C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 379–384

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse mathématique/Équations aux dérivées partielles

Stabilisation frontière indirecte du système de Timoshenko

Indirect boundary stabilization of the Timoshenko system

Maya Bassam [a,b], Denis Mercier [a], Serge Nicaise [a], Ali Wehbe [b]

[a] *Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, LAMAV, FR CNRS 2956, institut des sciences et techniques, 59313 Valenciennes cedex 9, France*
[b] *Université Libanaise, faculté des sciences 1 & Hadath, Beyrouth, Liban*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 22 septembre 2010
Accepté après révision le 11 mars 2011
Disponible sur Internet le 2 avril 2011

Présenté par Jean-Michel Bony

RÉSUMÉ

Nous étudions la stabilité frontière indirecte du système de Timoshenko sous l'action d'une seule loi de dissipation. Sous la condition d'égalité des vitesses de propagation, nous établissons la stabilité exponentielle du système. Dans le cas contraire, nous montrons que le taux de décroissance est polynomial.

ABSTRACT

In this Note, we study the indirect boundary stabilization of the Timoshenko system with only one dissipation law. Under the equal speed wave propagation condition, we establish the exponential stability of the system. On the contrary, we show that the decay rate is polynomial.

Abridged English version

Introduction

In this Note, we study the indirect boundary stabilization of the following Timoshenko system:

$$\begin{cases} u_{tt}-(u_x+y)_x=0 & \text{in } (0,1)\times(0,\infty), \\ y_{tt}-ay_{xx}+b(u_x+y)=0 & \text{in } (0,1)\times(0,\infty), \\ u(x,0)=u_0(x), \quad u_t(x,0)=u_1(x), \quad y(x,0)=y_0(x), \quad y_t(x,0)=y_1(x) & \text{in } (0,1), \\ u(0,t)=u(1,t)=y(1,t)=0 & \text{in } (0,\infty), \end{cases} \tag{1}$$

with the boundary dissipation law

$$ay_x(0,t)=by_t(0,t) \quad \text{in } (0,\infty), \tag{2}$$

where a and b are strictly positive constants. The functions u and y denote, respectively, the transverse displacement of the beam and the rotation angle of the filament.

The notion of indirect damping mechanisms has been introduced by Russell in [11], and since this time, it retains the attention of many authors, for instance, let us quote the papers of Alabau [1,2] for recent general studies on hyperbolic

Adresses e-mail : bassammaya@hotmail.fr (M. Bassam), Denis.Mercier@univ-valenciennes.fr (D. Mercier), Serge.Nicaise@univ-valenciennes.fr (S. Nicaise), ali.wehbe@ul.edu.lb (A. Wehbe).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.03.011

systems with indirect boundary stabilizations. Note nevertheless that the above system does not enter in the framework of these papers. Let us now mention some known results related to the boundary stabilization of the Timoshenko beam. Kim and Renardy in [8] proved the exponential stability of the system under two boundary controls. In [3], Ammar-Khodja and his co-authors studied the decay rate of the energy of the nonuniform Timoshenko beam with two boundary controls acting in the rotation-angle equation. Under the equal speed wave propagation condition, they established exponential decay results up to an unknown finite dimensional space of initial data. In addition, they showed that the equal speed wave propagation condition is necessary for the exponential stability. However, in the case of non-equal speed, no decay rate has been discussed.

In this Note, we study the decay rate of the energy of the Timoshenko beam with one boundary control acting in the rotation-angle equation. Under the equal speed wave propagation ($a = 1$), we establish an exponential decay rate up to an explicit finite dimensional space of initial data. Moreover, under the non-equal speed condition, we establish a polynomial type decay rate.

Let (u, y) be a regular solution of the system (1), (2), its associated total energy is defined by

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(|u_t|^2 + b^{-1}|y_t|^2 + ab^{-1}|y_x|^2 + |u_x + y|^2\right) \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Then a straightforward computation gives

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = -\left|y_t(0,t)\right|^2 \leqslant 0. \tag{4}$$

Consequently the system (1), (2) is dissipative in the sense that the energy is non-increasing. Note that the system (1), (2) is well-posed by introducing an appropriated Hilbert setting (see below).

Exponential energy decay rate in the case $a = 1$

In this section we state stability results of system (1) under the dissipation law (2) in the case $a = 1$.

Theorem 0.1 *(Strong stability). Assume that $a = 1$. Then the system* (1), (2) *is strongly stable if and only if the coefficient b satisfies the following conditions* (C1) *and* (C2):

$$b \neq 2k^2\pi^2 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^\star, \tag{C1}$$

$$b \neq \frac{(m^2 - n^2)^2}{2(m^2 + n^2)}\pi^2 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^\star,\ n < m \in \mathbb{N}^\star \text{ having the same parity}. \tag{C2}$$

Theorem 0.2 *(Exponential decay rate). Assume that $a = 1$ and b verifies the conditions* (C1) *and* (C2)*. Then there exist positive constants $M > 0$, $\omega > 0$ such that for all initial data $(u_0, y_0, u_1, y_1) \in \mathcal{H}$ the energy of the system* (1)–(2) *satisfies the following decay rate*:

$$E(t) \leqslant Me^{-\omega t}E(0), \quad \forall t > 0. \tag{5}$$

Remark 0.3. If the coefficient b does not satisfy one of the two conditions (C1) or (C2), the operator $\mathcal{A}$ has a finite number of purely imaginary eigenvalues with explicit eigenvectors. In that case we show the strong and uniform stability in the space orthogonal to these eigenvectors that is invariant under the action of $\mathcal{A}$.

Polynomial energy decay rate in the case $a \neq 1$

Under the non-equal speed propagation ($a \neq 1$), we still obtain the strong stability for system (1)–(2):

Theorem 0.4 *(Strong stability). Assume that $a \neq 1$. The system* (1)–(2) *is strongly stable if and only if the coefficient b satisfies the following conditions* (C3), (C4) *and* (C5):

$$b \neq \frac{a}{a+1}4k^2\pi^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}^\star, \tag{C3}$$

$$b \neq \frac{a(1-a)}{3a+1}4k^2\pi^2 \quad \forall k \in \mathbb{N}^\star, \tag{C4}$$

$$b \neq \frac{(am^2 - n^2)(m^2 - an^2)}{(a+1)(m^2 + n^2)}\pi^2 \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^\star,\ n < m \in \mathbb{N}^\star \text{ having the same parity}. \tag{C5}$$

Note that (C4) always holds if $a > 1$.

According to [3,12] we know that the energy $E(t)$ of the system (1)–(2) loses the exponential decay rate obtained when $a = 1$. Nevertheless we prove the following polynomial type decay rate:

Theorem 0.5 *(Polynomial decay rate). Assume that $a \neq 1$ and b satisfies the conditions* (C3), (C4) *and* (C5)*. Then there exists a positive constant $C > 0$ such that for all initial data $U_0 \in D(\mathcal{A})$ the energy of the system* (1)–(2) *satisfies the following decay rate:*

$$E(t) \leqslant C\frac{1}{\sqrt{t}}\left\|E(0)\right\|^2_{D(\mathcal{A})}, \quad \forall t > 0. \tag{6}$$

1. Introduction

Dans cette Note nous étudions la stabilité frontière indirecte du système du Timoshenko suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - (u_x + y)_x = 0 & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty), \\ y_{tt} - ay_{xx} + b(u_x + y) = 0 & \text{dans } (0,1) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad y(x,0) = y_0(x), \quad y_t(x,0) = y_1(x) & \text{dans } (0,1), \\ u(0,t) = u(1,t) = y(1,t) = 0 & \text{dans } (0,\infty), \end{cases} \tag{7}$$

avec la loi de dissipation

$$ay_x(0,t) = by_t(0,t) \quad \text{dans } (0,\infty), \tag{8}$$

où a, b sont des constantes positives. Les fonctions u et y désignent, respectivement, le déplacement transversal de la poutre et la rotation angulaire de coupe transversale.

La notion de mécanisme de dissipation indirecte a été introduite par Russell [11], et depuis lors, elle a retenu l'attention de plusieurs auteurs, par exemple, citons les articles de Alabau [1,2] pour des études générales sur des systèmes hyperboliques avec stabilisations au bord indirectes. Signalons que notre système n'entre pas dans le cadre de ces papiers. Rappelons maintenant quelques résultats concernant la stabilisation frontière du système de Timoshenko. Dans [8], Kim et Renardy ont établi la stabilisation exponentielle du système moyennant deux contrôles frontières. Dans [3], Ammar-Khodja et al. ont étudié la stabilisation frontière du système de Timoshenko non uniforme en appliquant deux contrôles frontières sur l'équation de rotation angulaire. Sous la condition d'égalité de vitesse de propagation ($a = 1$), ils ont établi un taux de décroissance exponentiel de l'énergie dans un sous-espace orthogonal à un sous espace de dimension finie mais non précisé. En revanche, quand les vitesses sont différentes ils ont prouvé la stabilisation forte et non exponentielle mais aucun taux de décroissance de l'énergie n'est discuté.

Dans cette Note, nous étudions la stabilisation du système (7)–(8) avec un seul contrôle frontière agissant sur l'équation de rotation angulaire. Sous la condition d'égalité des vitesses de propagation, nous établissons un taux de décroissance exponentiel de l'énergie du système dans un sous espace orthogonal à un sous espace de dimension finie explicitement connu. En revanche, quand les vitesses de propagation sont différentes, nous établissons un taux de décroissance polynomial.

Soit (u, y) une solution régulière du système (7)–(8), son énergie associée est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(|u_t|^2 + b^{-1}|y_t|^2 + ab^{-1}|y_x|^2 + |u_x + y|^2\right)\mathrm{d}x. \tag{9}$$

Par un calcul direct on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) = -\left|y_t(0,t)\right|^2 \leqslant 0. \tag{10}$$

Posons $\Omega = (0,1)$ et $H^1_R(\Omega) = \{y \in H^1(\Omega)\colon\ y(1) = 0\}$. Définissons l'espace d'énergie $\mathcal{H}$ par $\mathcal{H} = H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1_R(\Omega) \times L^2(\Omega)$ muni de la norme

$$\|U\|^2_{\mathcal{H}} = \|v\|^2 + b^{-1}\|z\|^2 + ab^{-1}\|y_x\|^2 + \|u_x + y\|^2, \quad \forall U = (u, v, y, z) \in \mathcal{H}, \tag{11}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme dans $L^2(\Omega)$. Il est clair que la norme (11) est équivalente à la norme usuelle dans $\mathcal{H}$. Définissons aussi l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ par :

$$D(\mathcal{A}) = \left\{U \in \mathcal{H}\colon\ u, y \in H^2(\Omega),\ v \in H^1_0(\Omega),\ z \in H^1_R(\Omega),\ ay_x(0) - bz(0) = 0\right\},$$

$$\mathcal{A}(u, v, y, z) = \left(v, (u_x + y)_x, z, ay_{xx} - b(u_x + y)\right), \quad \forall U = (u, v, y, z) \in D(\mathcal{A}).$$

Notons que $\mathcal{A}$ est m-dissipatif et engendre un C^0-semigroupe de contractions $e^{t\mathcal{A}}$ sur l'espace d'énergie $\mathcal{H}$. Comme le système (7)–(8) est équivalent à

$$U_t = \mathcal{A}U \quad \text{dans } \mathcal{H}, \quad t > 0, \qquad U(0) = U_0,$$

avec $U = (u, u_t, y, y_t)$, nous en déduisons son caractère bien posé.

Comme souligné précédemment, nous allons étudier le taux de décroissance de l'énergie dans deux cas différents.

2. Taux de décroissance exponentielle de l'énergie dans le cas $a = 1$

Dans cette section nous étudierons la stabilité du système (7) sous l'effet de la loi de dissipation (8) dans le cas $a = 1$.

Théorème 2.1 *(Stabilité). Supposons que* $a = 1$. *Alors le système* (7) *est stable si et seulement si les deux conditions* (C1) *et* (C2) *sont satisfaites.*

Idée de la démonstration

Nous montrons, d'abord, que l'opérateur $\mathcal{A}$ admet des valeurs propres imaginaires pures si et seulement si le coefficient b ne vérifie pas l'une des deux conditions (C1) ou (C2). Grâce à la théorie de décomposition spectrale de Benchimol (voir [5]) nous en déduisons que le système (7) est fortement stable sous l'effet de la dissipation frontière (8) lorsque (C1) et (C2) sont vérifiées.

Remarque 2.2. Si le coefficient b ne vérifie pas l'une des deux conditions (C1) ou (C2), l'opérateur $\mathcal{A}$ a un nombre fini de valeurs propres imaginaires pures de vecteurs propres explicites. Dès lors, nous montrons la stabilité forte et uniforme dans l'espace orthogonal à ces vecteurs propres qui est invariant sous l'action de $\mathcal{A}$.

Théorème 2.3 *(Taux de décroissance exponentiel). Supposons que* $a = 1$ *et que* b *vérifie* (C1) *et* (C2)*. Alors il existe des constantes* $M > 0$ *et* $\omega > 0$ *telles que pour toute donnée initiale* $(u_0, u_1, y_0, y_1) \in \mathcal{H}$ *l'énergie du système* (7) *satisfait l'estimation suivante* :

$$E(t) \leqslant M e^{-\omega t} E(0), \quad \forall t > 0. \tag{12}$$

Démonstration

D'après un résultat de Huang [7] et Prüss [10], un C^0-semigroupe de contractions $e^{t\mathcal{A}}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est exponentiellement stable si et seulement si les conditions (H1) et (H2) sont vérifiées :

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}), \tag{H1}$$

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| (i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \right\| < +\infty. \tag{H2}$$

Comme la résolvante de $\mathcal{A}$ est compacte, le fait que $\mathcal{A}$ n'ait pas de valeur propre sur l'axe imaginaire (Théorème 2.1) entraine bien la condition (H1).

Supposons que la condition (H2) soit fausse. Alors il existe une suite $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et une suite $(u^n, v^n, y^n, z^n) \in D(\mathcal{A})$, telles que

$$\lambda_n \longrightarrow +\infty, \quad \left\| \left(u^n, v^n, y^n, z^n\right) \right\|_{\mathcal{H}} = 1, \tag{13}$$

$$(i\lambda_n I - \mathcal{A})\left(u^n, v^n, y^n, z^n\right) = \left(f_1^n, g_1^n, f_2^n, g_2^n\right) \longrightarrow 0 \quad \text{dans } \mathcal{H}. \tag{14}$$

Etape 1. Multipliant (14) par $U^n = (u^n, v^n, y^n, z^n)$, nous obtenons :

$$\Re\left((i\lambda_n - \mathcal{A})U^n, U^n\right)_{\mathcal{H}} = -\left|z^n(0)\right|^2 = o(1). \tag{15}$$

Ceci implique que $y_x^n(0) = o(1)$. Ensuite, nous écrivons (14) sous la forme :

$$i\lambda_n u^n - v^n = f_1^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(\Omega), \tag{16}$$

$$i\lambda_n v^n - \left(u_{xx}^n + y_x^n\right) = g_1^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega), \tag{17}$$

$$i\lambda_n y^n - z^n = f_2^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H_R^1(\Omega), \tag{18}$$

$$i\lambda_n z^n - y_{xx}^n + b\left(u_x^n + y^n\right) = g_2^n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{19}$$

D'après (15) et (18) on déduit que

$$\lambda_n y^n(0) = o(1). \tag{20}$$

D'autre part, le fait que $\lambda_n y^n$ et $\lambda_n u^n$ soient bornées dans $L^2(\Omega)$ entraine bien que $\|y^n\| = o(1)$ et $\|u^n\| = o(1)$.

Etape 2. Soit $h \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Éliminant v^n dans (17) par (16), multipliant l'équation obtenue par $h\bar{u}_x^n$, et sommant l'identité obtenue avec sa conjuguée, nous obtenons

$$\int_0^1 h' \left|\lambda_n u^n\right|^2 + \int_0^1 h' \left|u_x^n\right|^2 - 2\Re \int_0^1 h y_x^n \bar{u}_x^n - h(1)\left|u_x^n(1)\right|^2 + h(0)\left|u_x^n(0)\right|^2 = o(1). \tag{21}$$

Notons que le second membre de (21) contient le terme $\lambda_n \int_0^1 h f_1^n \bar{u}_x^n$ qui par intégration par parties est égal à

$$-\lambda_n \int_0^1 \left(h_x f_1^n + h f_{1x}^n\right)\bar{u}^n,$$

qui est bien un $o(1)$ grâce à (16) et au fait que $\|v^n\|$ reste uniformément borné.

De même, éliminant z^n dans (19) par (18) et multipliant l'équation obtenue par $h\bar{y}_x^n$, nous obtenons

$$\int_0^1 h'\left|\lambda_n y^n\right|^2 + \int_0^1 h'\left|y_x^n\right|^2 + 2\Re \int_0^1 b h \bar{u}_x^n y_x^n - h(1)\left|y_x^n(1)\right|^2 = o(1). \tag{22}$$

Ici encore le second membre de (22) contient le terme $\lambda_n \int_0^1 h f_2^n \bar{y}_x^n$ qui par intégration par parties est égal à

$$-\lambda_n \int_0^1 \left(h_x f_2^n + h f_{2x}^n\right)\bar{y}^n - \lambda_n h(0) f_2^n(0)\bar{y}^n(0).$$

Le terme intégral est bien un $o(1)$ grâce à (18) et au fait que $\|z^n\|$ reste uniformément borné ; tandis que $\lambda_n f_2^n(0)\bar{y}^n(0)$ est aussi $o(1)$ grâce à (18) et à (20).

Par un choix approprié du multiplicateur h, les identités (21) et (22) permettent de montrer que les suites $(u_x^n(0))$, $(u_x^n(1))$ et $(y_x^n(1))$ sont bornées et que

$$b\left|u_x^n(0)\right|^2 - b\left|u_x^n(1)\right|^2 - \left|y_x^n(1)\right|^2 = o(1). \tag{23}$$

Etape 3. Par la théorie des équations différentielles ordinaires et les propriétés précédentes, nous montrons que

$$\left(0,\quad u_x^n(1),\quad 0,\quad y_x^n(1)\right)^\top = e^B\,(0,\quad 1,\quad 0,\quad 0)^\top u_x^n(0) + o(1), \tag{24}$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & i\lambda_n & 0 & 0 \\ i\lambda_n & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & i\lambda_n \\ 0 & b & i\lambda_n - \frac{ib}{\lambda_n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Par un calcul explicite de l'exponentielle e^B, l'identité (24) implique que

$$\cos(\sqrt{b}/2)\cos(\lambda_n)u_x^n(0) = o(1), \tag{25}$$

$$\sin(\sqrt{b}/2)\cos(\lambda_n)u_x^n(0) = u_x^n(1) + o(1), \tag{26}$$

$$\sin(\sqrt{b}/2)\sin(\lambda_n)u_x^n(0) = o(1), \tag{27}$$

$$\sqrt{b}\sin(\sqrt{b}/2)\cos(\lambda_n)u_x^n(0) = y_x^n(1) + o(1). \tag{28}$$

Etape 4. Combinant (23) et (25)–(28), nous déduisons que $u_x^n(0) = o(1)$, $u_x^n(1) = o(1)$ et $y_x^n(1) = o(1)$. En revenant aux identités (21) et (22) avec $h(x) = x$, on en déduit que $\|(u^n, v^n, y^n, z^n)\|_{\mathcal{H}} \to 0$, d'où la contradiction.

3. Taux de décroissance polynomial de l'énergie dans le cas $a \neq 1$

Dans cette section nous étudierons la stabilité du système (7) sous l'effet de la loi de dissipation (8) dans le cas $a \neq 1$.

Théorème 3.1 *(Stabilité). Supposons que $a \neq 1$. Alors le système* (7) *est fortement stable si et seulement si le coefficient b vérifie les trois conditions* (C3), (C4) *et* (C5)*.*

La preuve est identique à celle du Théorème 2.1.

Notons que si $a > 1$, la condition (C4) est toujours vraie.

Théorème 3.2 *(Taux polynomial). Supposons que $a \neq 1$ et que b vérifie les trois conditions* (C3), (C4) *et* (C5)*. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute donnée initiale $U_0 = (u_0, u_1, y_0, y_1) \in D(\mathcal{A})$ l'énergie du système* (7)–(8) *satisfait l'estimation suivante :*

$$E(t) \leqslant C\frac{1}{\sqrt{t}}\|U_0\|^2_{D(\mathcal{A})}, \quad \forall t > 0. \tag{29}$$

Idée de la démonstration

D'après le Théorème 2.4 de [6] (voir aussi [9,4]) un C^0-semigroupe de contractions $e^{t\mathcal{A}}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ vérifie (29) si (H1) et

$$\sup_{\lambda\in\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda^4}\left\|(i\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\right\| < +\infty, \tag{H3}$$

sont vraies. La première condition est vérifiée grâce au Théorème précédent. La condition (H3) se démontre en utilisant un argument de contradiction.

Références

[1] F. Alabau, Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (11) (1999) 1015–1020.
[2] F. Alabau-Boussouira, Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems, SIAM J. Control Optim. 41 (2) (2002) 511–541.
[3] F. Ammar-Khodja, S. Kerbal, A. Soufyane, Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam, J. Math. Anal. Appl. 327 (2007) 525–538.
[4] C.J.K. Batty, T. Duyckaerts, Non-uniform stability for bounded semi-groups on Banach spaces, J. Evol. Equ. 8 (4) (2008) 765–780.
[5] C. Benchimol, A note on weak stabilization of contraction semi-groups, SIAM J. Control Optim. 16 (1978) 373–379.
[6] A. Borichev, Y. Tomilov, Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups, Math. Ann. 347 (2) (2010) 455–478.
[7] F.L. Huang, Characteristic condition for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces, Ann. of Diff. Eqs. 1 (1985) 43–56.
[8] J.U. Kim, Y. Renardy, Boundary control of the Timoshenko beam, SIAM J. Control Optim. 25 (6) (1987) 1417–1429.
[9] Z. Liu, B. Rao, Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation, Z. Angew. Math. Phys. 56 (4) (2005) 630–644.
[10] J. Prüss, On the spectrum of C_0-semigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984) 847–857.
[11] D.L. Russell, A general framework for the study of indirect damping mechanisms in elastic systems, J. Math. Anal. Appl. 173 (2) (1993) 339–358.
[12] A. Soufyane, A. Wehbe, Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping, Electron. J. Differential Equation 2003 (2003) 1–14.