C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 411–416

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles/Analyse harmonique

Un modèle scalaire analogue aux équations de Navier–Stokes

An analogue scalar model for the Navier–Stokes equations

Frédéric Lelièvre

Équipe d'analyse et de probabilités, université d'Evry, boulevard François-Mitterrand, 91025 Evry cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 8 novembre 2010
Accepté après révision le 18 janvier 2011
Disponible sur Internet le 5 mars 2011

Présenté par Yves Meyer

RÉSUMÉ

Nous étudions un nouveau modèle scalaire aux propriétés similaires aux équations de Navier–Stokes (préservation du changement d'échelle, invariances par translation et dilatation, antisymétrie du terme bilinéaire) mais contenant un opérateur d'intégrale singulière. Nous construisons une solution faible globale lorsque la donnée initiale est dans un espace de Morrey–Campanato critique : celle-ci vérifie une inégalité d'énergie locale comparable à celle de Scheffer.

ABSTRACT

We discuss on a new scalar model whose properties are similar to the NS equations (it preserves scaling, the antisymmetry of the bilinear term and is invariant by translations and dilations) but contains a singular integral operator. We construct a global-in-time weak solution when initial data is in a critical Morrey–Campanato space and show that it also satisfies a local energy inequality comparable to Scheffer's one.

Abridged English version

We discuss on a new scalar model, described below:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - [u, \Lambda]u \\ u(0,.) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

where Λ is the Calderón's operator defined by $\widehat{\Lambda f}(\xi) = |\xi|\hat{f}(\xi)$ and $[u, \Lambda]u = u\Lambda u - \Lambda(u^2)$. This model is similar to the NS equations:

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla}.(\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p \\ \vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \\ \vec{u}(0,.) = \vec{u}_0 \end{cases} \tag{2}$$

Indeed, it preserves scaling (if $u(t,x)$ is solution of (1) with initial datum u_0 then $\lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ is also solution of (1) with initial datum $\lambda \vec{u}_0(\lambda x)$) and the antisymmetry of the bilinear term (for v and r smooth enough and u solution of (1) then $b(v,r) = \int_{\mathbb{R}^3} v[u, \Lambda]r \, dx$ is antisymmetric).

Adresse e-mail : fre.lelievre@laposte.net.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.01.017

Let us point out another equation $\partial_t u = \Delta u - \Lambda u^2$ studied by Montgomery-Smith [6], followed by Gallagher–Paicu [2] in higher dimensions in order to prove blow-up of solutions in finite time if the Fourier transform of the initial value is positive: nevertheless, the antisymmetry of the bilinear term of the NS equations is neglected in this equation, while, using on some energy estimates, it will play a proeminent role within the study of our model.

Our goal is, applying harmonic tools frequently used for (2), to see if analogy is preserved for our model (1): we believe that it will improve our understanding of the operator Λ. When initial datum is small in some critical spaces for this model (L^3, $L^{3,\infty}$ or $\dot{M}^{2,3}$), the formalism of mild solutions gives a global-in-time solution (and local-in-time solution for a regular initial value – see [3]). Since this approach is inoperative when initial datum is big in some critical space, we follow Lemarié-Rieusset's work ([4] and [5]) to construct a global weak solutions for (1) in some infinite energy space.

Let briefly recall the main steps of this construction:

- When initial datum is in L^2, inspired by Leray's approximation for the NS equations, we modify Eq. (1):

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - [u * w_\epsilon, \Lambda]u \\ u(0,.) = u_0 \end{cases} \tag{3}$$

  Picard's fixed point theorem and a bootstrap argument allow us to construct a smooth global-in-time solution $u_\epsilon \in L^\infty((0,\infty), L^2) \cap L^2((0,T), \dot{H}^1)$ for (5). Taking the limit over ϵ, one can construct a solution $u \in L^\infty((0,\infty), L^2) \cap L^2((0,T), \dot{H}^1)$ for the model (1) satisfying the energy inequality: $\|u(t,.)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\vec{\nabla} u(s,.)\|_2^2 \, ds \leqslant \|u_0\|_2^2$.
- When initial datum belongs to L^2_{uloc}, one proof consists in approximating it by a sequence of functions $(u_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2$ which converges weakly-$*$ towards u_0 in L^2_{uloc} and satisfies $\|u_0^n\|_{L^2_{uloc}} \leqslant C\|u_0\|_{L^2_{uloc}}$. Using on local energy estimates for the solutions of the following approximations

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon^n = \Delta u_\epsilon^n - \big[u_\epsilon^n * w_\epsilon, \Lambda\big]u_\epsilon^n \\ u_\epsilon^n(0,.) = u_0^n \end{cases} \tag{4}$$

  we obtain some a priori uniform control of u_ϵ^n in $L^\infty L^2_{uloc} \cap (L^2 H^1)_{uloc}$ uniformly in n and ϵ. Thus (see [3]):

Proposition 1. *Let $u_0 \in L^2_{uloc}$. There exists $C_0 > 0$ and $T_0 = \frac{1}{C_0^4 \max(1, \|u_0\|^2_{L^2_{uloc}})}$ such that, $\forall 0 < t < T_0$:*

$$\big\|u_\epsilon^n(t)\big\|^2_{L^2_{uloc}} + \big\|\vec{\nabla} u_\epsilon^n\big\|^2_{(L^2(0,t)L^2)_{uloc}} \leqslant C_0\|u_0\|^2_{L^2_{uloc}}\left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{5}$$

- At last, when initial datum belongs to $\dot{M}^{2,3}$ ($\|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}} = \sup_{\lambda>0} \lambda\|u_0(\lambda x)\|_{L^2_{uloc}}$), the scaling invariance of (1) allows us to control u_ϵ^n in $L^\infty L^2 \cap L^2\dot{H}^1$ not only on $(0,T_0) \times B(x_0,1)$ but also over all domains $(0,\lambda^2 T_0) \times B(x_0,\lambda)$, $\lambda > 0$. Since this control only depends on $\|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}$, we obtain:

Theorem 2. *Let $u_0 \in \dot{M}^{2,3}$. There exists $u \in \mathcal{D}'((0,+\infty) \times \mathbb{R}^3)$, global-in-time solution for* (1) *satisfying*

$$\sup_{R>0,\, x_0\in\mathbb{R}^3,\, t>0} \frac{1}{R+\sqrt{t}} \int\limits_{|x-x_0|\leqslant R} \big|u(t,x)\big|^2 \, dx < +\infty, \qquad \sup_{R>0,\, x_0\in\mathbb{R}^3,\, t>0} \frac{1}{R+\sqrt{t}} \int\limits_0^t \int\limits_{|x-x_0|\leqslant R} \big|\vec{\nabla} u(s,x)\big|^2 \, dx\, ds < +\infty \tag{6}$$

Our best result is given by the following theorem, since we obtain a local energy inequality, similar to Scheffer's.

Theorem 3. *Let $u_0 \in \dot{M}^{2,3}$. Let $\phi \in \mathcal{D}((0,\infty) \times \mathbb{R}^3)$ such that $\phi \geqslant 0$. The solution u of* (1)*, constructed in* 2 *satisfies*

$$2\iint |\vec{\nabla} u|^2 \phi \, dx\, dt \leqslant \iint |u|^2(\partial_t\phi + \Delta\phi) \, dx\, dt - \frac{C}{2}\iiint u(t,x)u(t,y)\big(u(t,x) - u(t,y)\big)\frac{(\phi(t,x) - \phi(t,y))}{|x-y|^4} \, dx\, dy\, dt \tag{7}$$

Constant C is defined by the kernel of the operator Λ: $\Lambda u = C v.p. \int \frac{u(x-y)-u(x)}{|y|^{n+1}} \, dy$ for $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Finally, let consider the NS equations (2): when initial datum is small in $\dot{M}^{2,3}$, the compact subset

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{u} \in \big(L^\infty\big((0,\infty), L^2\big)\big)^3_{loc} \cap \big(L^2\big((0,\infty), \dot{H}^1\big)\big)^3_{loc} \quad \text{suitable solution for (2);} \\ \displaystyle\sup_{R>0,\, x_0\in\mathbb{R}^3,\, t>0} \frac{1}{R+\sqrt{\frac{t}{T_0}}} \int\limits_{|x-x_0|\leqslant R} \big|\vec{u}(t,x)\big|^2 \, dx \leqslant C_0\|\vec{u}_0\|^2_{\dot{M}^{2,3}}; \end{array} \right.$$

$$\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3,\, t>0} \sqrt{\frac{T_0}{t}} \int_0^t \int_{|x-x_0|\leqslant\sqrt{\frac{t}{T_0}}} \left|\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,x)\right|^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}s < C_0\|\vec{u}_0\|^2_{\dot{M}^{2,3}},\ T_0 = T\left(\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}}\right) \text{ and } C_0 \text{ does not depend on } \vec{u}_0\Bigg\}$$

is reduced to one point (thanks to Caffarelli, Kohn and Nirenberg's criterion). This gives a larger "unicity class" compared to the one obtained by the formalism of mild solutions. Does the scalar model (1) answer to this "unicity class"? Since we have constructed a global-in-time weak solution satisfying a local energy inequality, the question becomes: does there exist a Caffarelli, Kohn and Nirenberg criterion adapted to this equation?

1. Présentation du modèle

Nous nous proposons d'étudier le modèle scalaire suivant

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - [u, \Lambda]u \\ u(0,.) = u_0 \end{cases} \tag{1}$$

où Λ est l'opérateur de Calderón défini en Fourier par $\widehat{\Lambda f}(\xi) = |\xi|\hat{f}(\xi)$ et $[u,\Lambda]u = u\Lambda u - \Lambda(u^2)$.

Comme dans le cas des équations de Navier–Stokes définies par

$$\begin{cases} \partial_t\vec{u} = \Delta\vec{u} - \vec{\nabla}.(\vec{u}\otimes\vec{u}) - \vec{\nabla}p \\ \vec{\nabla}.\vec{u} = 0 \\ \vec{u}(0,.) = \vec{u}_0 \end{cases} \tag{2}$$

le modèle (1) vérifie les propriétés suivantes :

- invariances par translation et dilatation : si $u(t,x)$ est solution sur $(0,T)\times\mathbb{R}^3$ des équations (1) avec donnée initiale u_0 alors, pour tout $x_0\in\mathbb{R}^3$, $\lambda u(\lambda^2 t, \lambda(x-x_0))$ est aussi solution de (1) sur $(0,T)\times\mathbb{R}^3$ avec donnée initiale $u_0(\lambda(x-x_0))$.
- Antisymétrie du terme bilinéaire : pour v et r suffisamment régulières et u solution du modèle (1) alors l'expression bilinéaire $b(v,r) = \int_{\mathbb{R}^3} v[u,\Lambda]r\,\mathrm{d}x$ est antisymétrique.

Le modèle étant scalaire, nous nous affranchissons de la condition sur la divergence ; de plus, l'opérateur non local $\Lambda = \sum_{j=1}^{j=3}\partial_j R_j$ (où R_j désigne la $j$ème composante de la transformée de Riesz) reproduit la difficulté liée à la pression dans (2). Remarquons, par ailleurs, qu'une autre équation $\partial_t u = \Delta u - \Lambda u^2$ a été étudiée par Montgomery-Smith [6] puis reprise en dimensions supérieures par Gallagher–Paicu [2] (afin de prouver l'explosion en temps fini de solutions lorsque la donnée initiale a une transformée de Fourier positive). Néanmoins, la structure particulière du terme bilinéaire des équations (2) est délaissée dans ce modèle et, contrairement à celui que nous étudions, empêche l'obtention d'une conservation d'énergie en norme L^2.

Notre objectif est d'appliquer les techniques d'analyse harmonique habituellement utilisées pour les équations de Navier–Stokes dans les espaces critiques pour cette équation (formalisme des solutions « *mild* », construction de solutions faibles globales, inégalité d'énergie locale) afin de vérifier si l'analogie perdure avec Λ et de mieux comprendre cet opérateur.

Comme dans le cas des équations (2), le formalisme des solutions « *mild* » est adapté aux espaces (critiques pour l'équation) L^3, $L^{3,\infty}$ et $\dot{M}^{2,3}$: autrement dit, il produit des solutions globales avec donnée initiale petite ou des solutions locales lorsque celles-ci appartiennent à la fermeture des fonctions test dans les espaces considérés. Celui-ci devient inopérant pour construire des solutions globales lorsque la donnée initiale est grande dans un espace critique. Pour contourner cette difficulté, nous nous inspirons des travaux de Lemarié-Rieusset [4] et [5] et construisons, grâce à des estimations d'énergie, des solutions faibles d'énergie infinie. Rappelons que Calderón, en utilisant une approche différente, construit lui aussi ce type de solutions de (2) dans [1].

2. Existence d'une solution globale d'énergie infinie

Nous construisons des solutions globales lorsque la donnée initiale est grande dans $\dot{M}^{2,3}$, dont nous rappelons la définition :

Définition 1. L'espace $\dot{M}^{2,3}(\mathbb{R}^3)$ est l'espace des fonctions localement de carré intégrable vérifiant

$$\sup_{x_0\in\mathbb{R}^n;\ 0<R<\infty} R^{-\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(B(x_0,R))} < \infty \tag{3}$$

Explicitons la démarche :

- Lorsque la donnée initiale est L^2, le théorème du point fixe de Picard est inutilisable sur le modèle (1) : en nous inspirant de l'approximation de Leray, nous convolons l'un des facteurs présents dans le terme bilinéaire et étudions

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - [u * w_\epsilon, \Lambda]u \\ u(0,.) = u_0 \end{cases} \tag{4}$$

qui permet alors de construire une solution régulière globale $u_\epsilon \in L^\infty((0,\infty), L^2) \cap L^2((0,T), \dot H^1)$ pour tout $T > 0$, vérifiant (5) et satisfaisant l'égalité d'énergie $\|u_\epsilon(t,.)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\vec\nabla u_\epsilon(s,.)\|_2^2\,ds = \|u_0\|_2^2$. Un passage à la limite faible et un argument de compacité de Rellich permettent alors de construire une solution $u \in L^\infty((0,\infty), L^2) \cap L^2((0,T), \dot H^1)$ au modèle (1) satisfaisant l'inégalité d'énergie suivante : $\|u(t,.)\|_2^2 + 2\int_0^t \|\vec\nabla u(s,.)\|_2^2\,ds \leqslant \|u_0\|_2^2$.
- Lorsque la donnée initiale est dans L^2_{uloc}, une preuve possible consiste à approcher la donnée initiale par une suite de fonctions $(u_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^2$ $(u_0^n = \mathbb{1}_{B(0;2^n)}u_0)$: elle converge vers u_0 dans L^2_{uloc} muni de la topologie faible* et vérifie $\|u_0^n\|_{L^2_{uloc}} \leqslant C\|u_0\|_{L^2_{uloc}}$. Nous partons alors des équations

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon^n = \Delta u_\epsilon^n - [u_\epsilon^n * w_\epsilon, \Lambda]u_\epsilon^n \\ u_\epsilon^n(0,.) = u_0^n \end{cases} \tag{5}$$

dont nous estimons a priori le champ de vitesse dans $L^\infty L^2_{uloc} \cap (L^2H^1)_{uloc}$ uniformément en n et ϵ :

Proposition 2. *Soit $u_0 \in L^2_{uloc}$. Il existe une constante positive C_0 (uniforme en n, ϵ et u_0) et un temps $T_0(\|u_0\|_{L^2_{uloc}}) = \frac{1}{C_0^4 \max(1, \|u_0\|^2_{L^2_{uloc}})}$ tel que pour tout $0 < t < T_0$:*

$$\|u_\epsilon^n(t)\|^2_{L^2_{uloc}} + \|\vec\nabla u_\epsilon^n\|^2_{(L^2(0,t)L^2)_{uloc}} \leqslant C_0\|u_0\|^2_{L^2_{uloc}}\left(1 - \frac{t}{T_0}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{6}$$

La preuve de cette proposition est basée sur une décomposition en deux parties (locale et non locale) de l'opérateur Λ : d'un côté, les commutateurs de Calderón–Zygmund $[\rho, \Lambda]$ $(\rho \in \mathcal{D})$ sont continus de $L^{\frac{3}{2}}$ dans lui-même et de l'autre, la décroissance à l'infini de Λ (en $\frac{1}{|x|^4}$) permet de contrôler la norme L^∞ de la partie non locale (pour la preuve complète, voir [3]). Les passages à la limite (en ϵ et en n) suivent des estimations uniformes précédentes et permettent la construction d'une solution locale $L^\infty L^2_{uloc} \cap (L^2H^1)_{uloc}$ au modèle (1).

- Pour construire une solution globale lorsque la donnée initiale est dans $\dot M^{2,3}$ $(\|u_0\|_{\dot M^{2,3}} = \sup_{\lambda>0} \lambda\|u_0(\lambda x)\|_{L^2_{uloc}})$, l'idée est, via le changement d'échelle propre aux équations (1), de contrôler les normes $L^\infty L^2 \cap L^2\dot H^1$ de u_ϵ^n uniquement par $\|u_0\|_{\dot M^{2,3}}$ sur le domaine $(0, \lambda^2 T_0) \times B(x_0, \lambda)$ pour tout $\lambda > 0$. Pour ce faire, remarquons que si v_ϵ^n est solution des équations E_ϵ (définies par $\partial_t v = \Delta v - [v * w_\epsilon, \Lambda]v$) sur $(0,T) \times \mathbb{R}^3$ avec donnée initiale v_0^n, alors pour tout $A > 0$, $Av_\epsilon^n(A^2t, Ax)$ est solution de $E_{\frac{\epsilon}{A}}$ sur $(0, A^{-2}T) \times \mathbb{R}^3$ avec donnée initiale $Av_0^n(Ax)$. Adaptons cette remarque à l'équation $E_{\frac{\epsilon}{A}}$ avec donnée initiale $Av_0^n(Ax)$: d'après la proposition 2, il existe une solution $v^n_{\frac{\epsilon}{A}}$ de $E_{\frac{\epsilon}{A}}$ contrôlée en norme $L^\infty L^2 \cap L^2\dot H^1$ sur $(0,T_0) \times B(x_0, 1)$ où $T_0(\|u_0\|_{\dot M^{2,3}})$ avec des estimations portant uniquement sur $\|u_0\|_{\dot M^{2,3}}$ (indépendantes de ϵ, A et n) : comme $\frac{1}{A}v_{\frac{\epsilon}{A}}(\frac{t}{A^2}, \frac{x}{A})^n$ coïncide avec l'unique solution u_ϵ^n de E_ϵ ayant pour donnée initiale u_0^n, nous obtenons, à chaque échelle, un contrôle $L^\infty L^2 \cap L^2\dot H^1$ de u_ϵ^n sur $(0, A^2T_0) \times B(x_0, A)$ (dépendant seulement de $\|u_0\|_{\dot M^{2,3}}$), d'où des passages à la limite licites ($n \to \infty$ puis $\epsilon \to 0$).

Théorème 3. *Soit $u_0 \in \dot M^{2,3}$. Il existe une solution globale $u \in \mathcal{D}'((0,+\infty) \times \mathbb{R}^3)$ vérifiant (1) et satisfaisant*

$$\sup_{R>0,\,x_0\in\mathbb{R}^3,\,t>0} \frac{1}{R+\sqrt{t}} \int\limits_{|x-x_0|\leqslant R} |u(t,x)|^2\,dx < +\infty, \qquad \sup_{R>0,\,x_0\in\mathbb{R}^3,\,t>0} \frac{1}{R+\sqrt{t}} \int_0^t \int\limits_{|x-x_0|\leqslant R} |\vec\nabla u(s,x)|^2\,dx\,ds < +\infty \tag{7}$$

3. Inégalité d'énergie locale

Le principal résultat de cet article, objet du théorème ci-dessous, est l'obtention d'une inégalité d'énergie locale :

Théorème 4. *Soit $u_0 \in \dot M^{2,3}$. Soit $\phi \in \mathcal{D}((0,\infty) \times \mathbb{R}^3)$ telle que $\phi \geqslant 0$. La solution u du modèle scalaire vérifie l'inégalité d'énergie locale*

$$2\iint |\vec{\nabla}u|^2\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leqslant \iint |u|^2(\partial_t\phi+\Delta\phi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \frac{C}{2}\iiint u(t,x)u(t,y)\big(u(t,x)-u(t,y)\big)\frac{(\phi(t,x)-\phi(t,y))}{|x-y|^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

Remarque. La constante C est celle apparaissant dans le noyau de Λ : $\Lambda u = C\,v.p.\int \frac{u(x-y)-u(x)}{|y|^{n+1}}\,\mathrm{d}y$ pour $u\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Démonstration. Soit $\phi\in\mathcal{D}((0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$ telle que $\phi\geqslant 0$. Nous partons de la solution approchée $u_\epsilon\in L^\infty L^2_{uloc}\cap(L^2H^1)_{uloc}$ vérifiant :

$$2\iint |\vec{\nabla}u_\epsilon|^2\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \iint |u_\epsilon|^2(\partial_t\phi+\Delta\phi)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \iint u_\epsilon[u_\epsilon * w_\epsilon,\Lambda]u_\epsilon\phi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

Cette solution est en fait u_ϵ^n mais, comme les estimations sont les mêmes en n et ϵ, nous ne traitons qu'un passage à la limite ($\epsilon\to 0$). A ϵ fixé, approchons u_ϵ par sa troncature-régularisation : notons v^n cette suite régularisante.

Étape 1. Estimations pour les fonctions test. Nous écrivons

$$\begin{aligned}\big\langle v^n\big[v^n*w_\epsilon,\Lambda\big]v^n,\phi\big\rangle &= C\bigg(\frac{1}{2}\iint\limits_{|x-y|\leqslant 1}\frac{v^n(t,x)v^n(t,y)(\phi(t,x)-\phi(t,y))w_\epsilon*(v^n(t,x)-v^n(t,y))}{|x-y|^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\\ &\quad+\iint\limits_{1\leqslant|x-y|\leqslant R}\frac{v^n(t,x)v^n(t,y)\phi(t,x)w_\epsilon*(v^n(t,x)-v^n(t,y))}{|x-y|^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\\ &\quad+\iiint\limits_{|x-y|\geqslant R}\frac{v^n(t,x)v^n(t,y)\phi(t,x)w_\epsilon*(v^n(t,x)-v^n(t,y))}{|x-y|^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\bigg)\\ &=\frac{1}{2}A\big(v^n,v^n,v^n*w_\epsilon\big)+B_R\big(v^n,v^n,v^n*w_\epsilon\big)+C_R\big(v^n,v^n,v^n*w_\epsilon\big)\end{aligned}$$

où $R>10$ sera fixé grand ultérieurement, avec :

$$A(u,v,w)=C\iint\limits_{|x-y|\leqslant 1}\frac{u(t,x)v(t,y)(\phi(t,x)-\phi(t,y))(w(t,x)-w(t,y))}{|x-y|^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

$$B_R(u,v,w)=C\iint\limits_{1\leqslant|x-y|\leqslant R}\frac{u(t,x)v(t,y)\phi(t,x)(w(t,x)-w(t,y))}{|x-y|^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

$$C_R(u,v,w)=C\iint\limits_{|x-y|\geqslant R}\frac{u(t,x)v(t,y)\phi(t,x)(w(t,x)-w(t,y))}{|x-y|^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

Étudions les trois termes trilinéaires.

Pour A, sachant que $t\in K$, $(x,y)\in K'^2$ (où K et K' sont deux compacts dépendant du support de ϕ), on considère $\rho\in\mathcal{D}((0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$ valant 1 sur un voisinage de $K\times K'$:

$$\begin{aligned}|A(u,v,w)| &\leqslant C\int\bigg(\iint\limits_{|x-y|\leqslant 1}u(t,x)^2v(t,y)^2\frac{(\phi(t,x)-\phi(t,y))^2}{|x-y|^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\bigg)^{\frac{1}{2}}\\ &\quad\times\bigg(\iint\frac{|\rho(t,x)w(t,x)-\rho(t,y)w(t,y)|^2}{|x-y|^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\bigg)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant C(\phi)\int\bigg(\int\big(\rho u(t,x)\big)^2\bigg((\rho v)^2*\mathbb{1}_{|x|\leqslant 1}\frac{1}{|x|^2}\bigg)\mathrm{d}x\bigg)^{\frac{1}{2}}\|\rho w(t,.)\|_{H^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant C\|\rho u\|_{L^3L^3}\|\rho v\|_{L^3L^3}\|\rho w\|_{L^3H^{\frac{1}{2}}}\end{aligned} \tag{13}$$

La majoration obtenue dans la dernière ligne utilise la convolution dans les espaces de Lorentz : comme $(\rho v)^2\in L^{\frac{3}{2}}$ et $\mathbb{1}_{|x|\leqslant 1}\frac{1}{|x|^2}\in L^{\frac{3}{2},\infty}$ alors $(\rho v)^2*\mathbb{1}_{|x|\leqslant 1}\frac{1}{|x|^2}\in L^{3,\frac{3}{2}}$.

Pour B_R, de même que précédemment, on constate que t, x et y sont bornés et le noyau est intégrable sur la couronne choisie : il existe donc une fonction $\tilde{\rho}_R\in\mathcal{D}((0,\infty)\times\mathbb{R}^3)$ telle que :

$$|B_R(u,v,w)| \leqslant C(R,\phi)\|\tilde{\rho}_R u\|_{L^3L^2}\|\tilde{\rho}_R v\|_{L^3L^2}\|\tilde{\rho}_R w\|_{L^3L^2} \tag{14}$$

Pour C_R, le contrôle en la norme $(L^3L^3)_{uloc}$ donne :

$$|C_R(u,v,w)| \leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^3,\,|k|\geqslant R-1} \frac{1}{|k|^4}\|u\|_{(L^3L^3)_{uloc}}\|v\|_{(L^3L^3)_{uloc}}\|w\|_{(L^3L^3)_{uloc}} \tag{15}$$

Étape 2. Passage à la limite lorsque $n \to \infty$.

Soit $\eta > 0$. D'après l'estimation obtenue sur C_R (reste d'une série convergente), il existe un nombre $R_0(\eta, \|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}) > 0$ tel que $|C_{R_0}(u_\epsilon, u_\epsilon, u_\epsilon * w_\epsilon) - C_{R_0}(v^n, v^n, v^n * w_\epsilon)| < \frac{\eta}{3}$ (u_ϵ et v^n sont uniformément $(L^3L^3)_{uloc}$). D'autre part, la triniléarité et les majorations obtenues sur A et B_{R_0} impliquent qu'il existe $n_0(\eta, \|u_0\|_{\dot{M}^{2,3}}, \phi) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$: $|A(u_\epsilon, u_\epsilon, u_\epsilon * w_\epsilon) - A(v^n, v^n, v^n)| < \frac{\eta}{3}$ (ρv^n converge fortement vers ρu_ϵ dans $L^3H^{\frac{1}{2}}$, donc aussi dans L^3L^3) ainsi que $|B_{R_0}(u_\epsilon, u_\epsilon, u_\epsilon * w_\epsilon) - B_{R_0}(v^n, v^n, v^n)| < \frac{\eta}{3}$ (a fortiori, on a convergence forte de ρv^n dans L^3L^2).

Comme, lorsque $n \to \infty$, $\langle v^n[v^n * w_\epsilon, \Lambda]v^n, \phi\rangle \to \langle u_\epsilon[u_\epsilon * w_\epsilon, \Lambda]u_\epsilon, \phi\rangle$, l'inégalité (8) que nous souhaitons prouver est en fait une égalité lorsque nous considérons u_ϵ.

Étape 3. Passage à la limite lorsque $\epsilon \to 0$.

Nous partons de $\iiint u_\epsilon(t,x)u_\epsilon(t,y)w_\epsilon * (u_\epsilon(t,x) - u_\epsilon(t,y))\frac{(\phi(t,x)-\phi(t,y))}{|x-y|^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$ que nous décomposons sous la forme $\frac{1}{2}A + B_R + C_R$. Nous reprenons stricto sensu les étapes 1 et 2 pour obtenir des majorations sur chacune des trois intégrales et la convergence de chacun des termes C_R, A et B_R. L'inégalité provient du passage à la limite de $|\vec{\nabla}u_\epsilon|^2$, car nous n'avons pas mieux qu'une convergence faible. □

Remarque. Dans les équations de Navier–Stokes, le pire terme à contrôler est $\vec{u}.(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u}$: a priori, il nécessite un contrôle local L^4L^4 sur $\vec{u}$ en plus des contrôles locaux habituels ($L^\infty L^2 \cap L^2H^1$). L'antisymétrie du terme bilinéaire permet une réécriture sous la forme $\vec{\nabla}.(|\vec{u}|^2\vec{u})$ dont le contrôle est assuré par $\vec{u} \in (L^3L^3)^3_{loc}$.

Dans le cas de ce modèle, il en va de même. Le terme $u[u,\Lambda]u$ n'a pas de sens dans $\mathcal{D}'$ sans un contrôle $(L^4L^4)_{loc}$ de u ; néanmoins, une réécriture de ce terme utilisant l'antisymétrie du commutateur permet de donner un sens à l'intégrale $\iiint u(t,x)u(t,y)(u(t,x) - u(t,y))\frac{(\phi(t,x)-\phi(t,y))}{|x-y|^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t$ grâce à la décomposition $\frac{1}{2}A + B_R + C_R$, avec un contrôle utilisant moins de régularité sur u (uniquement $L^\infty L^2_{uloc} \cap (L^2H^1)_{uloc}$). La seule différence avec les équations de Navier–Stokes est que la condition de dérivabilité ($L^3\dot{H}^{\frac{1}{2}}$) se lit explicitement sur le contrôle du terme A.

4. Conclusion

Dans le cas des équations de Navier–Stokes, lorsque la donnée initiale est dans $\dot{M}^{2,3}$, considérons l'ensemble suivant

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{u} \in \big(L^\infty\big((0,\infty),L^2\big)\big)^3_{loc} \cap \big(L^2\big((0,\infty),\dot{H}^1\big)\big)^3_{loc} \text{ solution de (2) adaptée au sens de Caffarelli, Kohn et Nirenberg ;} \\ \displaystyle\sup_{R>0,\,x_0\in\mathbb{R}^3,\,t>0} \frac{1}{R+\sqrt{\frac{t}{T_0}}}\int_{|x-x_0|\leqslant R} |\vec{u}(t,x)|^2\,\mathrm{d}x \leqslant C_0\|\vec{u}_0\|^2_{\dot{M}^{2,3}} ; \\ \displaystyle\sup_{x_0\in\mathbb{R}^3,\,t>0} \sqrt{\frac{T_0}{t}}\int_0^t \int_{|x-x_0|\leqslant\sqrt{\frac{t}{T_0}}} |\vec{\nabla}\otimes\vec{u}(s,x)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}s < C_0\|\vec{u}_0\|^2_{\dot{M}^{2,3}} \end{array}\right\}$$

(où $T_0 = T(\|\vec{u}_0\|_{\dot{M}^{2,3}})$ et C_0 une constante indépendante de $\vec{u}_0$).

C'est un compact (nous avons toutes les majorations pour appliquer le passage à la limite faible et le lemme de Fatou nous assure la préservation des inégalités d'énergie) réduit à un point lorsque la donnée initiale est petite (voir [3]) : ceci nous donne donc une « classe d'unicité » plus large que celle obtenue par le formalisme des solutions « *mild* ». Le modèle scalaire répond-il à cette classe d'unicité ? Nous avons construit une solution globale vérifiant une inégalité d'énergie (de type Scheffer). La question devient donc : existe-t-il un critère de Caffarelli, Kohn et Nirenberg associé à cette équation ?

Références

[1] C.P. Calderón, Existence of weak solutions for the Navier–Stokes equations with initial data in L^p, Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1) (1990).

[2] I. Gallagher, M. Paicu, Remarks on the blow-up of solutions to a toy model for the Navier–Stokes equations, Proc. Amer. Math. Soc. 137 (6) (2009) 2075–2083.

[3] F. Lelièvre, Approximations des équations de Navier–Stokes préservant le changement d'échelle et l'égalité d'énergie, Thèse, univ. Evry, 2010.

[4] P.-G. Lemarié-Rieusset, Weak infinite-energy solutions for the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^3$, C. R. Acad. Sci. Sér. I (1999) 1133–1138.

[5] P.-G. Lemarié-Rieusset, The Navier–Stokes equations in the critical Morrey–Campanato space, Rev. Mat. Iberoam. 23 (2007) 897–930.

[6] S. Montgomery-Smith, Finite-time blow up for a Navier–Stokes like solution, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (10) (2001) 3025–3029.