C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 821–825

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Statistique

Théorèmes limites pour les processus autorégressifs à valeurs dans $D[0,1]$

Limit theorems for $D[0,1]$-valued autoregressive processes

Layal El Hajj

L.S.T.A., Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 8 juillet 2010
Accepté après révision le 8 juin 2011
Disponible sur Internet le 28 juin 2011

Présenté par Paul Deheuvels

RÉSUMÉ

Nous nous intéressons dans cette Note à des classes de processus réels à temps continu représentables par des processus autorégressifs d'ordre 1 à valeurs dans $D[0,1]$ (ARD(1)). Sous certaines hypothèses de régularité, nous établissons des lois des grands nombres, le théorème central limite et la loi du logarithme itéré pour les ARD(1).

ABSTRACT

This Note deals with real continuous-time processes which admit a $D[0,1]$-valued autoregressive representation of order one (ARD(1)). Under some regularity conditions, we establish laws of large numbers, the central limit theorem and the law of the iterated logarithm for ARD(1).

Abridged English version

Let $D = D[0,1]$ be the space of real-valued functions defined on $[0,1]$ which are right continuous on $[0,1)$, with left hand limits on $(0,1]$. The aim of this Note is to study limit theorems for D-valued autoregressive process of order one (ARD(1)) represented by the following model

$$X_n = \rho(X_{n-1}) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

where $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ is a stationary sequence of D-valued random variables, ρ is a continuous linear operator on D and $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ is a D-white noise. Using the uniform topology on D is somewhat difficult. However, we can obtain some limit theorems for these processes by introducing particular techniques and some regularity conditions.

If X is ARD(1), ε is a strong white noise and the linear operator ρ is bounded, we obtain a strong law of large numbers. In addition, a weak law of large numbers holds as well, when ε is assumed to be convex tight. On the other hand, the central limit theorem is proved when ε is supposed to be stochastically continuous under some conditions related to its increments. Furthermore, the law of the iterated logarithm is satisfied when the following conditions are fulfilled: ε is a strong white noise having a continuous covariance function, it has independent increments, and the linear operator ρ is bounded.

Adresse e-mail : layal.elhajj@gmail.com.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.06.009

1. Introduction

La modélisation d'un processus à temps continu par un processus à valeurs dans un espace fonctionnel est une méthode bien adaptée pour faire de la prévision. Au début des années 1990, Bosq [3] propose de modéliser un tel processus à l'aide d'un processus autorégressif Hilbertien d'ordre 1. De nombreux travaux théoriques ou appliqués sont ensuite réalisés. Bosq [4] étudie les propriétés asymptotiques des autorégressifs Banachiques d'ordre 1. Plus tard, Pumo [13] s'intéresse au cas des autorégressifs d'ordre 1 à valeurs dans l'espace de Banach $C[0,1]$ des fonctions continues. Nous pouvons également citer, entre autres, Mourid [11] qui considère les autorégressifs d'ordre supérieur, ainsi que Mas [10] qui s'intéresse aux propriétés asymptotiques des autorégressifs Hilbertiens.

Cependant, certains processus, comme le processus de Poisson, n'admettent pas une représentation autorégressive dans l'espace de Banach $C[0,1]$ par exemple. C'est pourquoi nous considérons l'espace $D = D[0,1]$ des fonctions continues à droite et ayant des limites à gauche (càdlàg) qui est plus général et plus riche pour étudier ces classes de processus à sauts. Nous renvoyons à [2] et [14] pour plus de détails sur cet espace.

Nous considérons dans notre travail que D est muni de la topologie de la convergence uniforme (i.e., $\|x\| = \sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|, x \in D$). D est alors un espace de Banach non séparable, ce qui entraîne des problèmes de mesurabilité. Pour les résoudre, nous supposerons dans toute la suite que les variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans D sont mesurables par rapport à la tribu engendrée par les boules ouvertes $\mathcal{D}_b$ (voir [2] pour des précisions sur la mesurabilité). De plus, si $\mathbb{E}\|X\| < \infty$ alors l'espérance est définie par $(\mathbb{E}X)(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ pour tout $t \in D$ et $\mathbb{E}X \in D$ (voir [14]).

Soit $\rho : D \to D$ un opérateur linéaire borné mesurable par rapport à $\mathcal{D}_b$ (voir [2] et [12]) et $\varepsilon = (\varepsilon_n, n \in \mathbb{Z})$ un bruit blanc fort à valeurs dans D défini par une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que

$$\mathbb{E}\big(\varepsilon_n(s)\big) = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\big(\|\varepsilon_n\|^2\big) < \infty.$$

Une suite $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ de variables aléatoires stationnaires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans D est un processus autorégressif d'ordre 1 à valeurs dans D, noté ARD(1), si

$$X_n - m = \rho(X_{n-1} - m) + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

où $m \in D$.

L'objectif principal de cette Note est la généralisation des résultats asymptotiques des processus autorégressifs à valeurs dans un espace de Banach séparable établis dans [4] et [13] au cadre des processus autorégressifs à valeurs dans l'espace D.

Le plan de la Note est comme suit. Nous présentons dans la Section 2 l'existence et l'unicité de l'ARD(1) et ses propriétés élémentaires suivies de quelques exemples de processus admettant une représentation autorégressive. Les propriétés asymptotiques de l'ARD(1) sont données dans la Section 3, i.e., lois des grands nombres, théorème central limite (T.C.L.) et loi du logarithme itéré (L.L.I.).

Tout d'abord, nous regroupons les conditions dont nous avons besoin pour établir nos résultats.

(**H1**) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, la fonction $(s,t) \to \mathbb{E}[\varepsilon_n(s)\varepsilon_n(t)]$ est continue ;
(**H2**) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(\varepsilon_n(t), 0 \leqslant t \leqslant 1)$ est à accroissements indépendants ;
(**H3**) Il existe $j_0 \geqslant 1$ tel que $\|\rho^{j_0}\|_{\mathcal{L}} < 1$ où $\|\rho\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|\rho(x)\|$;
(**H4**) Pour tout $\delta > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, il existe K_δ un sous-ensemble compact tel que $\mathbb{P}[\varepsilon_n \in K_\delta] > 1 - \delta$;
(**H5**) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant u \leqslant 1$, nous avons

$$\mathbb{E}\big[\big|\varepsilon_n(s) - \varepsilon_n(t)\big|^2 \wedge \big|\varepsilon_n(t) - \varepsilon_n(u)\big|^2\big] \leqslant \varphi^2(u - s),$$

où φ est une fonction positive croissante sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\int_0^\infty \varphi\big(x^{-2}\big)\,\mathrm{d}x < \infty\,;$$

(**H6**) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant s \leqslant u \leqslant 1$, nous avons

$$\mathbb{E}\big[\big|\varepsilon_n(u) - \varepsilon_n(s)\big|^2\big] \leqslant \psi^2(u - s),$$

où ψ est une fonction positive croissante sur $\mathbb{R}^+$ telle que

$$\int_0^\infty \psi\big(x^{-4}\big)\,\mathrm{d}x < \infty\,;$$

(**H7**) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{E}[\frac{\|\varepsilon_n\|^2}{\log\log\|\varepsilon_n\|^2}] < \infty$.

Commentaires : Les conditions (**H1**) et (**H2**) sont utilisées dans [9] pour obtenir la L.L.I. dans D. La condition (**H4**) est nécessaire afin d'établir la loi faible des grands nombres dans D, pour plus de détails techniques nous nous référons à [15]. La condition (**H5**) utilisée pour montrer le T.C.L. est exprimée en fonction des moments des accroissements du bruit blanc, ce qui est dû au critère de compacité dans l'espace D (voir [2] et [6]). La condition (**H6**) n'est pas une restriction pour établir le T.C.L. dans D étant donné que les processus aléatoires ayant un nombre fini de points de discontinuité peuvent être réduis au cas des processus continus en probabilité d'après la décomposition du T.C.L. de Hahn (voir [8]). Les autres conditions sont classiques.

2. Existence et propriétés élémentaires de l'ARD(1)

Le théorème suivant montre l'existence et l'unicité de l'ARD(1) :

Théorème 2.1. *Sous la condition* (**H3**)*, l'équation* (1) *admet une solution unique et stationnaire qui converge presque sûrement dans D et dans $L^2_D(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, définie par*

$$X_n = m + \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j(\varepsilon_{n-j}), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Le Théorème 2.1 se démontre d'une manière similaire au théorème 6.1 de [5].

Soit D^* le dual topologique de D. Pestman [12] a introduit ce dual en précisant la structure de ces formes linéaires continues de la façon suivante : Pour tout $x^* \in D^*_B$, nous avons

$$x^*(x) = \int_0^1 x \,\mathrm{d}\mu + \sum_{j\geqslant 1} \varphi_j\big[x(t_j) - x\big(t_j^-\big)\big],$$

où $x \in D_B$, $0 \leqslant t_j \leqslant 1$, $\varphi_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $\sum_{j\geqslant 1} |\varphi_j| < \infty$ et μ est une mesure à signe sur $[0,1]$. Sous la condition (**H3**), nous présentons par la suite les propriétés élémentaires de l'ARD(1) qui sont une extension des résultats établis par Bosq [5] :

(i) X_0 est intégrable et $\mathbb{E}X_0 = m$;

(ii) Supposons que $m = 0$. Soit $C_{X_0}(s,t) = \mathbb{E}[X_0(s)X_0(t)]$ la fonction de covariance de X_0 et $C_{X_0,X_1}(s,t) = \mathbb{E}[X_0(s)X_1(t)]$ la fonction de covariance croisée de (X_0, X_1). Nous avons

$$C_{X_0,X_1}(s,t) = \rho C_{X_0}(s,t) \ ;$$

(iii) Si $x \in D$ est un vecteur propre de l'adjoint $\rho^*(D^* \to D^*)$ de ρ associé à une valeur propre $\alpha \in]-1,1[$, alors $(x^*(X_n - \mu), n \in \mathbb{Z})$ est un autorégressif réel d'ordre 1 éventuellement dégénéré.

Nous présentons par la suite quelques exemples de processus admettant une représentation autorégressive.

Example 1. Soit l'opérateur linéaire ρ à noyau R mesurable et symétrique défini par

$$\rho(x)(t) = \int_0^1 R(s,t)x(s)\,\mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,\ x \in D,$$

où $\sup_{0\leqslant s,t\leqslant 1}|R(s,t)| < 1$. Nous pouvons construire un ARD(1) en considérant le bruit blanc suivant :

$$\varepsilon_n(t) = N(n+t) - N(n) - \lambda t,$$

où N est un processus de Poisson bilatéral d'intensité λ, $n \in \mathbb{Z}$.

Example 2. Soit l'opérateur linéaire ρ défini par

$$\rho(x)(t) = \begin{cases} ax(t), & \text{si } 0 \leqslant t < 1/2 \ ; \\ bx(t), & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Nous supposons que $c = \max(|a|, |b|) < 1$. Nous pouvons alors construire un ARD(1) en considérant le bruit blanc suivant :

$$\varepsilon_n(t) = \int_n^{n+t} \varphi(n+t-s)\,\mathrm{d}\widetilde{N}(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,\ n \in \mathbb{Z},$$

où $\widetilde{N}(s) = N(s) - \lambda t$ est un processus de Poisson bilatéral centré et d'intensité λ et φ est une fonction réelle telle que

$$\int_0^1 |\varphi(u)| \,\mathrm{d}(\lambda(u)) < \infty \quad \text{et} \quad 0 < \int_0^1 \varphi^2(u)\,\mathrm{d}(\lambda(u)) < \infty.$$

Example 3. Soit $\xi = (\xi(t), t \geqslant 0)$ un processus de type Ornstein–Uhlenbeck (O.U.) stationnaire défini par

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\theta(t-s)}\,\mathrm{d}L(\theta s), \quad t \in \mathbb{R},\ \theta > 0,$$

où L est un processus de Lévy bilatéral (voir [1]). Nous associons à ce processus càdlàg un processus à temps discret $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ en posant

$$X_n(t) = \xi(n+t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Nous définissons alors un ARD(1) avec $\rho(x)(t) = e^{-\theta t}x(1),\ x \in D,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$ et $\varepsilon_n = \int_n^{n+t} e^{-\theta(n+t-s)}\,\mathrm{d}L(\theta s)$.

3. Théorèmes limites pour les ARD(1)

Dans cette section, nous nous limitons à l'étude de l'ARD(1) $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ centré, i.e., $m = 0$. Nous traitons dans cette partie le comportement asymptotique de $S_n(X) = X_1 + \cdots + X_n,\ n \geqslant 1$.

Proposition 3.1 *(Loi forte des grands nombres). Sous la condition* (**H3**)*, nous avons, lorsque* $n \to 0$,

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \quad \textit{p.s.}$$

Proposition 3.2 *(Loi faible des grands nombres). Sous les conditions* (**H3**) *et* (**H4**) *où* K_δ *est convexe, nous obtenons, lorsque* $n \to 0$,

$$\mathbb{E}\left\| \frac{S_n}{n} \right\| \to 0.$$

Proposition 3.3 *(T.C.L.). Sous les conditions* (**H3**)–(**H6**)*,* X *vérifie le T.C.L. dans* D.
Alors, lorsque $n \to 0$*, nous avons*

$$\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N \sim \mathcal{N}\big(0, (I-\rho)^{-1} C_{\varepsilon_0} \big(I-\rho^*\big)^{-1}\big).$$

Proposition 3.4. *(L.L.I.) Sous les conditions* (**H1**)–(**H3**)*,* X *vérifie la L.L.I. dans* D.
Nous obtenons, lorsque $n \to 0$,

$$d\left(\frac{S_n}{a_n}, (I-\rho)^{-1}K\right) \to 0 \quad \textit{p.s.}$$

et

$$C\left(\frac{S_n}{a_n}\right) = (I-\rho)^{-1}K \quad \textit{p.s.},$$

où $a_n = \sqrt{2n \log\log n}$*,* $C((x_n))$ *est l'ensemble des points d'accumulation de* (x_n) *et* K *est la boule unité de l'espace autoreproduisant hilbertien associé au noyau de covariance de* ε_0*. Pour* $x \in D$ *et* $A \subset D$*, nous notons* $d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$.

Remarque. Sous les conditions (**H2**) et (**H7**), si ε vérifie le T.C.L. dans D alors ε vérifie la L.L.I. dans D (voir [7]). Nous en déduisons que X vérifie la L.L.I. dans D.

Remerciements

J'exprime ma gratitude au Professeur Denis Bosq pour ses orientations et ses suggestions constructives qui m'ont permis de mener à terme ce travail. Je tiens également à remercier le rapporteur pour l'intérêt qu'il porte à mes travaux et pour les améliorations suggérées.

Références

[1] O.E. Barndorff-Nielsen, N. Shephard, Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics, J. R. Stat. Soc., Ser. B, Stat. Methodol. 63 (2) (2001) 167–241.
[2] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, second edition, John Wiley and Sons Inc., New York, 1999.
[3] D. Bosq, Modelization, non-parametric estimation and prediction for continuous time processes, in: Roussas (Ed.), Nonparametric Functional Estimation and Related Topics, in: NATO Adv. Sci. Ser. C, vol. 335, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991, pp. 509–529.
[4] D. Bosq, Propriétés asymptotiques des processus autorégressifs banachiques. Applications, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 316 (1993) 607–610.
[5] D. Bosq, Linear Process in Function Spaces. Theory and Applications, Lecture Notes in Statistics, vol. 149, Springer-Verlag, New York, 2000.
[6] X. Fernique, Compactness of distribution of cadlag random functions, Liet. Mat. Rink. 34 (3) (1994) 231–243.
[7] V. Goodman, J. Kuelbs, J. Zinn, Some results on the LIL in Banach space with applications to weighted empirical processes, Ann. Probab. 9 (1981) 713–752.
[8] M.G. Hahn, Central limit theorems in $D[0,1]$, Z. Warsch. Verw. Gebiete 44 (2) (1978) 89–101.
[9] J. Kuelbs, A strong convergence theorem for Banach space valued random variables, Ann. Probability 4 (1976) 744–771.
[10] A. Mas, Normalité asymptotique de l'estimateur empirique de l'opérateur d'autocorrélation d'un processus ARH(1), C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 329 (1999) 899–902.
[11] T. Mourid, Contribution à la statistique des processus autorégressifs à temps continu, Thesis, University of Paris 6, 1995.
[12] W.R. Pestman, Measurability of linear operators in the Skorokhod topology, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 2 (4) (1995) 381–388.
[13] B. Pumo, Estimation et prévision de processus autorégressifs fonctionnels. Application aux processus à temps continu, Ph.D. Thesis, University of Paris 6, 1992.
[14] R.L. Taylor, Stochastic Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Linear Spaces, Lecture Notes in Mathematics, vol. 672, Springer, Berlin, 1978.
[15] R.L. Taylor, P.Z. Daffer, Convergence of weighted sums of random elements in $D[0,1]$, J. Multivariate Anal. 10 (1980) 95–106.