



ELSEVIER

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse harmonique

Sur le comportement asymptotique des puissances de convolution et du noyau de la chaleur sur les groupes de Lie semisimples

On the asymptotic behaviour of convolution powers and heat kernels on semisimple Lie groups

Noël Lohoué^a, Georges Alexopoulos^b

^a Université de Paris-Sud, mathématiques, bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France

^b Université de Crète, département de mathématiques, avenue Knossos, 71409 Heraklion, Grèce

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 18 août 2011

Accepté après révision le 5 mars 2012

Disponible sur Internet le 24 mars 2012

Présenté par Jean-Michel Bismut

RÉSUMÉ

On donne un développement asymptotique pour la valeur centrale des puissances de convolution et du noyau de la chaleur sur les groupes de Lie semisimples.

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

We give an asymptotic expansion for the central value of convolution powers and heat kernels on semisimple Lie groups.

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Soit G un groupe de Lie connexe semisimple, non-compact et de centre fini et soient \mathfrak{g} l'algèbre de Lie, e son élément neutre et dx une mesure de Haar sur G .

On fixe une décomposition de Iwasawa $G = NAK$. K est un sous-groupe compact maximal de G , $A \cong \mathbb{R}^d$ est abélien et N est nilpotent et simplement connexe.

Notons \mathfrak{k} , \mathfrak{a} et \mathfrak{n} les algèbres de Lie de K , A et N , respectivement. On identifie A et \mathfrak{a} avec \mathbb{R}^d .

Soit \mathfrak{a}^+ une chambre de Weyl positive et soient Σ l'ensemble des racines restreintes positives associées à \mathfrak{a}^+ et Σ_0 celles qui sont indivisibles.

Pour toute racine $\zeta \in \Sigma$, nous notons m_ζ sa multiplicité et \mathfrak{g}_ζ le sous-espace radiciel correspondant. Notons que $\mathfrak{n} = \sum_{\zeta \in \Sigma} \mathfrak{g}_\zeta$.

1. Densités

Soit ϕ une densité sur G , c'est à dire une fonction $\phi \geq 0$ avec $\int \phi(x) dx = 1$. ϕ n'est pas nécessairement symétrique.

Nous supposons, pour simplifier, que $\phi(e) > 0$ et que $\phi \in C_0^\infty(G)$.

Nous notons $\phi^{*k} = \phi * \phi * \dots * \phi$ la k -ième puissance de convolution de ϕ .

Le premier résultat dont on veut esquisser la preuve est le suivant :

Adresse e-mail : Noel.Lohoue@math.u-psud.fr (N. Lohoué).

Théorème 1. Soient G et ϕ comme ci-dessus. Alors il existe $\mu > 0$, $c_0 > 0$ et $c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\phi^{*k}(e) = k^{-(d+2|\Sigma_0|)/2} e^{-\mu k} (c_0 + k^{-1}c_1 + \dots + k^{-n_0}c_{n_0} + O(k^{-(n_0+1)})), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

2. Sous-laplaciens

Soient X_0, X_1, \dots, X_p des champs de vecteurs invariants à gauche sur G et supposons que les champs X_1, \dots, X_p satisfont la condition de Hörmander, c. à d. ils engendrent, avec leurs crochets successifs $[X_{i_1}, [X_{i_2}, [\dots, X_{i_k}]\dots]]$, l'espace tangent $T_x G$ en tout point $x \in G$.

Considérons le sous-laplacien

$$L = -(X_1^2 + \dots + X_p^2) + X_0$$

et notons $P_t(x, y)$ le noyau de la chaleur associé (c. à d. la solution fondamentale de l'équation $((\partial/\partial t) + L)u = 0$). Voici le second énoncé :

Théorème 2. Soient G , L et $P_t(x, y)$ comme ci-dessus. Alors, il existe $\mu > 0$, $c_0 > 0$ et $c_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$

$$P_t(e, e) = t^{-(d+2|\Sigma_0|)/2} e^{-\mu t} (c_0 + t^{-1}c_1 + \dots + t^{-n_0}c_{n_0} + O(t^{-(n_0+1)})), \quad t \geq 1. \tag{2}$$

On indique ci-dessous les grandes lignes de la démonstration du Théorème 1. Le Théorème 2 se démontre de manière analogue.

3. Preuve du Théorème 1

D'abord, notons que si $\Phi : L^2 \rightarrow L^2$ est l'opérateur défini par $\Phi(f)(x) = \int f(xy)\phi(y) dy$, alors son rayon spectrale $r(\Phi)$ est donné par $r(\Phi) = e^{-\mu}$, où $\mu > 0$.

On note \hat{G} l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de G et \hat{G}_{disc} la série discrète de G .

On sait que si $\pi \in \hat{G}$, alors sa restriction à K se décompose en somme direct $\pi|_K = \bigoplus_{\tau \in \hat{K}} n_\tau \tau$, où les multiplicités n_τ satisfont à $n_\tau \leq \dim(\tau)$.

On en déduit, avec un argument classique utilisant l'opérateur Casimir sur K , qu'il existe $c = c(\phi)$ tel que

$$|\text{Tr}(\pi(\phi))| < c, \quad \pi \in \hat{G}. \tag{3}$$

Supposons pour l'instant que $\hat{G}_{disc} \neq \emptyset$ et notons ses éléments η_λ , où λ est le paramètre de Harish-Chandra [2,3,8,10].

Alors, un argument similaire au précédent, montre que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $c = c(\phi, n_0)$ tel que

$$\|\eta_\lambda(\phi)\| \leq \frac{c}{(1 + |\lambda|)^{n_0}}, \quad \eta_\lambda \in \hat{G}_{disc}.$$

D'autre part la positivité de ϕ entraîne qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $c > 0$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\|\eta_\lambda(\phi^{*k})\| \leq c e^{-(\mu+\varepsilon)k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On en déduit donc, que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $\varepsilon > 0$ et $c = c(\phi, n_0)$ tels que

$$|\text{Tr}(\eta_\lambda(\phi^{*k}))| \leq \frac{c}{(1 + |\lambda|)^{n_0}} e^{-(\mu+\varepsilon)k}, \quad k \in \mathbb{N}, \eta_\lambda \in \hat{G}_{disc}.$$

Revenons maintenant au cas des séries principales.

Plus précisément, soit θ l'involution de Cartan de G qui fixe K et soient H un sous-groupe de Cartan, θ -invariant et \mathfrak{h} son algèbre de Lie.

Alors $H = A_{\mathfrak{h}} \times T$, où $T = H \cap K$, $A_{\mathfrak{h}} = \exp(\mathfrak{a}_{\mathfrak{h}})$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{h}} = \{\xi \in \mathfrak{h} : \theta(\xi) = -\xi\}$. On suppose que $\mathfrak{a}_{\mathfrak{h}} \subseteq \mathfrak{a}$.

Le centralisateur $Z_G(A_{\mathfrak{h}})$ de $A_{\mathfrak{h}}$ dans G est θ -invariant et se décompose comme $Z_G(A_{\mathfrak{h}}) = A_{\mathfrak{h}} \times M$. M est un groupe réductif au sens de Harish-Chandra. Il est compact si et seulement si $\mathfrak{a}_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{a}$.

Soit $\Delta_{\mathfrak{a}}$ le système des racines du couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_{\mathfrak{h}})$ et notons \mathfrak{g}_ζ l'espace propre radiciel correspondant à $\zeta \in \Delta_{\mathfrak{a}}$. Soit $\Delta_{\mathfrak{a}}^+$ un système de racines positives de $\Delta_{\mathfrak{a}}$ et soient $\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}} = \sum_{\zeta \in \Delta_{\mathfrak{a}}^+} \mathfrak{g}_\zeta$ et $N_{\mathfrak{h}} = \exp_G(\mathfrak{n}_{\mathfrak{h}})$. Alors $P_{\mathfrak{h}} = N_{\mathfrak{h}} A_{\mathfrak{h}} M$ est un sous-groupe parabolique cuspidal de G .

On note aussi \hat{M}_{disc} la série discrète de M (cf. [10]). A tout élément de $\eta \in \hat{M}_{disc}$ correspond un paramètre λ de Harish-Chandra (cf. [4,9,10]). On écrit donc η_λ , au lieu de η , pour indiquer ce paramètre λ .

Si $\xi \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{h}}^*$, alors $\eta_{\xi, \lambda} = e^{i\xi} \otimes \eta_\lambda$ est une représentation unitaire irréductible de $A_{\mathfrak{h}} M$. On pose $\eta_{\xi, \lambda}(xg) = \eta_{\xi, \lambda}(g)$, $x \in N_{\mathfrak{h}}$, $g \in A_{\mathfrak{h}} M$ et ainsi, on peut supposer que $\eta_{\xi, \lambda}$ est définie sur $P_{\mathfrak{h}}$. On note $\pi_{\xi, \lambda}$ la représentation induite $\pi_{\xi, \lambda} = \text{Ind}_{P_{\mathfrak{h}}}^G \eta_{\xi, \lambda}$.

Si M est compact et η_λ triviale, alors on écrit simplement π_ξ au lieu de $\pi_{\xi, 0}$.

Maintenant, en utilisant le principe de majoration (cf. [5]) on peut montrer que, si η_λ est non-triviale, ou si $\xi \neq 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $c > 0$ tels que

$$\|\pi_{\xi,\lambda}(\phi^{*k})\| < ce^{-(\mu+\varepsilon)k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

D'autre part, on peut montrer que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $c = c(\phi, n_0)$ tel que, pour tout $\xi \in \mathfrak{a}_\mathfrak{h}^*$ et $\eta_\lambda \in \hat{M}_{\text{disc}}$

$$\|\pi_{\xi,\lambda}(\phi)\| \leq \frac{c}{(1 + |\xi| + |\lambda|)^{n_0}}. \tag{5}$$

L'estimation suivante est une conséquence de (3), (4), (5).

Proposition 3. Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\delta > 0$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ et $c = c(\phi, n_0, \delta)$ tels que, pour η_λ non-triviale, ou pour $|\xi| > \delta$,

$$|\text{Tr}(\pi_{\xi,\lambda}(\phi^{*k}))| \leq \frac{c}{(1 + |\xi| + |\lambda|)^{n_0}} e^{-(\mu+\varepsilon)k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

La Proposition ci-dessus et la formule de Plancherel de Harish-Chandra (cf. [4,9,10]) entraînent que pour tout $\delta > 0$, il existe $\varepsilon > 0$, tel que

$$\phi^{*k}(e) = c \int_{|\xi| \leq \delta} \text{Tr}(\pi_\xi(\phi^{*k})) \frac{d\xi}{|\mathfrak{c}(\xi)|^2} + O(e^{-(\mu+\varepsilon)k}). \tag{7}$$

Maintenant (1) découle de (7) ci-dessus, en raisonnant comme dans [1,6,7].

Références

- [1] Ph. Bougerol, Théorème central limite local sur certains groupes de Lie, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e sér. 14 (1981) 403–432.
- [2] Harish-Chandra, Discrete series for semisimple Lie groups I, Acta Math. 113 (1965) 241–318.
- [3] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups. I. The theory of the constant term, J. Funct. Anal. 19 (1975) 104–204.
- [4] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups. III. The Maass–Selberg relations and the Plancherel formula, Ann. of Math. 104 (1976) 117–201.
- [5] N. Lohoué, Estimations L^p des coefficients de représentation et opérateurs de convolution, Adv. Math. 38 (2) (1980) 178–221.
- [6] N. Lohoué, Inégalités de Sobolev pour les sous laplaciens de certains groupes unimodulaires, Geom. Funct. Anal. 2 (4) (1992) 394–420.
- [7] N. Lohoué, G. Alexopoulos, On the asymptotic behavior of convolution powers and heat kernels on Lie groups, in: Discrete Geometric Analysis, in: Contemp. Math., vol. 347, Amer. Math. Soc., 2004, pp. 1–27.
- [8] N.R. Wallach, Real Reductive Groups I, Academic Press, 1988.
- [9] N.R. Wallach, Real Reductive Groups II, Academic Press, 1992.
- [10] J.A. Wolf, Foundations of representation theory for semisimple Lie groups, in: J.A. Wolf, M. Cahen, M. De Wilde (Eds.), Harmonic Analysis and Representations of Semisimple Lie Groups, Lectures Given at the NATO Advanced Study Institute Held in Liège, September 5–17, 1977, D. Reidel Publishing Co., 1980, pp. 131–256.