



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Analyse numérique

# Une méthode de décomposition en temps avec des schémas d'intégration réversible pour la résolution de système d'équations différentielles ordinaires

*Time domain decomposition with time reversible integration for initial value problem*

Patrice Linel, Damien Tromeur-Dervout

Université de Lyon, université Lyon 1, CNRS, institut Camille-Jordan, UMR5208, 43, boulevard du 11 Novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex, France

## INFO ARTICLE

*Historique de l'article :*

Reçu le 8 juin 2009

Accepté après révision le 5 juillet 2011

Disponible sur Internet le 26 juillet 2011

Présenté par Olivier Pironneau

## RÉSUMÉ

Nous proposons une méthode de décomposition de domaine en temps qui brise la séquentialité du schéma d'intégration pour les systèmes d'EDO. Sous la condition de dérivabilité du flot, nous transformons le problème à valeur initiale en un problème aux limites bien posé en utilisant la symétrisation de l'intervalle d'intégration et un schéma d'intégration réversible. Nous construisons explicitement le système tridiagonal par blocs satisfait par les solutions aux interfaces des sous-intervalles pour les systèmes d'EDO linéaires. Nous proposons ensuite, un algorithme itératif de type Schwarz pour la mise à jour des conditions d'interfaces qui permet d'étendre la méthode aux systèmes d'EDO non-linéaires.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## ABSTRACT

We propose a time domain decomposition method that breaks the sequentiality of the integration scheme for systems of ODE. Under the condition of differentiability of the flow, we transform the initial value problem into a well-posed boundary values problem using the symmetrization of the interval of time integration and time-reversible integration scheme. For systems of linear ODE, we explicitly construct the block tridiagonal system satisfied by the solutions at the time sub-intervals extremities. We then propose an iterative algorithm of Schwarz type for updating the interfaces conditions which can extend the method to systems of nonlinear ODE.

© 2011 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## 1. Introduction

Les méthodes de décomposition en temps pour résoudre numériquement les systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) du premier ordre,  $\{\dot{y} = f(t, y(t)), t \in [0, T], y(0) = \alpha_0 \in \mathbb{R}^d\}$ , consistent à décomposer l'intervalle de temps  $[0, T]$  en  $p$  sous-intervalles  $S_i = [T_{i-1}^+, T_i^-]$ , avec  $T_0 = 0$  et  $T_p = T$ . A partir d'une condition initiale  $\lambda_{i-1}$  définie au temps  $T_{i-1}^+$  l'intégration du système d'EDO sur l'intervalle  $S_i$  permet de définir une solution  $y_i(t)$  définie sur cet intervalle  $S_i$ . Cependant  $y_i(T_i^-)$  peut être différent de la condition initiale  $\lambda_i$  prise pour calculer la solution  $y_{i+1}(t)$  sur l'intervalle  $S_{i+1}$ .

Adresses e-mail : patrice.linel@univ-lyon1.fr (P. Linel), damien.tromeur-dervout@univ-lyon1.fr (D. Tromeur-Dervout).

La difficulté est de définir correctement les  $\lambda_i$  pour que les solutions  $y_i(t)$  et  $y_{i+1}(t)$  se raccordent en  $T_i$ . Ceci s'effectue par un processus itératif qui partant d'une condition initiale  $\lambda_{i-1}^{(0)}$  met à jour à l'itération  $k$  les  $\lambda_{i-1}^{(k)}$  sur chaque intervalle  $S_i$ . Connaissant les  $\lambda_{i-1}^{(k)}$  le calcul des  $y_i(t)$  se fait en parallèle sur chaque  $S_i$  à l'aide d'un integrateur  $\mathcal{F}$  défini sur une grille fine en temps. Par contre la mise à jour des  $\lambda_i^{(k+1)}$  est un processus séquentiel i.e. nécessite la mise à jour de  $\lambda_{i-1}^{(k+1)}$ , et s'apparente à une méthode de tir (pour la méthode Parareal [4] :  $\lambda_i^{(k+1)} = \mathcal{G}(\lambda_{i-1}^{(k+1)}) + \mathcal{F}(\lambda_{i-1}^{(k)}) - \mathcal{G}(\lambda_{i-1}^{(k)})$  où  $\mathcal{G}$  est un integrateur défini sur une grille grossière en temps). La non connaissance de la solution à l'état final  $T$  ne permet pas de lier ces corrections sur les  $\lambda_i^{(k)}$ .

Sous l'hypothèse de dérivabilité du flot  $f(t, y(t))$ , l'approche proposée consiste à briser la séquentialité, présente dans la technique précédente, en transformant le problème à valeur initiale en un problème aux valeurs limites bien posé. Nous symétrisons le problème de sorte de disposer de conditions aux limites bien définies. Nous utilisons la propriété de  $\rho$ -réversibilité des systèmes partitionnés pour justifier l'intégration réversible, sur la partie du problème symétrisé, par des schémas symétriques. Une formulation itérative de type Schwarz pour la mise à jour des conditions d'interfaces est mise en oeuvre sur des systèmes d'EDO linéaires et non-linéaires en utilisant le schéma d'intégration de *Störmer-Verlet implicite*. Nous montrons que cet algorithme de Schwarz a une convergence/divergence purement linéaire pour les systèmes d'EDO linéaires et qu'il peut être accéléré par la technique d'Aitken. Nous montrons ensuite comment construire par le schéma d'intégration de *Störmer-Verlet explicite*, le système tridiagonal par blocs satisfait par les conditions aux limites des problèmes des sous-intervalles pour des systèmes d'EDO linéaires, ou pour les systèmes d'EDO non-linéaires les composantes indépendantes de la fonction de raccord.

## 2. Symétrisation du problème

Soit  $f(t, y(t))$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m)$ , le système de  $m$  EDO est transformé en un problème aux limites

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) = g(t, y(t)) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial t}(t, y(t)) + f(t, y(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(t, y(t)), & t \in ]0, T[, \\ y(0) = \alpha_0, & \dot{y}(0) = f(0, \alpha_0). \end{cases} \quad (1)$$

Cette transformation n'est pas suffisante pour briser la séquentialité du processus d'intégration sur les  $S_{i+1}$  i.e. le résultat de l'intégration sur  $S_i$  est nécessaire pour définir les conditions aux limites sur  $S_{i+1}$ . L'idée principale est de rendre symétrique l'intervalle d'intégration et d'effectuer une intégration rétrograde sur l'intervalle symétrisé de sorte à avoir la condition au limite de type Neumann à  $T_0 = 0$  de l'intervalle de temps symétrisé. La justification de cette symétrisation repose sur l'écriture de l'équation (1) sous la forme d'un système d'ordre 1 augmenté :  $(\dot{y}(t), \dot{v}(t))^t = \Phi(y(t), v(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (v(t), g(t, y(t)))^t$  [1]. Le champ vectoriel  $\Phi$  ainsi défini est dit  $\rho$ -réversible car il vérifie  $\rho \circ \Phi = -\Phi \circ \rho$  avec l'application linéaire  $\rho : (y, v) \rightarrow (y, -v)$ . Il suffit donc de disposer d'un schéma d'intégration symétrique pour faire l'intégration rétrograde sur l'intervalle symétrisé pour revenir à l'état initial.

Pour  $a, b$  donnés dans  $\mathbb{R}^+$  avec  $a < b$ , on utilisera la notation  $\overline{[a, b]}$  pour indiquer que l'intervalle doit être parcouru dans le sens rétrograde. On peut dès lors distribuer les conditions aux limites entre les intervalles  $S_i$  de  $[0, T]$  et les  $p$  intervalles  $S_{i+p} = \overline{S}_i = [T_{i-1}^+, T_i^-]$  de  $\overline{[0, T]}$  avec des conditions de raccords de type Dirichlet-Neumann :  $\dot{y}_j(T_j^-) = \dot{y}_{j+1}(T_j^+)$  et  $y_{j+1}(T_j^+) = y_j(T_j^-)$  avec pour  $j = p$ ,  $\dot{y}_p(T_p^-) = -\dot{\bar{y}}_p(T_p^-)$ ,  $\bar{y}_p(T_p^-) = y_p(T_p^-)$ . Nous avons deux manières de résoudre le problème du raccord des solutions aux interfaces : 1) un algorithme de type Schwarz additif (ou multiplicatif) sans recouvrement [2] dont on peut accélérer la convergence [3], 2) un algorithme de type Newton qui se réduit à la résolution d'un système tridiagonal par blocs pour les systèmes d'EDO linéaires.

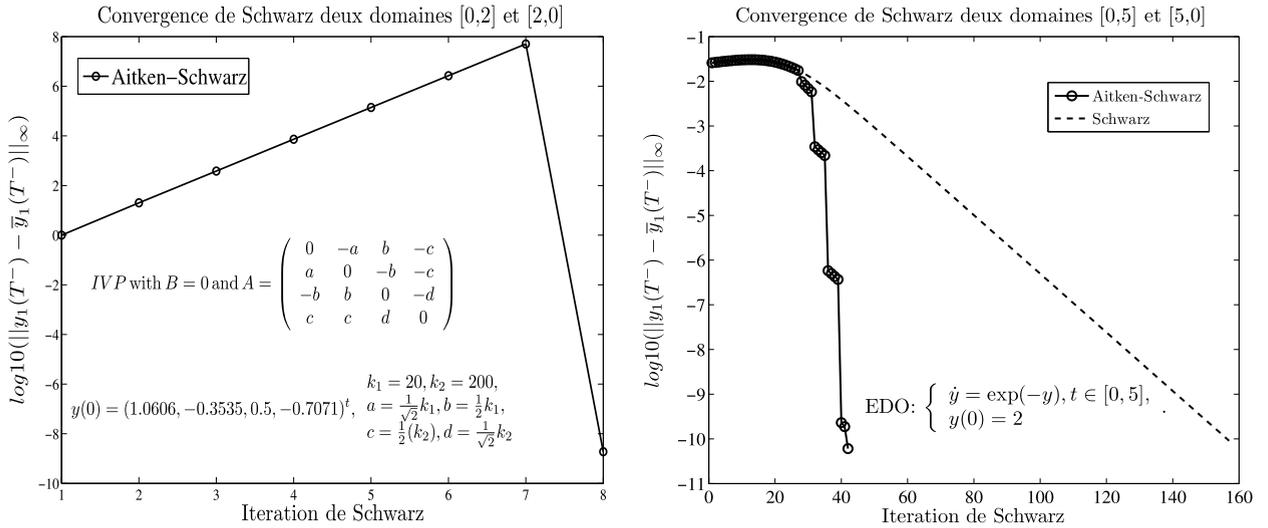
**Remarque 1.** Les méthodes de tir multiple pour la décomposition en temps comme [4] se basent uniquement sur le raccord de type Dirichlet entre les sous domaines.

## 3. Schéma d'intégration symétrique

Considérons le schéma symétrique de *Störmer-Verlet implicite* :  $y_{i,n+1} - 2y_{i,n} + y_{i,n-1} = h^2 g(t_n, y_{i,n})$ , où  $y_{i,n}$  est une approximation de la solution  $y(t_n) = y_i(t_n)$  en  $t_n \in S_i$  et  $h$  le pas d'intégration pris constant sur les  $S_i$ , eux-mêmes pris de taille constante et discrétisés avec  $N + 1$  points. Nous avons un premier résultat dans le cas de systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires :

**Théorème 3.1.** Soit le système  $\dot{y} = Ay + B$ ,  $y(0) = \alpha_0 \in \mathbb{R}^d$  avec  $A$  diagonalisable,  $B \in \mathbb{R}^d$ , alors l'algorithme de Schwarz appliqué à l'équation du second ordre (cf. eq. (1)) sur l'intervalle de temps symétrisé de longueur  $2T$ , converge ou diverge purement linéairement (l'erreur  $e^{k+1}$  s'écrit sous la forme  $e^{k+1} = \mathbb{P}e^k$  avec  $\mathbb{P}$  non nilpotent et indépendant de l'itération  $k$ ).

Dans la base des vecteurs propres de  $A$  on résout l'équation de récurrence linéaire satisfaite par chaque composantes sur  $S_i$  en fonction des conditions aux limites de l'itération précédente sur  $S_{i-1}$  et  $S_{i+1}$ . En posant  $X_1$  et  $X_2$  les racines de



**Fig. 1.** Convergence de l’algorithme Aitken–Schwarz pour un problème d’oscillateur harmonique résolu sur les  $S_i$  par le schéma de Störmer–Verlet implicite avec un pas de temps régulier  $h = 0.002$  (gauche) et une EDO non linéaire résolu sur les  $S_i$  par le schéma de Störmer–Verlet explicite avec un pas de temps  $h = 0.025$  (droite).

l’équation caractéristique, l’erreur sur  $S_1$  (cas deux sous-domaines) à l’itération  $k + 1$  s’écrit :

$$e_{1,N}^{k+1} = \frac{(X_1^N - X_2^N)}{(X_1^N - X_1^{N-1}) - (X_2^N - X_2^{N-1})} \left( 1 - \frac{(X_1^N - X_1^{N-1})X_2^1 - (X_2^N - X_2^{N-1})X_1^1}{(X_1^N - X_1^{N-1}) - (X_2^N - X_2^{N-1})} \right) e_{1,N}^k. \tag{2}$$

Cette formule se généralise au cas  $2p$  sous-intervalles sous la forme  $\tilde{e}^{k+1} = \mathbb{P}\tilde{e}^k$  où  $\tilde{e}$  représente le vecteur erreur aux  $2p - 1$  interfaces et  $\mathbb{P}$  ne dépend pas de l’itération  $k$ .

Cette indépendance du  $\mathbb{P}$  de l’itération  $k$  permet d’accélérer la convergence du Schwarz vers les conditions aux limites exactes par la technique d’accélération de Aitken qui s’écrit  $\tilde{y}_n^\infty = (Id - \mathbb{P})^{-1}(\tilde{y}_n^{k+1} - \mathbb{P}\tilde{y}_n^k)$  (c.f. Fig. 1 gauche). Cet algorithme de Aitken–Schwarz s’applique aussi aux problèmes non-linéaires mais l’accélération n’est pas exacte et doit être ré-itérée (c.f. Fig. 1 droite).

**Remarque 2.** La construction de  $\mathbb{P}$  et l’accélération sont calculées directement sur les vecteurs erreurs aux interfaces sans passer par le calcul de la base de vecteurs propres.

**Remarque 3.** Bien que le système de cette intégration implicite soit tridiagonal par blocs, sa résolution ne permet pas d’être compétitif en terme de temps de restitution avec le schémas de Störmer–Verlet explicite.

On considère le domaine symétrisé et le schéma de Störmer–Verlet explicite [1] pour faire l’intégration en avant (indignée  $F$ ) ou rétrograde (indignée  $B$ ) jusqu’au milieu des  $S_i$  (respectivement  $\bar{S}_i$ ). L’égalité de ces solutions en  $T_{i-\frac{1}{2}} = (T_{i-1}^+ + T_i^-)/2$  permet de lier les conditions aux limites de type Dirichlet  $\alpha_i, i = 2, \dots, 2p, \alpha_1$  donné, et de type Neumann  $\gamma_i, i = 1, \dots, 2p - 1, \gamma_{2p}$  donné, comme étant le zéro d’une fonction non-linéaire  $F(\gamma_1, \alpha_2, \gamma_2, \dots, \alpha_{2p-1}, \gamma_{2p-1}, \alpha_{2p})$ . A partir des conditions aux limites  $\gamma_i$  et  $\alpha_i$  en  $T_i^+$ , l’intégration en avant jusqu’à  $T_{i+\frac{1}{2}}$  donne  $H_F^i(T_{i+\frac{1}{2}}, \gamma_i, \alpha_i)$  tandis que l’intégration rétrograde jusqu’à  $T_{i-\frac{1}{2}}$  fournit  $H_B^i(T_{i-\frac{1}{2}}, \gamma_i, \alpha_i)$ . La composante (vectorielle)  $i$  de  $F$  se calcule indépendamment des autres composantes et s’écrit :

$$F_i(\alpha_{i-1}, \gamma_{i-1}, \alpha_i, \gamma_i) = H_F^{i-1}(T_{i-1+\frac{1}{2}}, \gamma_{i-1}, \alpha_{i-1}) - H_B^i(T_{i-\frac{1}{2}}, \gamma_i, \alpha_i), \quad i = 1, \dots, 2p - 1. \tag{3}$$

Le zéro de  $F$  est obtenu par une méthode de Newton.

Pour les EDO linéaires nous pouvons encore construire un système tridiagonal par blocs liant les conditions aux limites. Sous les hypothèses du Théorème 3.1, dans la base de vecteurs propres de  $A$ , on doit résoudre le système  $\dot{y} = \lambda y, y(0) = \alpha_0, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Le système d’EDO  $\{\dot{y}_i = v_i, \dot{v}_i = \lambda^2 y_i, t \in S_i, y_i(T_{i-1}^+) = \alpha_i, v_i(T_{i-1}^+) = \gamma_i\}$ , que discrétise le schéma de Störmer–Verlet, admet comme solution continue  $(y_i(t), v_i(t))^T = \alpha_i G_F^i(t) + \gamma_i H_F^i(t)$  :

$$H_F^i(t) = \frac{1}{2|\lambda|} \begin{pmatrix} e^{|\lambda|(t-T_{i-1}^+)} - e^{-|\lambda|(t-T_{i-1}^+)} \\ e^{|\lambda|(t-T_{i-1}^+)} + e^{-|\lambda|(t-T_{i-1}^+)} \end{pmatrix}, \quad G_F^i(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{|\lambda|(t-T_{i-1}^+)} + e^{-|\lambda|(t-T_{i-1}^+)} \\ e^{|\lambda|(t-T_{i-1}^+)} - e^{-|\lambda|(t-T_{i-1}^+)} \end{pmatrix} \tag{4}$$

les conditions aux limites étant reliées par le système tridiagonal par blocs suivant :

$$G_F^{i-1}(T_{i-\frac{1}{2}})\alpha_{i-1} + H_F^{i-1}(T_{i-\frac{1}{2}})\gamma_{i-1} - G_B^i(T_{i-\frac{1}{2}})\alpha_i - H_B^i(T_{i-\frac{1}{2}})\gamma_i = 0, \quad i = 1, \dots, 2p - 1. \quad (5)$$

Les matrices  $G_F^i(T_{i-\frac{1}{2}})$ ,  $H_F^i(T_{i-\frac{1}{2}})$ ,  $G_B^{i+1}(T_{i+\frac{1}{2}})$ ,  $H_B^{i+1}(T_{i+\frac{1}{2}})$  sont construites numériquement en utilisant le schéma de Störmer–Verlet explicite et en faisant la différence de deux valeurs d'une condition limite l'autre étant fixé. L'application au problème d'oscillateur harmonique sur  $2 \cdot 10^7$  pas de temps sur  $[0, T = 40]$  donne les temps suivants : (# sous-domaines, cputime(s)) : (1, 1.57), (2, 16.45), (16, 3.95), (64, 0.55), (128, 0.3). La méthode originale de Parareal [4] avec RK2 comme intégrateur et un ratio de 1000 entre grilles fine et grossière régulières donne (128, 0.5). Pour les EDO non linéaires, faute de disposer de la technique de la variation de la constante, la méthode de Newton est appliquée. Les extensions de ce travail consistent d'une part à déterminer un critère de découpage du domaine en sous-intervalles conduisant à une linéarisation correcte du problème pour y appliquer la technique linéaire par sous-intervalles. On obtient alors un algorithme itératif de décomposition de domaine hétérogène où le système tridiagonal par blocs à chaque itération lie les conditions aux limites des problèmes linéarisés.

## Remerciements

Ce travail est supporté par l'ANR-06-TLOG-2601 PARADE et le projet CHPID du cluster ISLES de la région Rhône Alpes.

## Références

- [1] E. Hairer, Ch. Lubich, G. Wanner, Geometric Numerical Integration. Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 31, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [2] P.-L. Lions, On the Schwarz alternating method. III. A variant for nonoverlapping subdomains, in: Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, Houston, TX, 1989, SIAM, Philadelphia, PA, 1990, pp. 202–223.
- [3] M. Garbey, D. Tromeur-Dervout, On some Aitken like acceleration of the Schwarz method, in: LMS Workshop on Domain Decomposition Methods in Fluid Mechanics, London, 2001, Internat. J. Numer. Methods Fluids 40 (12) (2002) 1493–1513.
- [4] J.-L. Lions, Y. Maday, G. Turinici, Résolution d'EDP par un schéma en temps « pararéel », C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 332 (7) (2001) 661–668.