C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 75–80

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie différentielle

Laplacien hypoelliptique et cohomologie de Bott–Chern

Hypoelliptic Laplacian and Bott–Chern cohomology

Jean-Michel Bismut

Département de mathématique, université Paris-Sud, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France

I N F O   A R T I C L E

Historique de l'article :
Reçu et accepté le 7 décembre 2010
Disponible sur Internet le 23 décembre 2010

Présenté par Jean-Michel Bismut

R É S U M É

Soit $p:M\to S$ une submersion propre de variétés complexes, soit F un fibré vectoriel holomorphe sur M. Quand $R^{\cdot}p_{*}F$ est localement libre, on établit un théorème de Riemann–Roch–Grothendieck en cohomologie de Bott–Chern. Quand M est munie d'une $(1,1)$ forme $\overline{\partial}\partial$ fermée induisant une métrique Hermitienne le long des fibre, la preuve résulte d'une modification convenable des superconnexions elliptiques. Dans le cas général, on construit une version exotique des superconnexions hypoelliptiques que nous avons introduites dans des travaux antérieurs.

A B S T R A C T

Let $p:M\to S$ be a proper submersion of complex manifolds, and let F be a holomorphic vector bundle on M. When $R^{\cdot}p_{*}F$ is locally free, we establish a Riemann–Roch–Grothendieck theorem in Bott–Chern cohomology. When M is equipped with a $\overline{\partial}\partial$-closed $(1,1)$ form inducing a Hermitian metric along the fibres, the proof is obtained by using elliptic superconnections. In the general case, we construct an exotic version of the hypoelliptic superconnections which we introduced in previous work.

1. Introduction

Les démonstrations des résultats annoncés dans la Note sont contenues dans l'article [7].

Soit $p:M\to S$ une submersion holomorphe propre de variétés complexes de fibre X de dimension n, soit F un fibré holomorphe sur M, soit $R^{\cdot}p_{*}F$ l'image directe de F. Par un théorème de Grauert [14], $R^{\cdot}p_{*}F$ est un fibré cohérent. Soit $TX=TM/S$ le fibré tangent relatif.

Rappelons la construction de la cohomologie de Bott–Chern de M [13, Section 6.8]. Soit $d^{M}=\overline{\partial}^{M}+\partial^{M}$ l'opérateur de de Rham sur M. Alors

$$H_{\mathrm{BC}}^{(p,q)}(M,\mathbf{C})=\left(\Omega^{(p,q)}(M,\mathbf{C})\cap\ker d^{M}\right)/\overline{\partial}^{M}\partial^{M}\Omega^{(p-1,q-1)}(M,\mathbf{C}).\tag{1}$$

On pose

$$H_{\mathrm{BC}}^{(=)}(M,\mathbf{C})=\bigoplus H^{(p,p)}(M,\mathbf{C}).\tag{2}$$

Adresse e-mail : Jean-Michel.Bismut@math.u-psud.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2010.12.003

Les fibrés vectoriels TX, F possèdent des classes de Chern à valeurs dans $H_{\mathrm{BC}}^{(=)}(M, \mathbf{C})$. On choisit en effet des métriques hermitiennes sur ces deux fibrés, et on calcule les formes de Chern associées en théorie de Chern–Weil. La théorie des classes de Bott–Chern [12] montre que les classes correspondantes dans $H_{\mathrm{BC}}^{(=)}(M, \mathbf{C})$ ne dépendent pas des métriques. On note $\mathrm{Td}_{\mathrm{BC}}(TX), \mathrm{ch}_{\mathrm{BC}}(F)$ les classes de Todd et de Chern de TX, F dans $H_{\mathrm{BC}}^{(=)}(M, \mathbf{C})$.

Soit g^F une métrique Hermitienne sur F, soit ω^M une $(1,1)$-forme réelle sur M qui induit une métrique Hermitienne g^{TX} sur TX. Dans [8,9], quand ω^M est fermée, on a construit des formes fermées α_t sur S associées à la superconnexion de Levi-Civita de la fibration [3], qui sont sommes de formes de type (p,p), et on a calculé leur limite quand $t \to 0$. Soit $\{\alpha_t\}$ la classe de α_t dans $H_{\mathrm{BC}}^{(=)}(S, \mathbf{C})$. Quand p est une application projective, F possède une résolution injective par des fibrés F^i tels que $R^j p_* F_i$, $j > 0$. On peut alors définir la classe $\mathrm{ch}_{\mathrm{BC}}(S, R^\cdot p_* F) \in H_{\mathrm{BC}}^{(=)}(S, \mathbf{C})$. On déduit en particulier des résultats de [8,9] que sous ces hypothèses,

$$\mathrm{ch}_{\mathrm{BC}}\big(R^\cdot p_* F\big) = \{\alpha_t\} = p_*\big[\mathrm{Td}_{\mathrm{BC}}(TX)\mathrm{ch}_{\mathrm{BC}}(F)\big] \quad \text{dans } H^{(=)}(S, \mathbf{C}). \tag{3}$$

On peut également montrer que (3) reste vrai quand ω^M est fermée, et quand $R^\cdot p_* F$ est localement libre. On dira que (3) énonce un théorème de Riemann–Roch–Grothendieck en cohomologie de Bott–Chern.

L'objet de cette note est d'annoncer un progrès partiel sur les résultats précédents sans aucune hypothèse sur ω^M. On construit encore des formes fermées α_t associées à des superconnexions de courbure elliptique le long des fibres, qui sont somme de formes de type (p,p). Soit $[\alpha_t] \in H^{\mathrm{paire}}(S, \mathbf{C})$ la classe de cohomologie de de Rham de α_t. La théorie de l'indice des familles d'Atiyah–Singer [1] permet de définir $\mathrm{ch}(R^\cdot p_* F) \in H^{\mathrm{paire}}(S, \mathbf{C})$. Si $R^\cdot p_* F$ est localement libre, on peut définir la classe de Bott–Chern $\mathrm{ch}_{\mathrm{BC}}(R^\cdot p_* F) \in H^{(=)}(S, \mathbf{C})$.

Soit $\mathrm{Td}(TX), \mathrm{ch}(F)$ la classe de Todd et le caractère de Chern de TX, F dans $H^{\mathrm{paire}}(M, \mathbf{R})$. Du théorème de l'indice des familles d'Atiyah–Singer [1] et de [3], on tire simplement un résultat plus faible que (3),

$$\mathrm{ch}\big(R^\cdot p_* F\big) = [\alpha_t] = p_*\big[\mathrm{Td}(TX)\mathrm{ch}(F)\big] \quad \text{dans } H^{\mathrm{paire}}(S, \mathbf{R}). \tag{4}$$

Théorème 1.1. *Pour tout $t > 0$, on a*

$$\{\alpha_t\} = p_*\big[\mathrm{Td}_{\mathrm{BC}}(TX)\mathrm{ch}_{\mathrm{BC}}(F)\big] \quad \textit{dans } H^{(=)}(S, \mathbf{C}). \tag{5}$$

De plus, si $R^\cdot p_* F$ est localement libre, pour tout $t > 0$,

$$\mathrm{ch}_{\mathrm{BC}}\big(R^\cdot p_* F\big) = \{\alpha_t\} = p_*\big[\mathrm{Td}_{\mathrm{BC}}(TX)\mathrm{ch}_{\mathrm{BC}}(F)\big] \quad \textit{dans } H^{(=)}(S, \mathbf{C}). \tag{6}$$

L'équation (5) est le résultat principal annoncé dans la note.

Quand $R^\cdot p_* F$ n'est pas localement libre, une définition de $\mathrm{ch}_{\mathrm{BC}}(R^\cdot p_* F)$ a été proposée par Schweitzer dans [17], et résulte des constructions de Grivaux [15] de classes de Chern en cohomologie de Deligne pour des faisceaux cohérents. Toutefois, établir le lien entre ces constructions et les classes $\{\alpha_t\}$ semble pour l'instant difficile.

Dans l'esprit des résultats de [4], quand $\bar\partial^M \partial^M \omega^M = 0$, on montre dans [7] que les formes α_t ont une limite quand $t \to 0$, et on en déduit le Théorème 1.1. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, les formes α_t ne convergent pas quand $t \to 0$.

Pour démontrer (5) en toute généralité, on commence par étendre la construction dans [6] des superconnexions hypoelliptiques sans hypothèse de fermeture sur ω^M. Ces superconnexions agissent sur l'espace total $\mathcal{X}$ du fibré tangent de X de fibre $\widehat{TX}$. Leur courbure est essentiellement la somme d'un oscillateur harmonique dans la fibre et du générateur du flot géodésique sur $\mathcal{X}$. Les formes associées aux superconnexions hypoelliptiques définissent la même classe que α_t en cohomologie de Bott–Chern.

Puis on construit des superconnexions hypoelliptiques exotiques. Dans la direction de $\widehat{TX}$, leur courbure n'est plus un oscillateur harmonique, le potentiel quadratique étant remplacé par un potentiel quartique. On montre que les formes associées aux superconnexions exotiques sont encore dans la même classe de Bott–Chern que les α_t. On vérifie que quand $t \to 0$, les formes exotiques convergent vers une limite explicitement calculable, ce qui permet de montrer (5).

La démarche précédente peut être justifiée géométriquement. En effet pour $t > 0$, un terme lié à $\bar\partial^M \partial^M i\omega^M / t$ apparaît dans la courbure de la superconnexion elliptique définissant α_t, qui empêche la convergence des formes α_t quand $t \to 0$. Un terme du même type réapparaît dans la courbure des superconnexions hypoelliptiques. Par contre, pour les superconnexions hypoelliptiques exotiques, ce terme est affecté d'un potentiel quadratique, ce qui permet de démontrer la convergence quand $t \to 0$ des formes associées aux superconnexions exotiques.

Des considérations probabilistes éclairent les preuves de [7].

2. Les superconnexions elliptiques

On fait les mêmes hypothèses que dans la Section 1, sans autre hypothèse sur la forme ω^M. Soit ∇^{TX}, ∇^F les connexions holomorphes Hermitiennes sur $(TX, g^{TX}), (F, g^F)$, et soit $\nabla^{\Lambda^\cdot(\overline{T^*X}) \otimes F}$ la connexion induite sur $\Lambda^\cdot(\overline{T^*X}) \otimes F$. Soit $T^H M$ l'orthogonal à TX pour ω^M, de telle sorte qu'on a le scindage C^∞,

$$TM = T^H M \oplus TX, \tag{7}$$

qui induit l'identification $T^H M \simeq p^* TS$, de telle sorte que

$$\Lambda^{\cdot}\big(T^*_{\mathbf{C}} M\big) \simeq p^* \Lambda^{\cdot}\big(T^*_{\mathbf{C}} S\big) \widehat{\otimes} \Lambda^{\cdot}\big(T^*_{\mathbf{C}} X\big). \tag{8}$$

Soit ω^X, ω^H les restrictions de ω^M à $TX, T^H M$. De (8), on tire que

$$\omega^M = \omega^X + \omega^H. \tag{9}$$

Soit $(\Omega^{(0,\cdot)}(X, F|_X), \bar\partial^X)$ le complexe de Dolbeault relatif des formes antiholomorphes à coefficients dans F. Comme dans [8], on considère $\bar\partial^M$ comme une superconnexion A'' antiholomorphe sur le fibré $\Omega^{(0,\cdot)}(X, F|_X)$. Les métriques g^{TX}, g^F induisent une métrique $g^{\Omega^{(0,\cdot)}(X,F|_X)}$ sur $\Omega^{(0,\cdot)}(X, F|_X)$.

Soit A' la superconnexion holomorphe sur $\Omega^{(0,\cdot)}(X, F|_X)$ qui est l'adjoint au sens de Bismut–Lott [11] de A'' pour la métrique $g^{\Omega^{(0,\cdot)}(X,F|_X)}$. On pose

$$C'' = A'', \qquad C' = e^{i\omega^H} A' e^{-i\omega^H}, \qquad C = C'' + C'. \tag{10}$$

Alors C est une superconnexion sur $\Omega^{(0,\cdot)}(X, F|_X)$ au sens de Quillen [16]. Sa courbure C^2 est un opérateur elliptique le long des fibres. Soit N^V l'opérateur de nombre de $\Lambda^{\cdot}(\overline{T^*X})$, qui agit par multiplication par p sur $\Lambda^p(\overline{T^*X})$. On pose

$$N = N^V + i\omega^H - n. \tag{11}$$

Pour $t > 0$, quand ω^M est remplacé par ω^M/t, on ajoute un indice t aux objets considérés précédemment. Soit φ l'endomorphisme de $\Lambda^{\text{paire}}(T^*_{\mathbf{C}} S)$ qui à $\eta \in \Lambda^{2p}(T^*_{\mathbf{C}} S)$ associe $(2i\pi)^{-p}\eta$. On désigne par $\mathrm{Tr_s}$ la supertrace au sens de Quillen [16].

Définition 2.1. Pour $t > 0$, on pose

$$\alpha_t = \varphi \, \mathrm{Tr_s}\big[\exp\big(-C_t^2\big)\big], \qquad \gamma_t = \varphi \, \mathrm{Tr_s}\big[N_t \exp\big(-C_t^2\big)\big]. \tag{12}$$

On donne une extension de [8, Théorème 2.9] et de [2, Théorèmes 9.19 et 9.23] avec une démonstration essentiellement identique.

Théorème 2.2. *Les formes α_t, γ_t sont réelles et sommes de formes de type (p, p). Les formes α_t sont fermées, et leur classe dans $H^{(=)}(S, \mathbf{C})$ ne dépend pas de t. Plus précisément, on a*

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_t = -\frac{\bar\partial^S \partial^S}{2i\pi}\frac{\gamma_t}{t}. \tag{13}$$

Quand $R^{\cdot} p_* F$ est localement libre, alors

$$\{\alpha_t\} = \mathrm{ch_{BC}}\big(R^{\cdot} p_* F\big) \quad \textit{dans } H^{(=)}(S, \mathbf{C}). \tag{14}$$

Quand ω^M est fermée, les formes α_t, γ_t sont celles de [8]. Il résulte de [3] et [8, Théorème 2.2] que quand $t \to 0$, α_t a une limite α_0 explicitement calculable, ce qui permet de démontrer le Théorème 1.1 sous cette hypothèse. Quand on suppose seulement que $\bar\partial^M \partial^M \omega^M = 0$, dans [7], on montre encore que α_t a une limite α_0. Son calcul est plus difficile que dans le cas où ω^M est supposée fermée. Dans ce cas on tire encore le Théorème 1.1. Dans la suite, on va montrer comment aborder le cas général.

3. Les superconnexions hypoelliptiques

Soit $\pi : \mathcal{M} \to M$ l'espace total de TX de fibre notée $\widehat{TX}$, soit q la projection $\mathcal{M} \to S$, de fibre $\mathcal{X}$. Soit $g^{\widehat{TX}}$ une métrique Hermitienne sur $\widehat{TX}$. Soit $\nabla^{\widehat{TX}}$ la connexion holomorphe Hermitienne sur $\widehat{TX}$, et soit $R^{\widehat{TX}}$ sa courbure. Soit $\hat y$ la section canonique de $\pi^* \widehat{TX}$. On pose

$$\omega^{\mathcal{M}} = i \bar\partial^{\mathcal{M}} \partial^{\mathcal{M}} |\hat y|^2_{g^{\widehat{TX}}}. \tag{15}$$

Alors $\omega^{\mathcal{M}}$ induit la métrique $g^{\widehat{TX}}$ le long des fibres $\widehat{TX}$. Le sous-fibré horizontal $T^H \mathcal{M} \subset T\mathcal{M}$ induit par $\nabla^{\widehat{TX}}$ est l'orthogonal à $\widehat{TX}$ dans $T\mathcal{M}$ pour $\omega^{\mathcal{M}}$. En procédant comme dans (8), on a

$$\Lambda^{\cdot}\big(T^*_{\mathbf{C}} \mathcal{M}\big) = \pi^*\big(\Lambda^{\cdot}\big(T^*_{\mathbf{C}} M\big) \widehat{\otimes} \Lambda^{\cdot}\big(\widehat{T^*_{\mathbf{C}} X}\big)\big). \tag{16}$$

Soit $\mathbf{I}^{\cdot}$ le fibré vectoriel sur M des sections C^∞ de $\pi^*(\Lambda^{\cdot}(\widehat{\overline{T^*X}}) \widehat{\otimes} F)$ le long des fibres $\widehat{TX}$. Soit $\mathfrak{F}$ le fibré vectoriel sur $\mathcal{M}$ des éléments de $\Lambda^{\cdot}(T^*_{\mathbf{C}} \mathcal{M}) \otimes \pi^* F$ dont la restriction aux fibres $\widehat{TX}$ est de type $(0, \cdot)$. De (16), on tire l'identification C^∞,

$$\mathfrak{F} = \pi^*\big(\Lambda^\cdot\big(T^*_{\mathbf{C}}M\big)\widehat{\otimes}\,\Lambda^\cdot\big(\widehat{\overline{T^*X}}\big)\otimes F\big). \tag{17}$$

De (17), on tire

$$C^\infty(\mathcal{M},\mathfrak{F}) = \Omega^\cdot\big(M,\mathbf{I}^\cdot\big). \tag{18}$$

L'opérateur $\bar\partial^{\mathcal{M}}$ agit sur $C^\infty(\mathcal{M},\mathfrak{F})$. Soit $\bar\partial^V$ l'opérateur $\bar\partial$ le long de $\widehat{TX}$. L'opérateur $\bar\partial^{\mathcal{M}}$ peut ainsi être considéré comme une superconnexion antiholomorphe $\mathcal{A}''$ sur $\mathbf{I}^\cdot$. Alors on a l'identité,

$$\mathcal{A}'' = \nabla^{\mathbf{I}^\cdot\prime\prime} + \bar\partial^V. \tag{19}$$

Soit $\bar\partial^{V*}$ l'adjoint formel de $\bar\partial^V$ relativement à $g^{\widehat{TX}}$. Posons

$$\mathcal{A}' = \nabla^{\mathbf{I}^\cdot\prime} + \bar\partial^{V*}. \tag{20}$$

Alors $\mathcal{A}'^2 = 0$, et de plus $\mathcal{A} = \mathcal{A}'' + \mathcal{A}'$ est une superconnexion sur $\mathbf{I}^\cdot$.

On pose

$$\mathbb{F} = \pi^*\big(\Lambda^\cdot\big(T^*_{\mathbf{C}}X\big)\widehat{\otimes}\,\Lambda^\cdot\big(\widehat{\overline{T^*X}}\big)\otimes F\big). \tag{21}$$

On équipe $\mathbb{F}$ de la métrique $g^{\mathbb{F}}$ associée à la métrique induite par g^{TX} sur $\Lambda^\cdot(T^*_{\mathbf{C}}X)$, par la métrique $g^{\widehat{TX}}$ sur $\Lambda^\cdot(\widehat{\overline{T^*X}})$, et par la métrique g^F on F.

Par (8), (17), on a

$$\mathfrak{F} = p^*\Lambda^\cdot\big(T^*_{\mathbf{C}}S\big)\widehat{\otimes}\,\mathbb{F}. \tag{22}$$

De plus,

$$C^\infty(\mathcal{X},\mathbb{F}) = \Omega^\cdot\big(X,\mathbf{I}^\cdot\big). \tag{23}$$

Soit $\hat y$ la section tautologique de $\pi^*\widehat{TX}$ sur $\mathcal{M}$, soit $\widehat{Y}$ la section correspondante de $\pi^*\widehat{T_{\mathbf{R}}X}$. On identifie $\hat y \in \widehat{TX}$ à l'élément correspondant $y \in TX$. On pose

$$\mathcal{A}''_Y = \mathcal{A}'' + i_y, \qquad \mathcal{A}'_Y = e^{i\omega^M}\big(\mathcal{A}' + i_{\bar y}\big)e^{-i\omega^M}, \qquad \mathcal{A}_Y = \mathcal{A}''_Y + \mathcal{A}'_Y. \tag{24}$$

Alors $\mathcal{A}''_Y$ est une superconnexion antiholomorphe sur $\Omega^\cdot(X,\mathbf{I}^\cdot)$, et $\mathcal{A}_Y$ est une superconnexion sur $\Omega^\cdot(X,\mathbf{I}^\cdot)$, dont la courbure est un opérateur hypoelliptique le long des fibres $\mathcal{X}$. Par les résultats de Bismut–Lebeau [10,6], $\exp(-\mathcal{A}^2_Y)$ est un opérateur à trace.

Pour $(b,t)\in\mathbf{R}^*_+\times\mathbf{R}^*_+$, quand on remplace $(\omega^M, g^{\widehat{TX}})$ par $\frac{\omega^M}{t}, \frac{b^4}{t^3}g^{\widehat{TX}}$, on désigne par $\mathcal{A}_{Y,b,t}$ la superconnexion associée. Soit $N^{\widehat V}$ l'opérateur de nombre de $\Lambda^\cdot(\widehat{\overline{T^*X}})$. On pose

$$\begin{aligned}
&\alpha_{b,t} = \varphi\,\mathrm{Tr_s}\big[\exp\big(-\mathcal{A}^2_{Y,b,t}\big)\big], \qquad \beta_{b,t} = -4\varphi\,\mathrm{Tr_s}\big[\big(N^{\widehat V} - n\big)\exp\big(-\mathcal{A}^2_{Y,b,t}\big)\big],\\
&\gamma_{b,t} = \varphi\,\mathrm{Tr_s}\bigg[\bigg(3N^{\widehat V} - 3n + i\frac{\omega^M}{t}\bigg)\exp\big(-\mathcal{A}^2_{Y,b,t}\big)\bigg].
\end{aligned} \tag{25}$$

Quand ω^M est fermée, les formes dans (25) ont été construites dans [6, Section 7]. On a l'extension de [6, Théorèmes 7.7 et 7.13].

Théorème 3.1. *Pour tout $(b,t)\in\mathbf{R}^*_+\times\mathbf{R}^*_+$, les formes $\alpha_{b,t}$, $\beta_{b,t}$, $\gamma_{b,t}$ sont réelles et sont sommes de formes de type (p,p). Les formes $\alpha_{b,t}$ sont fermées, et leur classe de cohomologie $[\alpha_{b,t}]$ ne dépend pas de $b>0$, $t>0$. De plus,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_{b,t} = -\frac{\bar\partial^S\partial^S}{2i\pi t}\gamma_{b,t}, \qquad \frac{\partial}{\partial b}\alpha_{b,t} = -\frac{\bar\partial^S\partial^S}{2i\pi b}\beta_{b,t}. \tag{26}$$

Enfin pour tout $b>0$, $t>0$,

$$\{\alpha_{b,t}\} = \{\alpha_t\} \quad \text{dans } H^{(=)}(S,\mathbf{C}). \tag{27}$$

Quand ω^M est fermée, par [6, Théorème 7.9], quand $t\to 0$, les formes $\alpha_{b,t}$ ont une limite $\alpha_{b,0}$ explicitement calculable. On montre dans [7] que c'est encore le cas si $\bar\partial^M\partial^M\omega^M = 0$. Quand $\bar\partial^M\partial^M\omega^M$ n'est pas nul, $\alpha_{b,t}$ n'a pas de limite quand $t\to 0$.

4. Les superconnexions hypoelliptiques exotiques

Si $\theta = (c, d)$, $0 \leqslant c \leqslant 1$, $d > 0$, on pose

$$\omega^M_\theta = \left(1 - c + \frac{cd}{2}|Y|^2_{g^{\widehat{TX}}}\right)\omega^M. \tag{28}$$

Dans les constructions de la Section 3, on remplace ω^M par ω^M_θ. On obtient ainsi une superconnexion $\mathcal{A}_{Y,\theta}$. On montre dans [7] que $\exp(-\mathcal{A}^2_{Y,\theta})$ est un opérateur à trace.

Soit $(b, t) \in \mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{R}^*_+$. Quand on remplace $(\omega^M, g^{\widehat{TX}})$ par $\frac{\omega^M}{t}, \frac{b^4}{t^3} g^{\widehat{TX}}$, on note $\mathcal{A}_{Y,\theta,b,t}$ la superconnexion correspondante. Pour $b > 0$, $c \in [0, 1]$, $d > 0$, $t > 0$, si $\theta = (c, d)$, on pose

$$\begin{aligned}
&\alpha_{\theta,b,t} = \varphi \operatorname{Tr_s}\left[\exp\left(-\mathcal{A}^2_{Y,\theta,b,t}\right)\right],\\
&\gamma_{\theta,b,t} = \varphi \operatorname{Tr_s}\left[\left(3N^{\widehat{V}} - 3n + (1-c)i\frac{\omega^M}{t} + \frac{2b^4cd}{t^4}|Y|^2_{g^{\widehat{TX}}} i\omega^M\right)\exp\left(-\mathcal{A}^2_{Y,\theta,b,t}\right)\right],\\
&\kappa_{\theta,b,t} = -\varphi \operatorname{Tr_s}\left[\left(\frac{b^4 d}{2t^3}|Y|^2_{g^{\widehat{TX}}} - 1\right) i\frac{\omega^M}{t}\exp\left(-\mathcal{A}^2_{Y,\theta,b,t}\right)\right].
\end{aligned} \tag{29}$$

Pour $c = 0$, on a

$$\alpha_{\theta,b,t} = \alpha_{b,t}, \qquad \gamma_{\theta,b,t} = \gamma_{b,t}. \tag{30}$$

Théorème 4.1. *Les formes $\alpha_{\theta,b,t}$, $\gamma_{\theta,b,t}$, $\kappa_{\theta,b,t}$ sont réelles, et sont sommes de formes de type (p, p). Les formes $\alpha_{\theta,b,t}$ sont fermées. De plus,*

$$\frac{\partial}{\partial t}\alpha_{\theta,b,t} = -\frac{\overline{\partial}^S\partial^S}{2i\pi t}\gamma_{\theta,b,t}, \qquad \frac{\partial}{\partial c}\alpha_{\theta,b,t} = -\frac{\overline{\partial}^S\partial^S}{2i\pi}\kappa_{\theta,b,t}. \tag{31}$$

Enfin

$$\{\alpha_{\theta,b,t}\} = \{\alpha_{b,t}\}. \tag{32}$$

Pour $d > 0$, $t > 0$, on pose

$$\theta_t = (1, dt). \tag{33}$$

Pour $a > 0$, soit δ_a l'application $Y \to aY$. Alors δ^*_a agit naturellement sur $C^\infty(\mathcal{X}, \mathbb{F})$. Soit K_b l'endomorphisme de $C^\infty(\mathcal{X}, \mathbb{F})$ donné par $s(x, Y) \to s(x, bY)$. On pose

$$\mathfrak{M}_{\theta,b,t} = K_b \delta^*_{t^{3/2}/b^2}\mathcal{A}_{Y,\theta,b,t}\delta^{*-1}_{t^{3/2}/b^2}K_b^{-1}. \tag{34}$$

Soit $\Delta^V_{g^{\widehat{TX}}}$ le Laplacien le long des fibres $\widehat{TX}$ pour la métrique $g^{\widehat{TX}}$. Soit ∇_Y le champ de vecteurs le long des fibres $\mathcal{X}$ associé au relèvement horizontal de $Y \in T_{\mathbf{R}}X$ dans $T_{\mathbf{R}}\mathcal{X}$ pour la connexion $\nabla^{\widehat{TX}}$. On montre dans [7] que la partie scalaire $\mathfrak{M}^s_{\theta_t,b,t}$ de $\mathfrak{M}_{\theta_t,b,t}$ est donnée par

$$\mathfrak{M}^s_{\theta_t,b,t} = -\frac{1}{2b^2}\Delta^V_{g^{\widehat{TX}}} + \frac{dt^3}{4}|Y|^2_{g^{TX}}|Y|^2_{g^{\widehat{TX}}} + \frac{t^{3/2}}{b}\nabla_Y. \tag{35}$$

L'opérateur $\mathfrak{M}_{\theta_t,b,t}$ est un Laplacien hypoelliptique exotique. Notons le potentiel quartique dans le membre de droite de (35), qui remplace le potentiel quadratique usuel [5,10,6] pour de tels opérateurs. Dans $\mathfrak{M}_{\theta_t,b,t}$ apparaît également le terme $-\frac{b^2d}{2}|Y|^2_{g^{\widehat{TX}}}\overline{\partial}^M\partial^M i\omega^M$. Dans la courbure des superconnexions hypoelliptiques ordinaires, apparaît au contraire le terme $-\overline{\partial}^M\partial^M i\omega^M/t$, qui diverge quand $t \to 0$.

On montre dans [7] que quand $t \to 0$, $\alpha_{\theta_t,b,t}$ a une limite a_b calculable explicitement, et que de plus

$$\{\alpha_{\theta_t,b,t}\} = \{a_b\} \quad \text{dans } H^{(=)}(S, \mathbf{C}). \tag{36}$$

Du calcul de a_b, on tire dans [7] que

$$\{a_b\} = p_*\left[\mathrm{Td_{BC}}(TX)\mathrm{ch_{BC}}(F)\right] \quad \text{dans } H^{(=)}(S, \mathbf{C}). \tag{37}$$

L'identité (5) résulte alors de (27), (32), (36) et (37).

Remerciements

Dans le cadre de son programme sur la classification des surfaces, Andrei Teleman a formulé la question à laquelle une réponse partielle est apportée dans la note. L'auteur remercie Andrei Teleman pour de nombreuses discussions.

Références

[1] M.F. Atiyah, I.M. Singer, The index of elliptic operators. IV, Ann. of Math. (2) 93 (1971) 119–138.
[2] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, Heat Kernels and Dirac Operators, Grundl. Math. Wiss., Band 298, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
[3] J.-M. Bismut, The Atiyah–Singer index theorem for families of Dirac operators: two heat equation proofs, Invent. Math. 83 (1) (1986) 91–151.
[4] J.-M. Bismut, A local index theorem for non-Kähler manifolds, Math. Ann. 284 (4) (1989) 681–699.
[5] J.-M. Bismut, The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle, J. Amer. Math. Soc. 18 (2) (2005) 379–476 (electronic).
[6] J.-M. Bismut, The hypoelliptic Dirac operator, in: Geometry and Dynamics of Groups and Spaces, in: Progr. Math., vol. 265, Birkhäuser, Basel, 2008, pp. 113–246.
[7] J.-M. Bismut, Hypoelliptic Laplacian and Bott–Chern cohomology, preprint (Orsay), 2011.
[8] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II. Direct images and Bott–Chern forms, Comm. Math. Phys. 115 (1) (1988) 79–126.
[9] J.-M. Bismut, K. Köhler, Higher analytic torsion forms for direct images and anomaly formulas, J. Algebraic Geom. 1 (4) (1992) 647–684.
[10] J.-M. Bismut, G. Lebeau, The Hypoelliptic Laplacian and Ray–Singer Metrics, Annals of Mathematics Studies, vol. 167, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
[11] J.-M. Bismut, J. Lott, Flat vector bundles, direct images and higher real analytic torsion, J. Amer. Math. Soc. 8 (2) (1995) 291–363.
[12] R. Bott, S.S. Chern, Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections, Acta Math. 114 (1965) 71–112.
[13] J.-P. Demailly, Complex analytic and differential geometry, OpenContent Book, http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf, 2009.
[14] H. Grauert, Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 5 (1960) 64.
[15] J. Grivaux, Chern classes in Deligne cohomology for coherent analytic sheaves, Math. Ann. 347 (2) (2010) 249–284.
[16] D. Quillen, Superconnections and the Chern character, Topology 24 (1) (1985) 89–95.
[17] M. Schweitzer, Autour de la cohomologie de Bott–Chern, arXiv:0709.3528v1, 2007.