C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 451–454

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Géométrie différentielle

Un exemple en classe C^∞ de structure bihamiltonienne non décomposable localement en produit Kronecker-symplectique

A C^∞-example of bihamiltonian structure with no local decomposition into a product Kronecker-symplectic

Francisco-Javier Turiel

Geometría y Topología, Facultad de Ciencias, Campus de Teatinos, 29071 Málaga, Espagne

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 31 janvier 2011
Accepté après révision le 28 février 2011
Disponible sur Internet le 15 mars 2011

Présenté par Charles-Michel Marle

RÉSUMÉ

Dans une précédente Note, on a donné une décomposition locale en produit Kronecker-symplectique pour les structures bihamiltoniennes analytiques réelles ou holomorphes. Ici on montre qu'un tel résultat ne s'étend pas à la classe C^∞.

ABSTRACT

In a previous Note a local decomposition into a product Kronecker-symplectic was given for real analytic or holomorphic bihamiltonian structures. Here one shows that this result does not extend to the C^∞ category.

Considérons sur une variété différentiable réelle (au moins de classe C^∞) ou complexe (holomorphe) M une structure bihamiltonienne (Λ, Λ_1). Dans une précédente Note (voir [4]), dont on gardera les concepts et les notations, on a montré que si (Λ, Λ_1) est analytique réelle ou holomorphe et p un point régulier alors, au voisinage de ce point, (Λ, Λ_1) se décompose en un produit d'une structure bihamiltonienne de Kronecker et d'une symplectique pourvu qu'une certaine condition nécessaire, portant sur le polynôme caractéristique du facteur symplectique, soit satisfaite (théorème 1). Ici on donnera un exemple de structure bihamiltonienne réelle qui montre que ce résultat ne s'étend pas à la classe C^∞. Pour le faire on s'appuiera sur l'exemple de Lewy (voir [2]) d'une équation aux dérivées partielles sans solutions nulle part (pour un exemple classique de G-structures non équivalentes, appuyé aussi sur l'exemple de Lewy, voir [1]).

À rappeler que l'ensemble des points réguliers de (Λ, Λ_1) est un ouvert dense de M, appelé l'ouvert régulier de (Λ, Λ_1). En outre, il n'est pas difficile de voir que si (Λ, Λ_1) définit une G-structure, ce qui sera notre cas, alors son ouvert régulier est la variété M toute entière et que la condition nécessaire relative au polynôme caractéristique du facteur symplectique est automatiquement satisfaite (en effet, dans ce cas les coefficients de ce polynôme sont des constantes et nulles leurs différentielles).

1. La structure bihamiltonienne au-dessus d'un tenseur de type $(1,1)$ et d'un feuilletage

Considérons sur le cotangent T^*N d'une n-variété N la 1-forme de Liouville ρ, définie par $\rho(v) = \alpha(\pi_*(v))$ lorsque $v \in T_\alpha(T^*N)$ et $\pi : T^*N \to N$ est la projection canonique, et la 2-forme de Liouville $\omega = d\rho$. Un tenseur S sur N, de type

Adresse e-mail : turiel@agt.cie.uma.es.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.02.019

$(1,1)$, étant donné, soit $\varphi_S : T^*N \to T^*N$ le morphisme de fibrés vectoriels défini par $\varphi_S(\alpha) = \alpha \circ S$ lorsque S est regardé comme un morphisme de TN sur lui-même. Posons $\omega_1 = (\varphi_S)^*\omega$. Alors la formule $\omega_1(X,Y) = \omega(S^*X, Y)$ définit un tenseur S^* sur T^*N, encore de type $(1,1)$, appelé le prolongement de S.

Maintenant considérons un feuilletage $\mathcal{G}$ sur N de codimension r. Supposons S inversible et que :

(1) $\alpha \circ S$ est fermée le long de $\mathcal{G}$ lorsque α est une 1-forme fermée, sur un ouvert de N, telle que $\operatorname{Ker}\alpha \supset \mathcal{G}$.
(2) $N_S(\mathcal{G}, \mathcal{G}) = 0$ où N_S désigne la torsion de Nijenhuis de S.

Alors $S\mathcal{G}$ est aussi un feuilletage. Soit $\mathcal{G}_0$ le ω-orthogonal de $\pi_*^{-1}(S\mathcal{G})$, qui est égal au ω_1-orthogonal de $\pi_*^{-1}(\mathcal{G})$. Il n'est pas difficile de montrer que $\mathcal{G}_0$ est un feuilletage, de dimension r, symplectiquement complet par rapport à ω et ω_1 (voir [3] pour la notion de feuilletage symplectiquement complet). En outre, le quotient M de T^*N par $\mathcal{G}_0$ est globalement défini et il existe une application projection, bien sûr unique, $\pi' : M \to N$ telle que $\pi' \circ \tilde{\pi} = \pi$, où $\tilde{\pi} : T^*N \to M$ est la projection canonique. En fait, $\pi' : M \to N$ peut être regardée comme un fibré vectoriel, quotient de T^*N par un sous-fibré vectoriel, car $\mathcal{G}_0 \subset \operatorname{Ker}\pi_*$.

Comme $\mathcal{G}_0$ était symplectiquement complet pour ω et ω_1, les structures de Poisson Λ_ω et Λ_{ω_1}, associées à ω et ω_1 respectivement, se projettent en deux structures de Poisson Λ et Λ_1 sur M.

Proposition 1. *Le couple (Λ, Λ_1) ainsi construit est une structure bihamiltonienne sur M.*

On a, donc, une méthode simple pour construire des structures bihamiltoniennes. Pour ces structures, la dimension du facteur symplectique (algébrique) en un point p quelconque est le double de celle du plus grand sous-espace vectoriel $V(\pi'(p)) \subset \mathcal{G}(\pi'(p))$ qui soit $S(\pi'(p))$-invariant, et son polynôme caractéristique est le carré de celui de $S(\pi'(p)) : V(\pi'(p)) \to V(\pi'(p))$.

Exemples.

(a) Sur $N = \mathbb{K}^n$, $n \geqslant 1$, on considère le feuilletage donné par la 1-forme fermée $\alpha = \sum_{j=1}^n dx_j$ et le tenseur $S = \sum_{j=1}^n h_j(x_j)(\partial/\partial x_j) \otimes dx_j$, où les fonctions $h_1, \dots, h_n$ ne s'annulent jamais. Alors la structure bihamiltonienne associée (Λ, Λ_1), définie sur $M = T^*(\mathbb{K}^n)/\mathcal{G}_0$, a un facteur symplectique non trivial au point p si et seulement si $\tilde{h}(\pi'(p)) = 0$ où $\tilde{h} = \prod_{1 \leqslant j<k \leqslant n}(h_j - h_k)$. Autrement dit, (Λ, Λ_1) est Kronecker exactement sur l'ouvert $(\tilde{h} \circ \pi')^{-1}(\mathbb{K} - \{0\})$.
(b) Maintenant, sur $N = \mathbb{R}^n - \{0\}$, $n \geqslant 1$, on considère le feuilletage $\mathcal{G}$ défini par $\alpha = \sum_{j=1}^n x_j^{a_j} dx_j$, où $a_1, \dots, a_r$ sont des nombres entiers positifs, et le tenseur $S = \sum_{j=1}^n j(\partial/\partial x_j) \otimes dx_j$. Alors la structure bihamiltonienne associée (Λ, Λ_1), définie sur $M = T^*(\mathbb{R}^n - \{0\})/\mathcal{G}_0$, possède un facteur symplectique non trivial sur le fermé $(h \circ \pi')^{-1}(0)$, où $h = x_1 \cdots x_n$, et elle est Kronecker sur l'ouvert $(h \circ \pi')^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$.

Soit ϕ_t le flot du champ de vecteurs $\xi = \sum_{j=1}^n (a_j + 1)^{-1} x_j \partial/\partial x_j$. Comme $L_\xi \alpha = \alpha$ et que $L_\xi S = 0$, le feuilletage $\mathcal{G}$ et le tenseur S se projettent, sur la variété quotient $\widetilde{N} = (\mathbb{R}^n - \{0\})/G$ où $G = \{\phi_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, en un feuilletage $\widetilde{\mathcal{G}}$ et un tenseur $\widetilde{S}$ respectivement. Bien sûr, $\widetilde{\mathcal{G}}$ et $\widetilde{S}$ satisfont aussi les conditions (1) et (2) et donnent lieu à une structure bihamiltonienne sur $\widetilde{M} = (T^*\widetilde{N})/\widetilde{\mathcal{G}}_0$, où $\widetilde{\mathcal{G}}_0$ est l'orthogonal de $\pi_*^{-1}(\widetilde{S}\widetilde{\mathcal{G}})$ par rapport à la forme symplectique de Liouville de $T^*\widetilde{M}$.

2. Un résultat de non existence

Sur $\mathbb{R}^{4m+3} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{4m}$, muni des coordonnées $(x,y) = (x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_{4m})$, considérons le feuilletage $\mathcal{A}$ défini par $dx_1 = dx_2 = dx_3 = 0$, les 1-formes fermées $\alpha_1 = dx_1 - dx_2$, $\alpha_2 = x_2\, dx_2 - dx_3$, et le tenseur

$$G = \sum_{j=1}^{3} a_j(\partial/\partial x_j) \otimes dx_j + \sum_{j=1}^{2m} \big[(\partial/\partial y_{2j}) \otimes dy_{2j-1} - (\partial/\partial y_{2j-1}) \otimes dy_{2j}\big]$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \big[(\partial/\partial y_{4j-3}) \otimes dy_{4j-1} + (\partial/\partial y_{4j-2}) \otimes dy_{4j}\big] + \sum_{j=1}^{m} [h_{2j-1}\partial/\partial y_{4j-3} + h_{2j}\partial/\partial y_{4j-2}] \otimes dx_1,$$

où $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} - \{0\}$, avec $a_j \neq a_k$ si $j \neq k$, et où les fonctions $h_1, \dots, h_{2m}$ ne dépendent pas de y_{4j-3}, y_{4j-2}, $j = 1, \dots, m$.

Soient T_0 et T_1, respectivement, la partie semi-simple et la partie nilpotente de $G_{|\mathcal{A}}$. Alors T_0 est une structure complexe le long du feuilletage $\mathcal{A}$, pour laquelle la fonction $u_1 = y_3 + \imath y_4$ est holomorphe (à rappeler qu'une fonction λ à valeurs complexes est holomorphe si et seulement si $(d\lambda \circ T_0)_{|\mathcal{A}} = \imath\, d\lambda_{|\mathcal{A}}$). Dans la suite, on supposera holomorphe le long de $\mathcal{A}$ chaque fonction $h_{2k-1} + \imath h_{2k}$, $k = 1, \dots, m$. On vérifie sans difficulté que $N_G \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$.

Posons $\widetilde{G} = G + Z_1 \otimes \alpha_1 + Z_2 \otimes \alpha_2$ où Z_1, Z_2 sont deux champs de vecteurs, définis sur un ouvert U de $\mathbb{R}^{4m+3}$, tangents à $\mathcal{A}$. Alors $G_{|\mathcal{A}} = \widetilde{G}_{|\mathcal{A}}$. Le polynôme caractéristique de $\widetilde{G}$ est $(t - a_1)(t - a_2)(t - a_3)(t^2 + 1)^{2m}$ et $\widetilde{G}_{|\mathcal{A}}$ s'écrit à coefficients constants dans les coordonnées (x, y). Par conséquent, si la torsion de Nijenhuis de $\widetilde{G}$ s'annule, on peut trouver, toujours localement, des coordonnées $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{4m})$ dans lesquelles $\mathcal{A}$ est défini par $\mathrm{d}\tilde{x}_1 = \mathrm{d}\tilde{x}_2 = \mathrm{d}\tilde{x}_3 = 0$, $\alpha_1 = \mathrm{d}\tilde{x}_1 - \mathrm{d}\tilde{x}_2$, $\alpha_2 = \tilde{x}_2\,\mathrm{d}\tilde{x}_2 - \mathrm{d}\tilde{x}_3$ et

$$\begin{aligned}\widetilde{G} = {}& \sum_{j=1}^{3} a_j(\partial/\partial\tilde{x}_j) \otimes \mathrm{d}\tilde{x}_j + \sum_{j=1}^{2m}\big[(\partial/\partial\tilde{y}_{2j}) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_{2j-1} - (\partial/\partial\tilde{y}_{2j-1}) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_{2j}\big] \\ &+ \sum_{j=1}^{m}\big[(\partial/\partial\tilde{y}_{4j-3}) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_{4j-1} + (\partial/\partial\tilde{y}_{4j-2}) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_{4j}\big].\end{aligned}$$

Comme u_1 est basique pour le feuilletage $\operatorname{Ker} T_1 \subset \mathcal{A}$, en coordonnées $(\tilde{x}, \tilde{y})$ elle ne dépend pas de $\tilde{y}_{4j-3}, \tilde{y}_{4j-2}$, $j = 1, \dots, m$. En outre $\mathrm{d}(\mathrm{d}u_1 \circ \widetilde{G}) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = \mathrm{d}(\mathrm{d}u_1 \circ G) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$; maintenant un calcul en coordonnées $(\tilde{x}, \tilde{y})$ montre l'existence locale d'une fonction g, holomorphe le long de $\mathcal{A}$, telle que $(\mathrm{d}g \circ T_1)_{|\mathcal{A}} = \mathrm{d}u_{1|\mathcal{A}}$ et que $\mathrm{d}(\mathrm{d}g \circ \widetilde{G}) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$; cette dernière propriété entraîne que $\mathrm{d}(\mathrm{d}g \circ G) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$ puisque $(G - \widetilde{G}) \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$. De même, de $(\mathrm{d}g \circ T_1)_{|\mathcal{A}} = \mathrm{d}u_{1|\mathcal{A}}$ on déduit, à l'aide des coordonnées (x, y), que $g = y_1 + \imath y_2 + \rho$, où ρ est holomorphe le long de $\mathcal{A}$ et ne dépend pas de y_{4j-3}, y_{4j-2}, $j = 1, \dots, m$.

Maintenant, si on fait $h_1 = y_3 g_1(x) - y_4 g_2(x)$, $h_2 = y_3 g_2(x) + y_4 g_1(x)$, c'est-à-dire si on fait $h_1 + \imath h_2 = (y_3 + \imath y_4)(g_1(x) + \imath g_2(x))$, et qu'on suppose encore $N_{\widetilde{G}} = 0$, alors un calcul montre que

$$(*) \quad (JX - \imath X) \cdot \varphi + g_1 + \imath g_2 = 0$$

où $\varphi = \partial\rho/\partial y_3$, $X = \partial/\partial x_1 + \partial/\partial x_2 + x_2\partial/\partial x_3$ et $JX = a_1\partial/\partial x_1 + a_2\partial/\partial x_2 + a_3 x_2\partial/\partial x_3$. En particulier $[JX, -X] = (a_3 - a_2)\partial/\partial x_3$.

Les champs de vecteurs $JX, -X, [JX, -X]$ sont des combinaisons fonctionnelles de $\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3$ dont les coefficients non constants ne dépendent que de x_2, ce qui permet, de façon naturelle, de les voir comme des champs des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Regardés dans $\mathbb{R}^3$ les champs de vecteurs affines $JX, -X, [JX, -X]$, qui sont linéairement indépendants partout, définissent une algèbre de Lie de dimension trois dont le centre est engendré par $[JX, -X]$. D'autre part, sur $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées $y = (y_1, y_2, y_3)$, les champs de vecteurs affines $Y_1 = -\partial/\partial y_1 - 2y_2\partial/\partial y_3$, $Y_2 = -\partial/\partial y_2 + 2y_1\partial/\partial y_3$ et $[Y_1, Y_2] = -4\partial/\partial y_3$, qui sont linéairement indépendants partout, définissent une deuxième algèbre de Lie de dimension trois dont le centre est engendré par $[Y_1, Y_2]$. Comme $\mathbb{R}^3$ est simplement connexe et que tout champ de vecteurs affine est complet, il existe un difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ avec lui-même qui transforme $JX, -X, [JX, -X]$ en $Y_1, Y_2, [Y_1, Y_2]$. D'après Lewy (voir l'équation (5) de la page 156 de [2]), il existe une fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$, de classe C^∞, telle que l'équation $(Y_1 + \imath Y_2) \cdot \widetilde{F} = F$ n'a jamais de solution, même localement. Donc l'image réciproque de $-F$ par ce difféomorphisme nous donne une fonction $f(x) = g_1(x) + \imath g_2(x)$ pour laquelle l'équation $(*)$ n'a pas de solution. Autrement dit :

Théorème 1. *On peut choisir les fonctions $g_1(x)$ et $g_2(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, de manière que, si on fait $h_1 = y_3 g_1(x) - y_4 g_2(x)$, $h_2 = y_3 g_2(x) + y_4 g_1(x)$, alors aucun tenseur $\widetilde{G}$ n'est à torsion de Nijenhuis nulle, même localement.*

3. Le contre-exemple

On profitera de la proposition 1 et du théorème 1 pour construire l'exemple voulu. Considérons sur $\mathbb{R}^7$ le tenseur

$$\begin{aligned}S = {}& \sum_{j=1}^{3} a_j(\partial/\partial x_j) \otimes \mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{2}\big[(\partial/\partial y_{2j}) \otimes \mathrm{d}y_{2j-1} - (\partial/\partial y_{2j-1}) \otimes \mathrm{d}y_{2j}\big] + (\partial/\partial y_1) \otimes \mathrm{d}y_3 + (\partial/\partial y_2) \otimes \mathrm{d}y_4 \\ &+ \big[(y_3 g_1 - y_4 g_2)(\partial/\partial y_1) + (y_3 g_2 + y_4 g_1)(\partial/\partial y_2)\big] \otimes \mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

et le feuilletage $\mathcal{G} = \operatorname{Ker}(\alpha_1 \wedge \alpha_2)$. Alors $N_S \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$ et $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \mathrm{d}(\alpha \circ S) = 0$ lorsque α est une 1-forme fermée telle que $\operatorname{Ker}\alpha \supset \mathcal{G}$, car dans ce cas $\alpha = \sum_{j=1}^{3} f_k(x)\,\mathrm{d}x_k$. On peut, donc, appliquer la construction de la section 1 pour obtenir une structure bihamiltonienne (Λ, Λ_1) au-dessus de S et $\mathcal{G}$.

Soient $(x, y, \tilde{x}, \tilde{y}) = (x_1, x_2, x_3, y_1, \dots, y_4, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_4)$ les coordonnées sur $T^*\mathbb{R}^7$ associées aux coordonnées (x, y) de $\mathbb{R}^7$. Dans ces coordonnées $\omega = \sum_{j=1}^{3} \mathrm{d}\tilde{x}_j \wedge \mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{4} \mathrm{d}\tilde{y}_j \wedge \mathrm{d}y_j$, $\omega_1 = \omega(S^*, \ )$ et

$$\begin{aligned}S^* = {}& \sum_{j=1}^{3} a_j\big[(\partial/\partial x_j) \otimes \mathrm{d}x_j + (\partial/\partial\tilde{x}_j) \otimes \mathrm{d}\tilde{x}_j\big] + \sum_{j=1}^{2}\big[(\partial/\partial y_{2j}) \otimes \mathrm{d}y_{2j-1} - (\partial/\partial y_{2j-1}) \otimes \mathrm{d}y_{2j} + (\partial/\partial\tilde{y}_{2j-1}) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_{2j} \\ &- (\partial/\partial\tilde{y}_{2j}) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_{2j-1}\big] + (\partial/\partial y_1) \otimes \mathrm{d}y_3 + (\partial/\partial y_2) \otimes \mathrm{d}y_4 + (\partial/\partial\tilde{y}_3) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_1 + (\partial/\partial\tilde{y}_4) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_2 \\ &+ \big[(y_3 g_1 - y_4 g_2)(\partial/\partial y_1) + (y_3 g_2 + y_4 g_1)(\partial/\partial y_2) - (\tilde{y}_1 g_1 + \tilde{y}_2 g_2)(\partial/\partial\tilde{y}_3) \\ &+ (\tilde{y}_1 g_2 - \tilde{y}_2 g_1)(\partial/\partial\tilde{y}_4)\big] \otimes \mathrm{d}x_1 + \sum_{j=1}^{3}(\partial/\partial\tilde{x}_j) \otimes \beta_j\end{aligned}$$

où β_1, β_2, β_3 sont des combinaisons fonctionnelles de $\mathrm{d}x_1$, $\mathrm{d}x_2$, $\mathrm{d}x_3$, $\mathrm{d}y_3$, $\mathrm{d}y_4$, $\mathrm{d}\tilde{y}_1$, $\mathrm{d}\tilde{y}_2$.

La sous-variété $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 0$ de $T^*\mathbb{R}^7$ est transverse au feuilletage $\mathcal{G}_0$ et coupe chacune de ses feuilles exactement une fois. Donc $M = T^*\mathbb{R}^7/\mathcal{G}_0$ s'identifie, de manière naturelle, à cette sous-variété munie des coordonnées $(x_1, x_2, x_3, y_1, \ldots, y_4, \tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_4)$. Il n'est pas difficile de voir que (Λ, Λ_1) définit une G-structure. En outre, son rang est égal à dix, son axe (principal) $\mathcal{A}_1$ est défini par $\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_3 = 0$, son axe secondaire $\mathcal{A}_2$ est le feuilletage engendré par $\partial/\partial\tilde{x}_1$, la dimension du facteur symplectique vaut huit, et celle du facteur de Kronecker, quatre (voir [4] pour les définitions).

Ainsi, le quotient global P de M par l'axe secondaire $\mathcal{A}_2$ s'identifie, de façon naturelle, à la sous-variété de $T^*\mathbb{R}^7$ définie par les équations $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = \tilde{x}_3 = 0$, munie des coordonnées $(x, y, \tilde{y})$; en fait cette dernière sous-variété est isomorphe à $\mathbb{R}^{11}$. À son tour les feuilletages quotients $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$ et $\mathcal{F} = \operatorname{Im}\Lambda_1/\mathcal{A}_2$ sont donnés par les équations $\mathrm{d}x_1 = \mathrm{d}x_2 = \mathrm{d}x_3 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ respectivement (ces dernières lorsque α_1 et α_2 sont considérées comme 1-formes sur P de la manière évidente), tandis que S^* se projette, sur P, en le tenseur

$$G = \sum_{j=1}^{3} a_j(\partial/\partial x_j) \otimes \mathrm{d}x_j + \sum_{j=1}^{2}\big[(\partial/\partial y_{2j}) \otimes \mathrm{d}y_{2j-1} - (\partial/\partial y_{2j-1}) \otimes \mathrm{d}y_{2j} + (\partial/\partial \tilde{y}_{2j-1}) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_{2j}$$
$$- (\partial/\partial \tilde{y}_{2j}) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_{2j-1}\big] + (\partial/\partial y_1) \otimes \mathrm{d}y_3 + (\partial/\partial y_2) \otimes \mathrm{d}y_4 + (\partial/\partial \tilde{y}_3) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_1 + (\partial/\partial \tilde{y}_4) \otimes \mathrm{d}\tilde{y}_2$$
$$+ \big[(y_3 g_1 - y_4 g_2)(\partial/\partial y_1) + (y_3 g_2 + y_4 g_1)(\partial/\partial y_2) - (\tilde{y}_1 g_1 + \tilde{y}_2 g_2)(\partial/\partial \tilde{y}_3)$$
$$+ (\tilde{y}_1 g_2 - \tilde{y}_2 g_1)(\partial/\partial \tilde{y}_4)\big] \otimes \mathrm{d}x_1.$$

D'autre part, la projection sur le quotient de M par $\mathcal{A}_1$, qui est égal au quotient de P par $\mathcal{A}$, de la famille de feuilletages $\operatorname{Im}(\Lambda + t\Lambda_1)$, $t \in \mathbb{R}$, donne lieu à un tissu de Veronese w. Or le quotient $M/\mathcal{A}_1 = P/\mathcal{A}$ peut être identifié à la sous-variété Q de $T^*\mathbb{R}^7$ définie par les équations $\tilde{x} = 0$, $y = 0$, $\tilde{y} = 0$, munie des coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$; à son tour w est engendré, avec cette identification, par α_1, α_2, regardées dans Q, et le tenseur $J = \sum_{j=1}^{3} a_j(\partial/\partial x_j) \otimes \mathrm{d}x_j$.

Comme on l'a remarqué dans [4], les structures de Poisson Λ et Λ_1 donnent lieu à deux isomorphismes de fibrés vectoriels $\rho : T^*M/\mathcal{A}'_1 \to \operatorname{Im}\Lambda/\mathcal{A}_2$ et $\rho_1 : T^*M/\mathcal{A}'_1 \to \operatorname{Im}\Lambda_1/\mathcal{A}_2$, où $\mathcal{A}'_1$ est l'annulateur de $\mathcal{A}_1$, définis par $\rho([\alpha]) = [\Lambda(\alpha, \ )]$ et $\rho_1([\alpha]) = [\Lambda_1(\alpha, \ )]$ respectivement. Par suite $\tilde{\ell} = \rho \circ \rho_1^{-1}$ est un monomorphisme de $\operatorname{Im}\Lambda_1/\mathcal{A}_2$ à $TM/\mathcal{A}_2$ qui, à son tour, se projette en un morphisme $\ell : \mathcal{F} \to TP$. Il n'est pas difficile de montrer que, dans notre cas, G est un prolongement de ℓ ; en outre, la projection de G sur Q est J.

Supposons que, au voisinage d'un certain point $q \in M$, la structure bihamiltonienne (Λ, Λ_1) se décompose en un produit Kronecker-symplectique (forcément de dimension quatre pour le premier facteur, et huit pour le second). Alors, en considérant le quotient local par l'axe secondaire en chaque facteur, on déduit qu'autour du point $p \in P$, projection du point $q \in M$, il existe un tenseur $\widetilde{G}$, qui prolonge ℓ et se projette sur J, à torsion de Nijenhuis nulle. En d'autres termes, puisque $\widetilde{G}_{|\mathcal{F}} = G_{|\mathcal{F}} = \ell$, il existe deux champs de vecteurs Z_1, Z_2, définis au voisinage de p et tangents à $\mathcal{A}$, tels que $N_{\widetilde{G}} = 0$ où $\widetilde{G} = G + Z_1 \otimes \alpha_1 + Z_2 \otimes \alpha_2$.

Finalement, si on fait $y_5 = \tilde{y}_3$, $y_6 = -\tilde{y}_4$, $y_7 = \tilde{y}_1$, $y_8 = -\tilde{y}_2$, et qu'on écrit G dans les coordonnées $(x_1, x_2, x_3, y_1, \ldots, y_8)$, on se retrouve dans la situation du théorème 1 lorsque $m = 2$, $h_1 + \imath h_2 = (y_3 + \imath y_4)(g_1 + \imath g_2)$ et $h_3 + \imath h_4 = -(y_7 + \imath y_8)(g_1 + \imath g_2)$. Ceci permet de choisir g_1 et g_2 de manière à ce que la torsion de Nijenhuis de $\widetilde{G}$ ne s'annule jamais.

En d'autres termes, si on choisit g_1, g_2 convenables, la structure bihamiltonienne (Λ, Λ_1), qui définit une G-structure, et pour laquelle la condition du théorème 1 de [4] sur le polynôme caractéristique de la partie symplectique est automatiquement satisfaite, ne se décompose pas localement en produit d'une structure bihamiltonienne de Kronecker et d'une symplectique.

Mémoire à l'appui.

Références

[1] V.W. Guillemin, S. Sternberg, The Lewy counterexample and the local equivalence problem for G-structures, J. of Diff. Geometry 1 (1967) 127–131.
[2] H. Lewy, An example of a smooth linear partial differential equation without solution, Ann. of Math. 66 (1957) 155–158.
[3] P. Libermann, Problèmes d'équivalence et géométrie symplectique, Astérisque 107–108 (1983) 43–68.
[4] F.J. Turiel, Décomposition locale d'une structure bihamiltonienne en produit Kronecker-symplectique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 85–87.