C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 787–791

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse fonctionnelle/Topologie différentielle

La signature basique est un invariant d'homotopie feuilletée

The basic signature is a foliated homotopy invariant

Moulay-Tahar Benameur, Alexandre Rey-Alcantara

LMAM, UMR 7122 du CNRS, Ile du Saulcy, UPV-Metz, 57000 Metz, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 30 novembre 2010
Accepté après révision le 6 juin 2011
Disponible sur Internet le 2 juillet 2011

Présenté par Jean-Pierre Demailly

RÉSUMÉ

Nous montrons que la signature basique d'un feuilletage riemannien, homologiquement orientable de codimension paire, est un invariant d'homotopie feuilletée.

ABSTRACT

We prove that the basic signature of a homologically orientable Riemannian foliation with even codimension, is a foliated homotopy invariant.

Abridged English version

The problem of computing the basic index of the basic transversely elliptic operators on Riemannian foliations by a local formula à la Atiyha–Singer was stated by A. El Kacimi in the late 1980s, see for instance [4,5]. The first formulae appeared only in 2010; in the paper [9] by Gorokhovsky and Lott under the assumption that the Molino sheaf is abelian, and then in the paper [3] by Brüning, Kamber and Richardson. One of the main applications concerns the computation of the basic signature of a Riemannian foliation and the stability properties of this invariant then imply stability properties of the combination of characteristic numbers and eta invariants given in the formula of [3]. This note proves that the basic signature is an invariant of foliated homotopy equivalences. We fix two closed foliated manifolds $(M, \mathcal{F})$ and $(M', \mathcal{F}')$. We denote in the sequel by $H^*(M/\mathcal{F})$ the basic cohomology of $(M, \mathcal{F})$ and similarly for $(M', \mathcal{F}')$.

Definition 0.1. A smooth map $f : M \to M'$ is foliated if it sends the leaves of $(M, \mathcal{F})$ in the leaves of $(M', \mathcal{F}')$. This is equivalent to the condition $f_*(T\mathcal{F}) \subset T\mathcal{F}'$.

Definition 0.2. Two foliated maps $\phi, \psi : M \to M'$ are homotopic ($\phi \sim \psi$) if there exists a smooth map $H : [0, 1] \times M \to M'$ such that

- $H(0, \bullet) = \phi$ and $H(1, \bullet) = \psi$;
- $\forall t \in [0, 1]$, $H(t, \bullet)$ is a foliated map from $(M, \mathcal{F})$ to $(M', \mathcal{F}')$.

The first result that we obtain is a basic version of the Poincaré lemma, namely

Adresses e-mail : benameur@univ-metz.fr (M.-T. Benameur), reyalcan@univ-metz.fr (A. Rey-Alcantara).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2011.06.012

Theorem 0.3. *Assume that $\phi, \psi : (M, \mathcal{F}) \to (M', \mathcal{F}')$ are smooth homotopic foliated maps, then we have $\phi^* = \psi^*$ on $H^*(M'/\mathcal{F}')$.*

Definition 0.4. A smooth foliated map $f : (M, \mathcal{F}) \to (M', \mathcal{F}')$ is called a foliated homotopy equivalence if there exists a smooth foliated map $g : (M', \mathcal{F}') \to (M, \mathcal{F})$ such that $f \circ g \sim Id_{M'}$ and $g \circ f \sim Id_M$.

Theorem 0.3 together with functoriality of pull-back imply the following:

Corollary 0.5. *Let $f : (M, \mathcal{F}) \to (M', \mathcal{F}')$ be a foliated homotopy equivalence, then f induces an isomorphism*

$$f^* : H^*\big(M'/\mathcal{F}'\big) \to H^*(M/\mathcal{F}).$$

We assume from now on that our foliations are Riemannian, oriented and homologically oriented. Recall that a codimension q Riemannian foliation $(M, \mathcal{F})$ is homologically oriented if $H^q(M/\mathcal{F})$ is nontrivial, this turns out to be the appropriate notion for transverse orientability. Using local orthonormal frames along the leaves one constructs a leafwise volume form $\chi \in \Omega^p(M)$ [13]. A classical result due to Rummler [11] states that χ is then $\mathcal{F}$-closed, i.e. $d\chi \in \Omega^{p+1}(M)$ satisfies

$$d\chi(X_1, \ldots, X_p, Y) = 0 \quad \text{whenever } X_1, \ldots, X_p \in \Gamma(T\mathcal{F}).$$

Assume that the codimension $q = 2q'$ is even, then we define a bilinear form Q on $\Omega^{q'}(M/\mathcal{F})$ by setting

$$Q(\omega_1, \omega_2) := \int_M \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \chi.$$

It is easy to check that Q induces a bilinear form, still denoted Q, on the finite dimensional vector space $H^{q'}(M/\mathcal{F})$ which is non-degenerate, symmetric when $q' = 2\ell$ is even and antisymmetric when $q' = 2\ell + 1$ is odd.

Definition 0.6. (See [5].) The basic signature $\sigma(M/\mathcal{F})$ is by definition the signature of the non-degenerate bilinear form Q on $H^{q'}(M/\mathcal{F})$. So, when q' is odd, we agree as usual that $\sigma(M/\mathcal{F}) = 0$.

The main theorem of this note is then the following:

Theorem 0.7. *Assume that $(M, \mathcal{F})$ and $(M', \mathcal{F}')$ are two homologically orientable Riemannian foliations and that there exists a homotopy equivalence $f : (M, \mathcal{F}) \to (M', \mathcal{F}')$. Then $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{F}')$, $\mathrm{codim}(\mathcal{F}) = \mathrm{codim}(\mathcal{F}')$ and we have*

$$\sigma\big(M'/\mathcal{F}'\big) = \epsilon(f) \times \sigma(M/\mathcal{F})$$

where $\epsilon(f)$ is $+1$ if f respects the transverse orientations and -1 otherwise.

1. Introduction

Le problème du calcul de l'indice d'un opérateur basique transversalement elliptique sur un feuilletage riemannien à l'aide d'une formule locale à la Atiyah–Singer a été énoncé par A. El Kacimi à la fin des années 80, voir par exemple [4, 5]. Malgré plusieurs tentatives, les premieres formules n'ont été démontré qu'en 2010 ; dans l'article de Gorokhovsky–Lott [9] sous l'hypothèse que le faisceau de Molino est abélien, puis avec une autre approche dans l'article de Brüning–Kamber–Richardson [3]. Un des exemples les plus importants d'applications de ce théorème concerne le calcul de la signature basique d'un feuilletage riemannien et les propriétés de stabilité de cet invariant entrainent alors la stabilité de la combinaison de nombres caractéristiques et d'invariants eta donnée par la formule de [3]. Suite à des discussions avec plusieurs experts de la géométrie basique des feuilletages il ressort que la question de l'invariance homotopique feuilletée de la signature basique n'avait pas encore été adressée dans la littérature. Cette note a pour objectif de répondre à cette question.

2. Applications feuilletées et cohomologie basique

Nous avons rédigé cette note en nous plaçant dans la catégorie C^∞ mais nous n'avons pas de doute que les résultats s'étendent au cadre topologique comme considéré dans [6]. Soit $(M, \mathcal{F})$ une variété feuilletée. Une forme différentielle $\omega \in \Omega^*(M)$ sur M est basique si

$$i_V(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad i_V(d\omega) = 0, \quad \forall V \in \Gamma(T\mathcal{F}).$$

Ici i_V désigne comme d'habitude la contraction de ω par V. On note $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ l'ensemble des formes basiques sur M. Il est clair par définition que $\Omega^*(M/\mathcal{F})$ est une sous-algèbre différentielle graduée de $\Omega^*(M)$. La cohomologie basique est alors simplement la cohomologie du sous-complexe de de Rham des formes différentielles basiques. Elle sera notée $H^*(M/\mathcal{F})$.

Soient $(M', \mathcal{F}')$ une autre variété feuilletée fermée et $f : (M, \mathcal{F}) \to (M', \mathcal{F}')$ une application C^∞.

Définition 1. On dit que f est feuilletée si elle envoie les feuilles de $(M,\mathcal{F})$ dans les feuilles de $(M',\mathcal{F}')$. Puisque f est différentiable ici cela équivaut à la condition $f_*(T\mathcal{F}) \subset T\mathcal{F}'$.

Si $(M,\mathcal{F})$ et $(M',\mathcal{F}')$ sont deux feuilletages quelconques alors toute application feuilletée $f:(M,\mathcal{F}) \to (M',\mathcal{F}')$ induit par pull-back une application entre les formes basiques, qui commute avec les différentielles de de Rham, et donne une application linéaire

$$f^* : H^*\big(M'/\mathcal{F}'\big) \to H^*(M/\mathcal{F}).$$

Définition 2. Soient $(M,\mathcal{F})$ et $(M',\mathcal{F}')$ des variétés fermées feuilletées et $\phi,\psi : M \to M'$ des applications feuilletées. On dira ici que ϕ et ψ sont homotopes et on écrira $\phi \sim \psi$ s'il existe une application $H:[0,1]\times M \to M'$ de classe C^∞ telle que

- $H(0,\bullet) = \phi$ et $H(1,\bullet) = \psi$;
- $\forall t \in [0,1]$, $H(t,\bullet)$ est une application feuilletée de $(M,\mathcal{F})$ dans $(M',\mathcal{F}')$.

Nous pouvons énoncer :

Théorème 1. *Soient $\phi,\psi:(M,\mathcal{F}) \to (M',\mathcal{F}')$ deux applications feuilletées homotopes, alors on a $\phi^* = \psi^*$ sur $H^*(M'/\mathcal{F}')$.*

Remark 1. Nous ne supposons pas que les homotopies préservent les feuilles mais seulement qu'elles envoient les feuilles dans les feuilles.

La preuve de ce théorème est une adaptation des lemmes de Poincaré habituels au cadre des feuilletages.

Définition 3. Une application feuilletée $f:(M,\mathcal{F}) \to (M',\mathcal{F}')$ est appelée une équivalence d'homotopie feuilletée s'il existe une application feuilletée $g:(M',\mathcal{F}') \to (M,\mathcal{F})$ telle que $f\circ g \sim Id_{M'}$ et $g \circ f \sim Id_M$.

Le Théorème 1 et la fonctorialité de l'image inverse impliquent :

Corollaire 1. *Soit $f:(M,\mathcal{F}) \to (M',\mathcal{F}')$ une équivalence d'homotopie feuilletée. Alors f induit un isomorphisme*

$$f^* : H^*\big(M'/\mathcal{F}'\big) \to H^*(M/\mathcal{F}).$$

3. Signature basique et équivalences feuilletées

Soit M une variété riemannienne compacte connexe (orientée) sans bord de dimension n. On suppose que M est munie d'un feuilletage riemannien $\mathcal{F}$ transversalement orienté de codimension $q = n - p$. On notera $T\mathcal{F}$ le fibré tangent aux feuilles et $\nu\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ le fibré normal. Nous fixons une métrique quasi-fibrée g sur M [10] et nous utiliserons la réalisation $(T\mathcal{F})^\perp$ de $\nu\mathcal{F}$ comme sous-fibré de TM. Nous savons alors que la restriction de g à $\nu\mathcal{F}$ est une métrique invariante par holonomie.

On rappelle que $H^*(M/\mathcal{F})$ est alors de dimension finie [8]. On définit aisément grâce à des repères locaux orthonormés directs, une forme volume transversale $\nu \in \Omega^q(M)$ qui est en fait basique et fermée [13]. On parle de feuilletage homologiquement orientable lorsque l'espace de cohomologie maximal $H^q(M/\mathcal{F})$ est non trivial. Cette définition a été introduite par V. Sergiescu dans [12]. La proposition suivante a été démontrée dans [7].

Proposition 3.1. *(Voir [7].) Si un feuilletage riemannien sur une variété connexe fermée est homologiquement orientable alors $H^q(M/\mathcal{F})$ est une droite réelle, engrendrée par la classe de ν.*

Puisque la variété ambiante M est orientée, le feuilletage transversalement orienté $\mathcal{F}$ est nécessairement orientable de façon compatible et on construit en utilisant des repères locaux longitudinaux orthonormés directs, une forme volume longitudinale $\chi \in \Omega^p(M)$ [13]. Notons $*$ l'opérateur de Hodge sur la variété M, alors la compatibilité des orientations permet de vérifier que $*\nu = \chi$ et $\nu \wedge \chi = \mathrm{dvol}$, la forme volume normalisée de M [13]. La forme χ n'est bien sûr pas fermée en général, cependant on a le résultat suivant :

Proposition 3.2. *(Voir [11].) Soit $(M,\mathcal{F})$ un feuilletages riemannien homologiquement orientable comme ci-dessus. Alors la forme volume longitudinale χ est $\mathcal{F}$-fermée, i.e. la différentielle $d\chi \in \Omega^{p+1}(M)$ de χ satisfait*

$$d\chi(X_1,\ldots,X_p,Y) = 0 \quad \text{dès que } X_1,\ldots,X_p \in \Gamma(T\mathcal{F}).$$

Définition 4. On appelle opérateur de Hodge basique l'application linéaire $\bar{*} : \Omega^k(M) \to \Omega^{q-k}(M)$ définie par

$$\bar{*}\omega = (-1)^{p(q-k)} * (\omega \wedge \chi).$$

Les propriétés suivantes sont alors directes [13] :

- $\bar{*}$ induit $\bar{*} : \Omega^k(M/\mathcal{F}) \to \Omega^{q-k}(M/\mathcal{F})$;
- $*\omega = \bar{*}\omega \wedge \chi$ et $\bar{*}^2\omega = (-1)^{k(q-k)}\omega$, $\forall \omega \in \Omega^k(M/\mathcal{F})$.

Rappelons que pour tout $\alpha, \beta \in \Omega^k(M/\mathcal{F})$, le produit scalaire riemannien de α par β peut être exprimé par la formule

$$\langle \alpha \mid \beta \rangle_M = \int_M \alpha \wedge *\beta = \int_M \alpha \wedge \bar{*}\beta \wedge \chi.$$

Lorsque $\mathcal{F}$ est homologiquement orientable de codimension paire $q = 2q'$, on dispose d'une forme bilinéaire Q sur l'espace vectoriel $\Omega^{q'}(M/\mathcal{F})$ définie par

$$Q(\omega_1, \omega_2) := \int_M \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \chi.$$

Proposition 1. *(Voir [5].) La forme bilinéaire Q induit une forme bilinéaire, encore notée Q, sur l'espace vectoriel (de dimension finie) $H^{q'}(M/\mathcal{F})$ qui est non-dégénérée, symétrique lorsque $q' = 2\ell$ est pair et antisymétrique lorsque $q' = 2\ell + 1$ est impair.*

Définition 5. (Voir [5].) La signature de la forme bilinéaire non-dégénérée Q sur $H^{q'}(M/\mathcal{F})$ est appelée signature basique de $(M, \mathcal{F})$ et est notée $\sigma(M/\mathcal{F})$. Ainsi, dans le cas où q' est impair nous convenons comme d'habitude que $\sigma(M/\mathcal{F}) = 0$.

On suppose dorénavant que les feuilletages $(M, \mathcal{F})$ et $(M', \mathcal{F}')$ sont riemanniens orientés et homologiquement orientés.

D'après la Proposition 3.1 on sait que pour toute application feuilletée $f : (M, \mathcal{F}) \to (M', \mathcal{F}')$, les classes de cohomologies de $f^*\nu'$ et de ν sont colinéaires, i.e. $f^*([\nu']) = \lambda[\nu] \in H^q(M/\mathcal{F})$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On dira qu'une telle application préserve les orientations transverses si $\lambda \geqslant 0$ et qu'elle inverse les orientations transverses lorsque $\lambda < 0$. Si f est une équivalence d'homotopie feuilletée on sait d'après ce qui précède que $\lambda \neq 0$. Le signe de λ est alors noté $\epsilon(f)$.

Le résultat principal de cette note est le théorème suivant :

Théorème 2. *Soient $(M, \mathcal{F})$ et $(M', \mathcal{F}')$ deux feuilletages riemanniens homologiquement orientables tels qu'il existe une équivalence d'homotopie feuilletée $f : (M, \mathcal{F}) \to (M', \mathcal{F}')$. Alors $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{F}')$, $\operatorname{codim}(\mathcal{F}) = \operatorname{codim}(\mathcal{F}')$ et on a*

$$\sigma(M'/\mathcal{F}') = \epsilon(f) \times \sigma(M/\mathcal{F}).$$

Idée de preuve. Certaines idées de la preuve sont inspirées du travail en collaboration du premier auteur [1] et il nous suffit de prouver que la forme quadratique

$$(\omega'_1, \omega'_2) \longmapsto \int_M f^*(\omega'_1 \wedge \omega'_2) \wedge \chi,$$

a pour signature la signature basique de $(M', \mathcal{F}')$ à $\epsilon(f)$ près. La principale difficulté réside dans le fait que la forme de volume longitudinale χ n'est pas fermée et dépend bien sûr de la métrique. On suppose que la codimension est multiple de 4 c'est à dire que $q = 4l$ puisque l'autre cas est trivial. On applique la Proposition 3.1 pour déduire qu'il existe $\alpha \in d\Omega^{q-1}(M/\mathcal{F})$ tel que $f^*\nu' = \lambda\nu + \alpha$. Ensuite on montre en utilisant notamment les résultats précédents que pour tout $\omega' \in Z^q(M'/\mathcal{F}')$ [2]

$$\langle f^*\omega' | \nu \rangle_M = \lambda \times \langle \omega' | \nu' \rangle_{M'}.$$

Cette relation permet alors de conclure. En effet, si ω'_1, ω'_2 sont deux formes différentielles basiques fermées de degré $2l$, alors on peut écrire,

$$\begin{aligned} Q(f^*\omega'_1, f^*\omega'_2) &= \int_M f^*(\omega'_1 \wedge \omega'_2) \wedge \chi = \int_M f^*(\omega'_1 \wedge \omega'_2) \wedge *\nu = \langle f^*(\omega'_1 \wedge \omega'_2) | \nu \rangle_M \\ &= \lambda \langle \omega'_1 \wedge \omega'_2 | \nu' \rangle_{M'} = \lambda \int_{M'} \omega'_1 \wedge \omega'_2 \wedge *\nu' = \lambda \int_{M'} \omega'_1 \wedge \omega'_2 \wedge \chi' = \lambda Q'(\omega'_1, \omega'_2). \end{aligned}$$

Remerciements

Nous avons bénéficié lors de l'élaboration de ce travail de discussions enrichissantes avec Abdelhak Abouqateb, Aziz El Kacimi, Alexander Gorokhovsky et James Heitsch. Nous les en remercions chaleureusement.

Références

[1] M.-T. Benameur, J. Heitsch, The twisted higher harmonic signature for foliations, preprint arXiv:0711.0352, J. Differential Geom., in press.
[2] M.-T. Benameur, A. Rey Alcantara, Equivalence d'homotopie feuilletée et signature basique, preprint.
[3] J. Brüning, F. Kamber, K. Richardson, The eta invariant and equivariant index of transversally elliptic operators, preprint arXiv:1008.2016, August 2010.
[4] A. El Kacimi-Alaoui, M. Nicolau, Opérateurs transversallement elliptiques sur un feuilletage riemannien et applications, Compos. Math. 73 (1) (1990) 57–106.
[5] A. El Kacimi, Towards a basic index theory, in: Proceedings of the Summer School and Workshop: Dirac operators: Yesterday and Today, CAMS-AUB, Beirut 2001, 2005, pp. 251–261.
[6] A. El Kacimi, On the topological invariance of the basic cohomology, Math. Ann. 295 (1993) 627–634.
[7] A. El Kacimi, G. Hector, Décomposition de Hodge basique pour un feuilletage riemannien, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 36 (3) (1986) 207–227.
[8] A. El Kacimi, G. Hector, V. Sergiescu, La cohomologie basique d'un feuilletage riemannien est de dimension finie, Math. Z. 188 (1985) 593–599.
[9] A. Gorokhovsky, J. Lott, The index of a transverse Dirac-type operator: the case of abelian Molino sheaf, preprint arXiv:1005.0161, May 2010.
[10] P. Molino, Riemannian Foliations, Progr. Math., vol. 73, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1988.
[11] H. Rummler, Quelques notions simples en géométrie riemannienne et leurs applications aux feuilletages compacts, Comment. Math. Helv. 54 (1979) 224–239.
[12] V. Sergiescu, Cohomologie basique et dualité des feuilletages riemanniens, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 53 (3) (1985) 137–158.
[13] P. Tondeur, Geometry of Foliations, Monogr. Math., vol. 90, Birkhäuser Verlag, 1997.