régulier p . Soit $\varphi = t^{2m'} + \sum_{j=0}^{2m'-1} h_j t^j$ le polynôme caractéristique du facteur symplectique de (Λ, Λ_1) près de p . Supposons que pour tout q assez proche de p les sous-espaces vectoriels engendrés par $dh_0(q), \dots, dh_{2m'-1}(q)$ et par $dh_{0|\mathcal{A}_1}(q), \dots, dh_{2m'-1|\mathcal{A}_1}(q)$, respectivement, aient la même dimension. Alors, au voisinage de p , (Λ, Λ_1) se décompose en un produit d'une structure bihamiltonienne de Kronecker et d'une symplectique.*

Remarque. Dans le cas réel, si $\varphi(p)$ n'a que de racines réelles, le Théorème 1 est encore vrai en classe C^∞ . Dans un prochain travail on donnera un contre-exemple au théorème 1 en classe C^∞ lorsque $\varphi(p)$ a des racines complexes.

On esquissera maintenant la démonstration du Théorème 1. Considérons sur une variété Q un feuilletage \mathcal{H} et un morphisme de fibrés vectoriels $\psi : \mathcal{H} \rightarrow TQ$. Si β est une s -forme sur un ouvert $A \subset Q$, alors $\psi^*\beta$, aussi notée $\beta \circ \psi$, est une s -forme le long de \mathcal{H} de domaine A . Soit $G : TQ \rightarrow TQ$ un prolongement de ψ . Supposons que $\psi^*\alpha$ est fermée le long de \mathcal{H} pour toute 1-forme fermée α telle que $\text{Ker } \alpha \supset \mathcal{H}$; dans ce cas la restriction de N_G à \mathcal{H} ne dépend pas du prolongement G et sera appelée la torsion de Nijenhuis N_ψ de ψ . Soit \mathcal{F} le feuilletage projection de $\text{Im } \Lambda_1$ sur P ; clairement $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$. Comme $\Lambda(\mathcal{A}'_1, \cdot) = \Lambda_1(\mathcal{A}'_1, \cdot) = \mathcal{A}_2$ et que \mathcal{A}'_1 contient $\text{Ker } \Lambda$ et $\text{Ker } \Lambda_1$, les structures de Poisson Λ et Λ_1 donnent lieu à deux isomorphismes $\rho : T^*M/\mathcal{A}'_1 \rightarrow \text{Im } \Lambda/\mathcal{A}_2$ et $\rho_1 : T^*M/\mathcal{A}'_1 \rightarrow \text{Im } \Lambda_1/\mathcal{A}_2$, définis par $\rho([\alpha]) = [\Lambda(\alpha, \cdot)]$ et $\rho_1([\alpha]) = [\Lambda_1(\alpha, \cdot)]$ respectivement. Ainsi $\tilde{\ell} = \rho \circ \rho_1^{-1}$ est un monomorphisme de $\text{Im } \Lambda_1/\mathcal{A}_2$ à $\text{Im } \Lambda/\mathcal{A}_2$ dont l'image est $\text{Im } \Lambda/\mathcal{A}_2$. Par construction, $\tilde{\ell}$ est un invariant de (Λ, Λ_1) ; en outre il se projette en un morphisme $\ell : \mathcal{F} \rightarrow TP$, appelé encore ℓ car il étend $\ell : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ (les objets α, G et f ci-dessous sont définis sur des ouverts de P) de manière telle que les propriétés suivantes soient vérifiées :

- (1) Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(q)$ pour un certain $q \in P$ et que $\ell(V) \subset V$, alors $V \subset \mathcal{A}(q)$.
- (2) $\ell^*\alpha$ est fermée sur \mathcal{F} lorsque α est une 1-forme fermée et que $\text{Ker } \alpha \supset \mathcal{F}$.
- (3) $N_\ell = 0$.
- (4) Si f est une fonction telle que ℓ^*df est fermée sur \mathcal{F} , alors $L_{X_f}\ell = 0$ où X_f est le ω -hamiltonien de f le long de \mathcal{A} (à remarquer que cela a du sens car X_f est tangent à \mathcal{F}).

De manière générale, on peut considérer sur P , d'abord un couple (\mathcal{F}, ℓ) et définir \mathcal{A} comme la réunion des sous-espaces vectoriels ℓ -invariants maximaux. Si (2) et (3) sont vérifiés et que $\dim \mathcal{A}(q)$ est la même partout, on dira que (\mathcal{F}, ℓ) est un drapeau de Veronese faible. Dans ce cas (2) et (3) entraînent l'involutivité de \mathcal{A} qui devient, ainsi, un feuilletage. Un drapeau de Veronese faible (\mathcal{F}, ℓ) étant donné, soient ω, ω_1 un couple de 2-formes le long de \mathcal{A} , la première symplectique et la seconde fermée, telles que $\omega_1 = \omega(\ell, \cdot)$. Lorsqu'on a (4), on dira que le quadruplet $(\mathcal{F}, \ell, \omega, \omega_1)$ est un drapeau de Veronese.

Bref, à toute structure bihamiltonienne on associe localement, sur le quotient par l'axe secondaire, un drapeau de Veronese. Toute la difficulté est de démontrer que ce drapeau se décompose en un produit, c'est-à-dire qu'au voisinage de chaque point, il existe une extension G de ℓ , et des coordonnées $(x, z) = (x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_{2m'})$, telles que $dx_1 = \dots = dx_n = 0$ définisse \mathcal{A} , que les formes ω, ω_1 s'expriment par rapport à $dz_{1|\mathcal{A}}, \dots, dz_{2m'|\mathcal{A}}$ à l'aide de fonctions de z , et que $G = \sum_{j,k=1}^n g_{jk}(x)(\partial/\partial x_j) \otimes dx_k + \sum_{j,k=1}^{2m'} h_{jk}(z)(\partial/\partial z_j) \otimes dz_k$. Dans ce cas, pour finir, il suffit de considérer, sur un ouvert de M , le feuilletage $\text{Ker}(\pi^*(dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{2m'}))$ et celui défini par les Λ -hamiltoniens des fonctions $z_1 \circ \pi, \dots, z_{2m'} \circ \pi$, qui nous donnent la décomposition en produit voulue.

Bien entendu, lorsqu'une structure bihamiltonienne se décompose en produit Kronecker-symplectique, son drapeau de Veronese associé se décompose aussi en produit.

Mémoire à l'appui.

Références

- [1] I.M. Gelfand, I. Zakharevich, On the local geometry of a bihamiltonian structure, in: L. Corwin, et al. (Eds.), The Gelfand Seminars, 1990–1992, Birkhäuser, Basel, 1993, pp. 51–112.
- [2] F. Magri, A simple model of integrable hamiltonian equations, J. Math. Phys. 19 (1978) 1156–1162.
- [3] F.J. Turiel, On the local theory of Veronese webs, arXiv:1001.3098v1 [math.DG].