C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 361–364

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Théorie des nombres/Analyse complexe

Une généralisation de la formule du triple produit de Jacobi et quelques applications

A generalization of the Jacobi's triple product formula and some applications

Vincent Brugidou [a,b,*]

[a] *Laboratoire Paul-Painlevé, université de Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France*
[b] *IUT A de Lille 1, boulevard Paul-Langevin, BP 179, 59653 Villeneuve d'Ascq cedex, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 4 décembre 2010
Accepté après révision le 8 mars 2011
Disponible sur Internet le 1er avril 2011

Présenté par Jean-Pierre Kahane

RÉSUMÉ

Si $A_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on montre que la série à 2 variables $Q(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n x^n y^{n(n+1)/2}$ se factorise formellement en un triple produit infini qui généralise la formule de Jacobi. Soit ρ_o la racine positive de $\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^2} = 1/2$, on prouve la convergence de la factorisation de Q pour $x \in \mathbb{C}^*$ et $|y| < \rho_o^2 \Omega^{-1}$ avec $\Omega = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |A_{n-1}A_{n+1}/A_n^2|$. On en déduit que si $\Omega < \rho_o^2 = 0{,}2078\ldots$ on peut calculer explicitement chaque zéro de la série de Laurent $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n x^n$ comme la somme ou l'inverse de la somme de séries dont les termes sont des expressions polynomiales des $A_{n-1}A_{n+1}/A_n^2$. Si l'inégalité précédente est large et $f(x)$ réelle, tous ses zéros sont réels. Une autre application consiste, lorsqu'on connait la factorisation en triple produit de $Q(x,y)$ par une autre voie que celle décrite dans la note, à les identifier. Ainsi avec la fonction theta de Jacobi, on a obtenu une identité nouvelle pour la somme des diviseurs $\sigma(n)$ d'un entier.

ABSTRACT

If $A_n \neq 0$ for all $n \in \mathbb{Z}$, we show the series with 2 variables $Q(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n x^n y^{n(n+1)/2}$ factorizes formally in an infinite triple product, which generalizes the Jacobi's formula. Let ρ_o be the positive root of $\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^2} = 1/2$, we prove the convergence of the factorization of Q for $x \in \mathbb{C}^*$ and $|y| < \rho_o^2 \Omega^{-1}$ with $\Omega = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |A_{n-1}A_{n+1}/A_n^2|$. We deduce that if $\Omega < \rho_o^2 = 0.2078\ldots$ each zero of the Laurent series $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n x^n$ can be explicitly calculated as the sum or the inverse of the sum of series, whose terms are polynomial expressions of $A_{n-1}A_{n+1}/A_n^2$. If the previous inequality is wide and $f(x)$ real, then all its zeros are real numbers. An other application is when you know the triple product factorization of $Q(x,y)$ by another way than described in the note, to identify them. So with the Jacobi theta function, we obtained a new identity for the sum of divisors $\sigma(n)$ of an integer.

* Addresse pour la correpondance : IUT A de Lille 1, boulevard Paul-Langevin, BP 179, 59653 Villeneuve d'Ascq cedex, France.
Adresse e-mail : vincent.brugidou@univ-lille1.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.03.003

1. Introduction

Dans [1] on a introduit une nouvelle méthode pour déterminer les zéros d'une fonction entière $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n x^n$ en lui associant la série formelle à deux indeterminées $Q(X,Y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} A_n X^n Y^{n(n+1)/2}$. Lorsque $A_n \neq 0$ on est arrivé ainsi à exprimer les zéros de $f(x)$ comme l'inverse de la somme de séries dont les termes sont des expressions polynomiales des $\Omega_n = A_{n-1}A_{n+1}/A_n^2$. La condition $\sup_{n\geqslant 0} |\Omega_n| < \rho_o^2$ ou ρ_o est la racine positive de $\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^2} = 1/2$ suffit alors pour prouver la convergence dans $\mathbb{C}$ de ces séries et du produit infini en lequel se factorise $f(x)$. L'objet de cette note est de généraliser la méthode au cas où $f(x)$ est une série de Laurent convergente sur $\mathbb{C}^*$, $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n x^n$. Les résultats obtenus dont les théorèmes 1, 2 et 4 et les corollaires 5 et 6, prolongent ceux de [1]. On peut voir aussi les théorèmes 1 et 4 comme une généralisation de la formule du triple produit de Jacobi. Et inversement l'application à la fonction thêta de Jacobi des relations explicites que nous avons obtenues fournit, compte tenu de l'unicité de la factorisation, l'identité de la proposition 7.

2. Notations et terminologie

On reprend les mêmes notations que dans [1]. En particulier si $H(X,Y) = \sum_{(n,l)\in\mathbb{Z}^2} a_{n,l} X^n Y^l \in \mathbb{K}[[X, X^{-1}, Y, Y^{-1}]]$, X, Y indeterminées, $\mathbb{K}$ corps commutatif :

$$C_{X^n Y^l}[H] = a_{n,l}$$

On appelera série formelle de Laurent un élément de $\mathbb{K}[[X, X^{-1}]]$. Remarquons que cette terminologie bien que cohérente avec celle de séries de Laurent de l'analyse complexe diffère de celle parfois utilisée dans la littérature (voir par exemple [3]) où une série formelle de Laurent est un élément de $\mathbb{K}((X))$.

3. Étude formelle

3.1. Formule généralisée du triple produit

Théorème 1. *Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif, $f(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n X^n$ telle que $\mathbb{A}_n \in \mathbb{K}^*$ et*

$$Q(X,Y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n X^n Y^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{1}$$

alors on a formellement :

$$Q(X,Y) = A_0 \prod_{p=0}^{\infty} \bigl[1 + \alpha_{-p}(Y)X^{-1}\bigr]\bigl[1 - c_{p+1}Y^{p+1}\bigr]\bigl[1 + \alpha_{p+1}(Y)X\bigr] \tag{2}$$

où pour $p \in \mathbb{Z}$

$$\alpha_p(Y) = \sum_{q\geqslant |p|} u_p(q) Y^q \in \mathbb{K}[[Y]] \tag{3}$$

et $c_p \in \mathbb{K}$ pour $p \geqslant 1$. Cette décomposition est unique et l'on a :

$$u_q(q) = \frac{A_q}{A_{q-1}} \quad \text{pour } q \geqslant 1 \quad \text{et} \quad u_q\bigl(|q|\bigr) = \frac{A_{q-1}}{A_q} \quad \text{pour } q \leqslant 0 \tag{4}$$

Preuve résumée. On commence comme dans [1] par une identication des coefficients des puissances dans (2), ce qui donne une suite double infinie de systèmes linéaires en les $u_p(q)$, qui se résolvent successivement par une double récurence. On aboutit ainsi à :

$$Q(X,Y) = A_0 \delta(Y) \prod_{p\geqslant 0} \bigl[1 + \alpha_{-p}(Y)X^{-1}\bigr]\bigl[1 + \alpha_{p+1}(Y)X\bigr] \tag{5}$$

avec $\delta(Y) = 1 + \delta_1 Y + \delta_2 Y^2 + \cdots + \delta_l Y^l + \cdots \in \mathbb{K}[[Y]]$. Ensuite on montre par récurence qu'on a de manière unique :

$$\delta(Y) = \prod_{p\geqslant 1} \bigl(1 - c_p Y^p\bigr) \qquad \square \tag{6}$$

La formule du triple produit de Jacobi peut s'écrire (voir par exemple [2]) :

$$Q^{\theta}(X,Y) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X^n Y^{\frac{n(n+1)}{2}} = \prod_{p=0}^{\infty} \bigl[1 + Y^p X^{-1}\bigr]\bigl[1 - Y^{p+1}\bigr]\bigl[1 + Y^{p+1} X\bigr]$$

On voit que c'est un cas particulier de (2) – qui est donc une généralisation de la formule de Jacobi – obtenu en prenant $f^\theta(X) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} X^n$. Et l'on a donc d'après l'unicité de la factorisation :

$$\alpha_p^\theta(Y) = Y^{|p|} \quad \text{pour } p \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad c_p^\theta = 1 \quad \text{pour } p \geqslant 1 \tag{7}$$

3.2. Expression explicite des $\alpha_p(Y)$ et $\delta(Y)$

Généralisant la définition donnée dans [1], on pose :

$$\begin{aligned}
Q_1(X,Y) &= \frac{Q(X,Y)}{A_0}\\
Q_p(X,Y) &= \frac{A_{p-2}}{A_{p-1}X} Q_{p-1}(X/Y, Y) \quad \text{pour } p \geqslant 2\\
Q_0(X,Y) &= \frac{A_0 X}{A_{-1}} Q_1(X,Y)\\
Q_p(X,Y) &= \frac{A_p X}{A_{p-1}} Q_{p+1}(XY, Y) \quad \text{pour } p \leqslant -1
\end{aligned}$$

On obtient alors en utilisant systématiquement la composition étendue de séries formelles vues en [1], les expressions qui généralisent le cas d'une fonction entière :

Théorème 2. *Avec les hypothèses du théorème 1 et en supposant $\mathbb{K}$ de caractéristique nulle, on a :*

$$\begin{aligned}
&\textit{pour } p \geqslant 1 \quad \alpha_p(Y) = \beta_p(Y) - \beta_{p+1}(Y)\\
&\textit{pour } p \leqslant 0 \quad \alpha_p(Y) = \beta_p(Y) - \beta_{p-1}(Y)
\end{aligned}$$

avec pour $p \in \mathbb{Z}$, $\beta_p(Y) = \sum_{q\geqslant|p|} v_p(q) Y^q$, les $v_p(q) \in \mathbb{K}$ étant déterminés explicitement par :

$$\begin{aligned}
&\textit{pour } p \geqslant 1 && v_p(q) = C_{X^1, Y^{q-p+1}}\big[\mathrm{Log}\big(Q_p(X,Y)\big)\big]\\
& && v_0(q) = C_{X^{-1}, Y^q}\big[\mathrm{Log}\big(Q_1(X,Y)\big)\big]\\
&\textit{pour } p \leqslant -1 && v_p(q) = C_{X^{-1}, Y^{q+p+1}}\big[\mathrm{Log}\big(Q_{p+1}(X,Y)\big)\big]
\end{aligned}$$

Théorème 3. *Avec les hypothèses du théorème 2, la série $\delta(Y)$ de la formule (5) est donnée par $\delta(Y) = \exp[d(Y)]$ avec $d(Y) = \sum_{l\geqslant 1} d_l Y^l \in \mathbb{K}[\![Y]\!]$, les d_l étant donnés explicitement par*

$$d_l = C_{X^0 Y^l}\big[\mathrm{Log}\big(Q_1(X,Y)\big)\big]$$

4. Convergence dans $\mathbb{C}$

On suppose dans ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 4. *Soit une série de Laurent $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n x^n$ à coefficients tous non nuls dans $\mathbb{C}$. Soient $\Omega = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |A_{n-1}A_{n+1}/A_n^2|$ et ρ_0 la racine positive de $\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k^2} = 1/2$. Pour tout complexe y tel que $|y| < \rho_0^2 \Omega^{-1}$ on a :*

$$f_y(x) = Q(x,y) = A_0 \exp\big(d(y)\big) \prod_{p\leqslant 0}\big(1 + \alpha_p(y)x^{-1}\big) \prod_{p\geqslant 1}\big(1 + \alpha_p(y)x\big)$$

les produits infinis convergeant normalement sur tout compact de $\mathbb{C}^*$.

Preuve résumée. On montre à partir des expressions des théorèmes 2 et 3 que les $v_p(q)$ et les d_l sont des expressions polynomiales des Ω_n, on utilise alors une méthode de majorante avec $Q^\theta(x,y)$ pour prouver que pour $|y| < \rho_0^2\Omega^{-1}$ on a :

$$\sum_{p\in\mathbb{Z}, q\geqslant|p|} \big|u_p(q)y^q\big| + \sum_{l\geqslant 1} \big|d_l y^l\big| < +\infty \qquad \square$$

On remarque que la méthode de majorante est plus facile à appliquer ici que dans le cas des fonctions entières traité en [1], à cause des propriétés modulaires de Q^θ. Ceci tend à prouver que les séries de Laurent forment le cadre naturel dans lequel s'applique notre méthode. Deux applications de ce théorème découlent alors de la relation $f(x) = Q(x,1)$ et sont données par les corollaires suivant :

Corollaire 5. *Soit $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n X^n$ une série formelle de Laurent à coefficients tous non nuls dans $\mathbb{C}$, telle que $\Omega<\rho_0^2=0{,}2078\ldots$ où ρ_0 est la racine positive de $\sum_{k=1}^{\infty}\rho^{k^2}=1/2$, alors la série converge sur $\mathbb{C}^*$ et sa somme est égal à :*

$$f(x)=A_0\exp\left(\sum_{l\geqslant 1} d_l\right)\prod_{p\leqslant 0}\left(1+\alpha_p(1)x^{-1}\right)\prod_{p\geqslant 1}\left(1+\alpha_p(1)x\right)$$

avec $\alpha_p(1)=\sum_{q\geqslant |p|} u_p(q)$ et $\sum_{l\geqslant 1} d_l$ absolument convergentes. Les zéros de $f(x)$ sont exactement les $x_p=-(\alpha_p(1))^{-1}$ pour $p\geqslant 1$ et $x_p=-\alpha_p(1)$ pour $p\leqslant 0$, pour toutes les valeurs de $p\in\mathbb{Z}$ tels que $\alpha_p(1)\neq 0$.

Corollaire 6. *Soit $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n X^n$ à coefficients tous non nuls dans $\mathbb{R}$, telle que $\Omega\leqslant\rho_0^2$, alors $f(x)$ converge sur $\mathbb{C}^*$ et a tous ses zéros réels.*

Remarque. Tout ce qui a été dit ci-dessus se transpose au cas d'une série $\sum_{n=n_1}^{n_2} A_n X^n$, $-\infty\leqslant n_1\leqslant n\leqslant n_2\leqslant\infty$, dont tous les coefficients A_n sont non nuls. En particulier si $n_1\geqslant 0$ on retrouve le cas traité dans [1]. La conjecture 20 de [1] est donc a fortiori vraie pour les séries de Laurent.

5. Un exemple d'identité obtenue avec les calculs formels de la section 3

Il existe une autre application, utilisant les calculs purement formels de la section 3, dont la fonction theta de Jacobi va nous permettre de donner un exemple. Supposons que pour une série $Q(X,Y)$ donnée par (1) on connaisse par un autre procédé que celui décrit dans la section 3, la factorisation en triple produit. Alors compte tenu de l'unicité de cette factorisation (voir théorème 1) on saura directement ce que valent les $\alpha_p(Y)$ et c_p dans (2). C'est ainsi que pour la fonction theta de Jacobi on a obtenu les égalités (7). Si alors on explicite avec les théorèmes 2 et 3 les $v_p(q)$ et les d_l en fonction des coefficients A_n on obtiendra des identités susceptibles d'être intéressantes. Ainsi avec l'exemple de la fonction theta de Jacobi on a trouvé l'identité suivante :

Proposition 7. *Soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de l'entier n, on a*

$$\frac{\sigma(n)}{n}=\sum_{\nabla_n}(-1)^{(\sum_{i\neq 0} r_i)}\left[\frac{(\sum_{i\neq 0} r_i-1)!}{\prod_{i\neq 0} r_i!}\right]$$

ou ∇_n est l'ensemble des suites d'entiers naturels $(r_i)_{i\in\mathbb{Z}^*}$ presque tous nuls tels que

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i\neq 0} i r_i=0\\ \displaystyle\sum_{i\neq 0}\frac{i(i+1)}{2} r_i=n\end{cases}$$

Références

[1] V. Brugidou, A new method to determine the value or the reality of zeros for certain entire functions, J. Math. Pures Appl. 94 (2010) 244–276.
[2] G.H. Hardy, E.M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 5th edition, Oxford University Press, 1979.
[3] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, vol. 1, John Wiley & Sons, 1974.