



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Géométrie algébrique

Une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles avec application de Nash bijective

A family of quasi-rational hypersurfaces with bijective Nash map

Maximiliano Leyton-Alvarez

Université Grenoble I, institut Fourier, UMR 5582 CNRS-UJF, BP 74, 38402 St. Martin d'Hères cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 21 novembre 2010

Accepté après révision le 26 janvier 2011

Présenté par Jean-Pierre Demailly

RÉSUMÉ

Le problème des arcs de Nash pour les singularités normales de surfaces affirme qu'il y aurait autant de familles d'arcs sur un germe de surface singulier (S, O) que de composantes essentielles d'une désingularisation de (S, O) . Il est connu que ce problème se réduit à étudier les singularités quasi-rationnelles. L'objet de cette Note est de répondre positivement au problème de Nash pour une famille d'hypersurfaces quasi-rationnelles non rationnelles. La même méthode s'applique pour répondre positivement dans d'autres cas, par exemple, les singularités de type \mathbb{E}_6 et \mathbb{E}_7 , et pour fournir des preuves simples de cas connus.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

The Nash problem on arcs for normal surface singularities states that there are as many arc families on a germ (S, O) of a singular surface as there are essential components of a desingularisation of (S, O) . It is known that this problem can be reduced to the study of quasi-rational singularities. In this Note we give a positive answer to the Nash problem for a family of non-rational quasi-rational hypersurfaces. This same method applies to give a positive answer in some other cases, for instance, the \mathbb{E}_6 and \mathbb{E}_7 type singularities, and gives simple proofs of known cases.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soient \mathbf{k} un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, S une surface algébrique normale sur \mathbf{k} et $\pi : X \rightarrow S$ la résolution minimale de S . Chaque composante irréductible E de la fibre exceptionnelle de π est appelée *diviseur essentiel* sur S . On note $\text{Ess}(S)$ l'ensemble des diviseurs essentiels sur S .

Soit K un corps d'extension de \mathbf{k} . Un morphisme $\text{Spec } K[[t]] \rightarrow S$ est appelé K -arc. On note S_∞ l'espace d'arcs sur S (voir [5]). Les K -points de S_∞ sont en correspondance bijective avec les K -arcs sur S . Par abus de notation, pour $\alpha \in S_\infty$ on note α son \mathbf{k}_α -arc correspondant, où \mathbf{k}_α est le corps résiduel du point α . Soit $p_\infty : S_\infty \rightarrow S$ la projection canonique $\alpha \mapsto \alpha(0)$, où 0 est le point fermé de $\text{Spec } \mathbf{k}_\alpha[[t]]$. On note $S_\infty^\circ := p_\infty^{-1}(\text{Sing } S)$, où $\text{Sing } S$ est le lieu singulier de S , et $\mathcal{CN}(S)$ l'ensemble des composantes irréductibles de S_∞° . Nash a démontré que l'application $\mathcal{N}_S : \mathcal{CN}(S) \rightarrow \text{Ess}(S)$ qui associe à

Adresse e-mail : leyton@ujf-grenoble.fr.

$C \in \mathcal{CN}(S)$ l'adhérence $\overline{\{\hat{\alpha}(0)\}}$ est bien définie et injective, où $\hat{\alpha}$ est le relèvement à X du point générique α de C , c.-à-d. $\pi \circ \hat{\alpha} = \alpha$. Le problème de Nash consiste à étudier la surjectivité de \mathcal{N}_S .

Soit $E \in \text{Ess}(S)$. On note N_E l'adhérence dans S_∞ de l'ensemble $\{\alpha \in S_\infty \setminus (\text{Sing } S)_\infty; \hat{\alpha}(0) \in E\}$. On peut montrer que N_E est irréductible et que $S_\infty^s = \bigcup_E N_E$.

Les morphismes $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S$ sont appelés K -wedges sur S . Ils sont en correspondance bijective avec les $K[[s]]$ -points de S_∞ . L'image du point fermé (resp. du point générique) de $\text{Spec } K[[s]]$ dans S_∞ est appelé le centre (resp. l'arc générique) du K -wedge ω . On note ω^* le comorphisme de ω . Un K -wedge ω est appelé K -wedge admissible centré en N_E si le centre (resp. l'arc générique) de ω est le point générique de N_E (resp. appartient à S_∞^s). Dans [8] on montre que E appartient à l'image de l'application de Nash \mathcal{N}_S si et seulement si tout K -wedge admissible centré en N_E se relève à X c.-à-d. il existe un K -wedge $\hat{\omega}$ sur X tel que $\pi \circ \hat{\omega} = \omega$.

On considère l'hypersurface $S(p, h_q)$ de \mathbb{A}_k^3 donnée par une équation $z^p + h_q(x, y) = 0$, où h_q est un polynôme homogène de degré q sans facteurs multiples, avec $p \geq 2$, $q \geq 2$ deux entiers premiers entre eux. Par exemple si $h_q(x, y) = x^q + y^q$, $S(p, h_q)$ est une surface de Pham-Brieskorn. Les surfaces $S(p, h_q)$ sont toutes quasi-rationnelles (voir [3]) et rationnelles si et seulement si $q = 2$ ou $(p, q) = (2, 3)$. On remarque que $S(p, h_2)$ est une singularité du type \mathbb{A}_{p-1} . Le résultat principal de cette note est le théorème suivant.

Théorème 1.1. *Pour tous les entiers $p \geq 2$, $q \geq 2$ premiers entre eux, l'application $\mathcal{N}_{S(p, h_q)}$ est bijective.*

On remarque que les critères de [6] et [7] ne s'appliquent pas en général aux familles $S(p, h_q)$. En utilisant la même méthode que dans la preuve du Théorème 1.1 on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.2. *Si S est une singularité du type \mathbb{E}_6 ou \mathbb{E}_7 , l'application \mathcal{N}_S est bijective.*

On obtient aussi une preuve simple de la bijectivité de l'application de Nash pour plusieurs cas connus, par exemple \mathbb{D}_n ($n \geq 4$).

2. Idée de la preuve du résultat principal

Nash a démontré que l'application $\mathcal{N}_{\mathbb{A}_m}$ associée à la surface de type \mathbb{A}_m , $m \geq 2$, est bijective. On suppose donc que $q \geq 3$ car $S(p, h_2)$ est une singularité de type \mathbb{A}_{p-1} .

Notons O l'origine de \mathbb{A}_k^3 . On décrit la désingularisation de l'hypersurface $S(p, h_q)$ en utilisant les constellations toriques de points infiniment voisins de O (voir [2]), les éventails de Newton (voir [4]) et les G -désingularisations (voir [1]). Par des éclatements toriques de n points infiniment voisins de O d'une chaîne \mathcal{C}_n nous obtenons la proposition suivante. On note $\sigma_n : X(\mathcal{C}_n) \rightarrow \mathbb{A}_k^3$ le morphisme torique induit par \mathcal{C}_n et $S_{\mathcal{C}}$ le transformé strict de $S(p, h_q)$.

Proposition 2.1. *Soient $p > q$ et $p = nq + r$ la division entière, $1 \leq r < q$. Si $r = 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ est la résolution minimale de $S(p, h_q)$ et la fibre exceptionnelle $\sigma_n^{-1}(O) \cap S_{\mathcal{C}}$ est la réunion de nq courbes rationnelles. Si $r > 1$, alors $S_{\mathcal{C}}$ a un unique point singulier s , et de plus, $(S_{\mathcal{C}}, s)$ est isomorphe à $(S(r, h_q), O)$.*

À transformation linéaire près, on suppose que x et y ne divise pas $h_q(x, y)$. Notons $f = z^p + h_q(x, y)$; on considère l'éventail de Newton $\Gamma^*(f)$ associé à f et soit $\Sigma_{\mathcal{G}}$ une G -subdivision régulière de $\Gamma^*(f)$, c.-à-d. une subdivision régulière de chaque cône $\tau \in \Gamma^*(f)$ n'ayant comme arêtes que celles qui portent les vecteurs du système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$. D'après [1] cette subdivision existe. On note $\pi_{\mathcal{N}} : X(\Gamma^*(f)) \rightarrow \mathbb{A}_k^3$ (resp. $\pi_{\mathcal{G}} : X(\Sigma_{\mathcal{G}}) \rightarrow X(\Gamma^*(f))$) le morphisme torique induit par la subdivision $\Gamma^*(f)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0}^3$ (resp. $\Sigma_{\mathcal{G}}$ de $\Gamma^*(f)$) et $S_{\mathcal{G}}$ le transformé strict de $S(p, h_q)$ associé au morphisme $\pi := \pi_{\mathcal{G}} \circ \pi_{\mathcal{N}}$.

Proposition 2.2. *$S_{\mathcal{G}}$ est une bonne résolution de $S(p, h_q)$ et son graphe dual est une étoile à q branches identiques. Cette résolution est minimale si et seulement si $p \not\equiv 1 \pmod{q}$. Si $p > q$, $\sigma_n : S_{\mathcal{C}} \rightarrow S(p, h_q)$ factorise $\pi : S_{\mathcal{G}} \rightarrow S(p, h_q)$, c.-à-d. il existe un morphisme $\pi' : S_{\mathcal{G}} \rightarrow S_{\mathcal{C}}$ tel que $\pi = \sigma_n \circ \pi'$.*

Soit E_0 le diviseur associé au sommet central du graphe dual de la résolution $\pi : S_{\mathcal{G}} \rightarrow S(p, h_q)$.

Proposition 2.3. *Si $p \equiv 1 \pmod{q}$, seul le diviseur E_0 n'est pas un diviseur essentiel sur $S(p, h_q)$.*

Pour ρ un vecteur extrémal de $\Sigma_{\mathcal{G}}$, on note D_ρ l'orbite fermée associée à ρ . Notons $E\Sigma_{\mathcal{G}}$ l'ensemble des vecteurs extrémaux, et $S^2 \Gamma^*(f)$ le 2-squelette de $\Gamma^*(f)$. La proposition suivante donne des équations locales pour les composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle du morphisme $\pi : S_{\mathcal{G}} \rightarrow S(p, h_q)$.

Proposition 2.4. Soit $\rho \in E\Sigma_G$. Alors, $D_\rho \cap S_G \neq \emptyset$ ssi $\rho \in S^2 \Gamma^*(f) \cap E\Sigma_G$ et ces diviseurs sont exceptionnels ssi de plus $\rho \in \mathbb{Z}_{>0}^3$. L'ensemble de tels ρ et $(0, 0, 1)$ est le système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$, où τ est le cône engendré par $(0, 0, 1)$ et (p, p, q) . De plus $E_0 = D_{(p,p,q)} \cap S_G$.

Dans la suite on montre que pour chaque $E \in \text{Ess}(S(p, h_q))$ tous les K -wedges admissibles centrés en N_E se relèvent à la résolution minimale de $S(p, h_q)$. Avec le théorème suivant on réduit le nombre de cas à étudier :

Théorème 2.5. Soient S une surface algébrique normale sur \mathbf{k} et $\pi : X \rightarrow S$ la résolution minimale de S . Supposons qu'il existe un morphisme propre et birationnel $\pi' : S' \rightarrow S$, où S' est une surface algébrique normale sur \mathbf{k} , tel que π' factorise π . Alors, si l'application de Nash \mathcal{N}_S associée à S est bijective, l'application de Nash $\mathcal{N}_{S'}$ associée à S' l'est aussi.

Si ω est un K -wedge sur S' , alors $\pi' \circ \omega$ est un K -wedge admissible sur S , d'où le Théorème 2.5.

En vertu des résultats 2.1, 2.2 et 2.5, on peut supposer que $p > q \geq 3$. Soient $E \in \text{Ess}(S(p, h_q))$ et α_E le point générique de N_E . On note $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) := (\text{Ord}_t \alpha_E^*(x), \text{Ord}_t \alpha_E^*(y), \text{Ord}_t \alpha_E^*(z))$. D'après la Proposition 2.4, le vecteur (μ_x, μ_y, μ_z) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}_{>0}^3$.

On considère un K -wedge $\omega : \text{Spec } K[[s, t]] \rightarrow S(p, h_q)$ admissible centré en N_E . On note $(\eta_x, \eta_y, \eta_z) := (\text{Ord}_t \omega^*(x), \text{Ord}_t \omega^*(y), \text{Ord}_t \omega^*(z))$. On peut écrire le comorphisme de ω de la façon suivante :

$\omega^*(x) = t^{\eta_x} \chi$; $\omega^*(y) = t^{\eta_y} \varphi$; $\omega^*(z) = t^{\eta_z} \psi$, où χ, φ et ψ sont des séries formelles dans $K[[s, t]]$ qui ne sont pas divisibles par t . On remarque que $\mu_x = \mu_y$ et $\eta_x = \eta_y$. Maintenant, on donne la proposition clé pour la preuve du Théorème 1.1.

Proposition 2.6. Si les séries formelles χ, φ et ψ sont inversibles, alors le K -wedge admissible ω centré en N_E se relève à la résolution minimale de $S(p, h_q)$.

Pour une série non nulle $\phi := \sum c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2}$, $c_{(e_1, e_2)} \in K$ on définit les applications suivantes :

$v : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $v \mapsto v_\nu \phi := \min\{v \cdot e \mid e \in \mathcal{E}(\phi)\}$, où $\mathcal{E}(\phi) = \{(e_1, e_2) \mid c_{(e_1, e_2)} \neq 0\}$;

$\text{PPr} : \mathbb{R}_{>0}^2 \rightarrow K[[s, t]]$, $v \mapsto \phi_v := \sum_{e \cdot v = v_\nu \phi} c_{(e_1, e_2)} s^{e_1} t^{e_2}$;

$\text{Fl} : K[[s, t]] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$, où $\text{Fl}(\phi)$ est le nombre de facteurs irréductibles de ϕ comptés avec multiplicité.

Proposition 2.7. Il existe un vecteur $v \in \mathbb{Q}_{>0}^2$ tel que : $\text{Fl}(\chi) \leq \text{Deg}_t \chi_v = v_\nu \chi = \mu_x - \eta_x \leq p - 1$, $\text{Fl}(\varphi) \leq \text{Deg}_t \varphi_v = v_\nu \varphi = \mu_y - \eta_y \leq p - 1$ et $\text{Fl}(\psi) \leq \text{Deg}_t \psi_v = v_\nu \psi = \mu_z - \eta_z \leq q - 1$. De plus, χ (resp. φ, ψ) est inversible si et seulement si $\mu_x - \eta_x = 0$ (resp. $\mu_y - \eta_y = 0, \mu_z - \eta_z = 0$).

Soit $h_q(x, y) = \prod_{i=1}^q (a_i x + b_i y)$ la décomposition en facteurs irréductibles de h_q . Le K -wedge ω doit satisfaire l'équation $z^p = -h_q(x, y)$ donc : $t^{p\eta_z - q\eta_x} \psi^p = -h_q(\chi, \varphi) = -\prod_{i=1}^q \gamma_i$, où $\gamma_i := a_i \chi + b_i \varphi$.

Dans la suite v est comme dans la Proposition 2.7. Les combinaisons linéaires de χ et φ données par les γ_i plus l'hypothèse sur les facteurs irréductibles de h_q permettent de montrer le lemme suivant.

Lemme 2.8. Soit $\lambda := \text{p.g.c.d}(\gamma_1, \gamma_2)$. Alors $\text{p.g.c.d}(\gamma_i, \gamma_j) = \lambda I_{ij}$, où I_{ij} est inversible pour tous les entiers $1 \leq i < j \leq q$. De plus, si λ est inversible, alors χ, φ et ψ sont inversibles.

La proposition suivante achève la preuve du Théorème 1.1 :

Proposition 2.9. Les séries formelles χ, φ, ψ sont inversibles.

En raisonnant par l'absurde on suppose les séries formelles χ, φ et ψ non toutes inversibles. Dans ce cas on a $\eta_x = \eta_y \geq 1$ et $p\eta_z - q\eta_x > 0$. Comme χ et φ ne sont pas divisibles par t , t divise γ_i ssi t ne divise pas γ_j pour tout $j \neq i$. Quitte à re-numéroter les γ_i , on peut supposer que $t^{p\eta_z - q\eta_x}$ divise γ_1 . D'après le Lemme 2.8 il existe des séries formelles γ'_i telles que : $\gamma_1 = -t^{p\eta_z - q\eta_x} \gamma'_1 \lambda$ et $\gamma_i = \gamma'_i \lambda$ pour $2 \leq i \leq q$, où λ n'est pas inversible et $\text{p.g.c.d}(\gamma'_i, \gamma'_j)$ est inversible pour $1 \leq i < j \leq q$.

Lemme 2.10. Le v -ordre de λ est $\mu_x - \eta_x$, c.-à-d. $v_\nu \lambda = \mu_x - \eta_x$.

Montrons d'abord la Proposition 2.9. On rappelle que $\eta_y = \eta_x \leq \mu_x = \mu_y$, $\eta_z \leq \mu_z$ et que (μ_x, μ_y, μ_z) appartient au système générateur minimal du semi-groupe $\tau \cap \mathbb{Z}^3$ (Proposition 2.4). Alors, on peut montrer que (η_x, η_z) appartient à l'enveloppe convexe Γ de l'ensemble des éléments non nuls du semi-groupe $\tau' \cap \mathbb{Z}^2$, où τ' est le cône engendré par $(0, 1)$ et (μ_x, μ_z) . Soit $\gamma' = \prod_{i=1}^q \gamma'_i$, d'où $\psi^p = \gamma' \lambda^q$. D'après le Lemme 2.10 on a $v_\nu \gamma' = p\mu_z - q\mu_x - (p\eta_z - q\eta_x)$. Par définition $v_\nu \gamma' \geq 0$. Or $v_\nu \gamma' \geq 0$ ssi $(\eta_x, \eta_z) = (\mu_x, \mu_z)$, car (η_x, η_z) appartient à Γ . Ceci rentre en contradiction avec la Proposition 2.7.

Idée de la preuve du Lemme 2.10. Comme $\gamma_i = a_i\chi + b_i\varphi$ pour $1 \leq i \leq q$, on a $v_v\lambda \leq \mu_x - \eta_x$. Si $v_v\lambda < \mu_x - \eta_x$, alors $v_v\gamma'_i > 0$, pour tout $2 \leq i \leq q$. Ceci implique que les γ'_i , pour $2 \leq i \leq q$, ne sont pas inversibles. Comme $\text{p.g.c.d}(\gamma'_i, \gamma'_j)$ est inversible pour tout $2 \leq i < j \leq q$, la série $\gamma' = \prod_{i=1}^q \gamma'_i$ a au moins $q - 1$ facteurs irréductibles non associés. Comme $\psi^p = \gamma'\lambda^q$, on a $\text{Fl}(\gamma') = q - 1$, car $\text{Fl}(\psi) \leq q - 1$ (Proposition 2.7) et on obtient que γ'_i est inversible, que $\psi = \prod_{i=1}^{q-1} \psi_i$, où les ψ_i sont irréductibles non associées, et que $\mu_z - \eta_z = q - 1$. De plus on a $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (p, p, q)$. Ceci implique que $p - q > 1$ car si $p - q = 1$ le diviseur $E_0 = D_{(p,p,q)} \cap S_G$ n'est pas essentiel (Proposition 2.3). On peut supposer que $\psi_i^p = \gamma'_{i+1}\lambda_i^q$, où $\lambda = \prod_{i=1}^{q-1} \lambda_i$ et $\text{p.g.c.d}(\lambda_i, \lambda_j)$ est inversible pour tout $1 \leq i < j \leq q - 1$. Comme $(\mu_x, \mu_y, \mu_z) = (p, p, q)$, on a $t^{p\eta_z - q\eta_x}\psi_v = -h_q(\chi_v, \varphi_v)$ (Proposition 2.7), d'où $v_v\gamma_i = \mu_x - \eta_x$ pour tout $1 \leq i \leq q$. Ceci implique que $v_v\gamma'_{i+1} = v\gamma'_2$ pour tout $1 \leq i \leq q - 1$. Comme $v_v\gamma'_{i+1} = v\gamma'_2$ et $v_v\psi_i = 1$ pour tout $1 \leq i \leq q - 1$, $v_v\lambda_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq q - 1$, d'où les λ_i ne sont pas inversibles. Ainsi on obtient que $\gamma_{i+1} = I_i\psi_i^{p-q}\lambda$, pour $1 \leq i \leq q - 1$, où les I_i sont inversibles. Comme $q \geq 3$ et $\gamma_i := a_i\chi + b_i\varphi$, il existe deux constantes $a, b \in K$ telles que $t^{p\eta_z - q\eta_x}\gamma'_1 = aI_1\psi_1^{p-q} + bI_2\psi_2^{p-q}$. Mais γ'_1 est inversible, $p\eta_z - q\eta_x > 0$ et $p - q > 1$, donc ψ_1 et ψ_2 sont inversibles ou divisibles par t , d'où une contradiction.

Remarque 1. La preuve du Théorème 1.2 repose sur la construction d'une G -désingularisation de l'éventail de Newton et sur des propriétés, pour \mathbb{E}_6 et \mathbb{E}_7 , des séries formelles χ , φ et ψ analogues aux séries définies pour $S(p, h_q)$.

Remerciements

Je remercie Gérard Gonzalez-Sprinberg pour les nombreuses discussions et son constant encouragement.

Références

- [1] C. Bouvier, G. Gonzalez-Sprinberg, Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G -désingularisations de variétés toriques, *Tohoku Math. J. Ser. 2* (47) (1995) 125–149.
- [2] A. Campillo, G. Gonzalez-Sprinberg, M. Lejeune-Jalabert, Clusters of infinitely near points, *Math. Ann.* 306 (1996) 169–194.
- [3] H. Flenner, M. Zaidenberg, Rational curves and rational singularities, *Math. Z.* 244 (2003) 549–575.
- [4] G. Gonzalez-Sprinberg, M. Lejeune-Jalabert, Modèles canoniques plongés I, *Kodai Math. J.* 14 (1991) 194–209.
- [5] S. Ishii, Jet schemes, arc spaces and the Nash problem, *C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can.* 29 (2007) 1–21.
- [6] M. Morales, Some numerical criteria for the Nash problem on arcs for surfaces, *Nagoya Math. J.* 191 (2008) 1–19.
- [7] C. Plénat, P. Popescu-Pampu, A class of non-rational surface singularities with bijective Nash map, *Bull. Soc. Math. France* 134 (3) (2006) 383–394.
- [8] A. Reguera, A curve selection lemma in spaces of arcs and the image of the Nash map, *Compos. Math.* 142 (2006) 119–130.