



ELSEVIER

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Géométrie algébrique/Systèmes dynamiques

Courbes algébriques ordinaires et tissus associés

Ordinary algebraic curves and associated webs

Laurent Gruson^a, Youssef Hantout^b, Daniel Lehmann^c^a Département de mathématiques, université de Versailles, 45, avenue des Etats Unis, 78035 Versailles, France^b Département de mathématiques, université de Lille 1, 59650 Villeneuve d'Ascq cedex, France^c 4, rue Becagrün, 30980 Saint Dionisy, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 16 février 2012

Accepté après révision le 9 mai 2012

Disponible sur Internet le 29 mai 2012

Présenté par Claire Voisin

R É S U M É

Soit Γ une courbe algébrique complexe de degré d , intègre et non-dégénérée, dans l'espace projectif complexe \mathbb{P}_n ($n \geq 3, d \geq n$). Notons $c(n, h)$ la dimension $\binom{n-1+h}{n-1}$ de l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré h en n variables, et k_0 l'entier ≥ 1 tel que $c(n, k_0) \leq d < c(n, k_0 + 1)$. Nous appellerons *ordinaires* les courbes Γ ayant la propriété suivante : l'ensemble des hypersurfaces algébriques d'un hyperplan « générique » H de \mathbb{P}_n , qui sont de degré h et contiennent la section hyperplane $\Gamma \cap H$, est vide si $h \leq k_0$, et est un espace projectif de dimension égale à $c(n, h) - d - 1$ si $h > k_0$. Pour $k_0 \geq 2$, ces courbes sont aussi celles dont le tissu associé dans \mathbb{P}_n est ordinaire, au sens de Cavalier et Lehmann (2012) [1]. Leur genre arithmétique est majoré par le nombre $\pi'(n, d) = \sum_{h=1}^{k_0} (d - c(n, h))$ ($= k_0 d - c(n + 1, k_0) + 1$), et cette borne est atteinte pour celles de ces courbes ordinaires qui sont arithmétiquement de Cohen–Macaulay. Pour $n = 3$, et tout degré $d \geq 3$, la famille des courbes ordinaires de degré d qui sont arithmétiquement de Cohen–Macaulay est non vide et constitue une composante irréductible du schéma de Hilbert $H_{d, \pi'(3, d)}$. Par contraste, les courbes intersections complètes de $n - 1$ hypersurfaces algébriques ne sont jamais ordinaires si $k_0 \geq 2$.

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

Let Γ be a complex algebraic curve of degree d , non-degenerate, reduced, and irreducible, in the complex projective space \mathbb{P}_n ($n \geq 3, d \geq n$). Denoting by $c(n, h)$ the dimension of the vector space of homogeneous polynomials of degree h with respect to n variables, let k_0 be the integer (≥ 1) such that $c(n, k_0) \leq d < c(n, k_0 + 1)$. The curve Γ is said to be *ordinary* if it has the following property: the set of algebraic hypersurfaces of a “generic” hyperplane H of \mathbb{P}_n which have degree h and contain the hyperplane section $\Gamma \cap H$, is empty if $h \leq k_0$, and is a projective space of dimension $c(n, h) - d - 1$ if $h > k_0$. Equivalently when $k_0 \geq 2$, the associated web in \mathbb{P}_n of such a curve is “ordinary” in the sense of Cavalier and Lehmann (2012) [1]. The arithmetic genus of an ordinary curve is upper-bounded by the number $\pi'(n, d) = \sum_{h=1}^{k_0} (d - c(n, h))$ ($= k_0 d - c(n + 1, k_0) + 1$), and this bound is reached for these ordinary curves which are arithmetically Cohen–Macaulay. For $n = 3$ and any $d \geq 3$, the family of the ordinary curves of degree d which are arithmetically Cohen–Macaulay is non-empty, and is an irreducible component of the Hilbert scheme $H_{d, \pi'(3, d)}$.

Adresses e-mail : laurent.gruson@math.uvsq.fr (L. Gruson), hantout@math.univ-lille1.fr (Y. Hantout), lehmann@math.univ-montp2.fr (D. Lehmann).

By contrast, the complete intersection of $n - 1$ algebraic hypersurfaces is never ordinary if $k_0 \geq 2$.

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let A be a set of d distinct points in a hyperplane H of \mathbb{P}_n . The homogeneous polynomials of degree h on H vanishing on A are solutions of a linear homogeneous system of d equations with $c(n, h)$ unknown (where $c(n, h) = \frac{(n+h-1)!}{(n-1)!h!}$). Denote by $\lambda_h(A)$ the rank of this system: it is at most equal to the number $\lambda_h^0(n, d) = \min(d, c(n, h))$.

An algebraic curve Γ in \mathbb{P}_n , non-degenerate, reduced, and irreducible, is said to be *ordinary* if it has a hyperplane section $A = \Gamma \cap H$ such that, for any integer $h \geq 1$, $\lambda_h(\Gamma \cap H) = \lambda_h^0(n, d)$. (For an ordinary curve, the set of such hyperplanes H is then everywhere dense in the dual projective space.)

Let k_0 be the integer such that $c(n, k_0) \leq d < c(n, k_0 + 1)$.

Set $\pi'(n, d) = \sum_{h \geq 1} ((d - \lambda_h^0(n, d)) = \sum_{h=1}^{k_0} (d - c(n, h))$. From [6], we deduce:

Theorem 1.

- (i) The arithmetic genus $g_a(\Gamma)$ of an algebraic curve of degree d in \mathbb{P}_n which is arithmetically Cohen–Macaulay (shortly *acm*) is at least equal to the integer $\pi'(n, d)$, and equal iff the curve is ordinary.
- (ii) The arithmetic genus $g_a(\Gamma)$ of an ordinary algebraic curve of degree d in \mathbb{P}_n is at most equal to the integer $\pi'(n, d)$, and equal iff the curve is *acm*.

Theorem 2. If $k_0 \geq 2$, the ordinary algebraic curves are those whose associated web in the dual projective space is ordinary, in the sense of [1].

Denote by (t, s) (resp. (X_0, \dots, X_n)) homogeneous coordinates in \mathbb{P}_1 (resp. \mathbb{P}_n), and let Γ be the rational curve $\pi : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_n$ of degree d given by $X_i(t, s) = t^{b_i} s^{d-b_i}$ for $0 \leq i \leq n$, where the $(b_i)_{i \geq 1}$'s are integers with $\gcd = 1$, such that $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_i < \dots < b_{n-1} < b_n = d$.

Theorem 3. Assume that a family of $n - 1$ integers $m_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq n - 1$) satisfy to the following condition: among the $c(n, k_0 + 1)$ integers $\sum_{i=1}^{n-1} m_i b_i$ such that $0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} m_i \leq k_0 + 1$, d are distinct modulo d , and among them all those such that $\sum_{i=1}^{n-1} m_i \leq k_0$. Then the hyperplane of equation $X_0 = X_n$ is ordinary relatively to the curve Γ above.

Theorem 4. For any $d \geq 3$, the set of ordinary *acm* curves in \mathbb{P}_3 is non-empty and contains smooth curves. It is an irreducible component of the Hilbert scheme $H_{d, \pi'(3, d)}$.

Theorem 5. The complete intersection of $n - 1$ algebraic hypersurfaces in \mathbb{P}_n is never ordinary, except the complete intersection of two quadrics in \mathbb{P}_3 .

Theorem 6. The arithmetic genus of the complete intersection of $n - 1$ algebraic hypersurfaces in \mathbb{P}_n is strictly bigger than $\pi'(n, d)$, except for the complete intersection of two quadrics in \mathbb{P}_3 (whose arithmetic genus is $\pi'(3, 4) = 1$).

1. Genre arithmétique des courbes ordinaires

Soit H un hyperplan de l'espace projectif complexe \mathbb{P}_n de dimension n (≥ 3), et $A = \{m_1, \dots, m_d\}$ un ensemble de d points distincts dans H ($d \geq n$). Notons $c(n, h)$ la dimension $\frac{(n+h-1)!}{(n-1)!h!}$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_h[p_1, \dots, p_n]$ des polynômes homogènes de degré h à coefficients complexes en n variables, (p_1, \dots, p_n) désignant un système de coordonnées homogènes sur H , et k_0 l'entier, supposé ≥ 1 , tel que

$$c(n, k_0) \leq d < c(n, k_0 + 1).$$

Si A est arbitraire, la dimension du sous-espace vectoriel $I_A(h)$ de $\mathbb{C}_h[p_1, \dots, p_n]$ formé des polynômes qui s'annulent sur A , est « en général » égale à 0 si $h \leq k_0$, et à $c(n, h) - d$ si $h > k_0$. Lorsqu'il en est ainsi, on dira que l'ensemble A est *ordinaire*.¹ Il revient au même de dire que la restriction $H^0 \mathcal{O}_H(h) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_A(h)$ est de rang maximum.

¹ De plus, il suffit que $\dim I_A(k_0 + 1) = c(n, k_0 + 1) - d$, pour que $\dim I_A(h) = c(n, h) - d$ pour tout $h \geq k_0 + 1$.

Définition 1. Une courbe algébrique complexe Γ de degré d dans \mathbb{P}_n ($n \geq 3, d \geq n$), intègre et non-dégénérée,² sera dite *ordinaire*, si elle admet une section hyperplane $A = \Gamma \cap H$ ordinaire au sens précédent.

Si Γ est une courbe ordinaire dans \mathbb{P}_n , les hyperplans H tels que la section hyperplane $\Gamma \cap H$ soit ordinaire forment un ouvert partout dense de l'espace projectif dual \mathbb{P}_n . Ces hyperplans seront dits *génériques* pour la courbe Γ .

Théorème 1.

(i) Le genre arithmétique $g_a(\Gamma)$ d'une courbe algébrique ordinaire de degré d dans \mathbb{P}_n est majoré³ par le nombre⁴

$$\pi'(n, d) = \sum_{h=1}^{k_0} (d - c(n, h)) \quad (= k_0 d - c(n + 1, k_0) + 1).$$

(ii) Les courbes ordinaires Γ de genre arithmétique maximal $\pi'(n, d)$ sont celles ayant la propriété suivante : les hypersurfaces S' d'un hyperplan H générique pour Γ qui contiennent la section hyperplane $\Gamma \cap H$, peuvent toutes s'obtenir comme intersection $S' = S \cap H$ avec H d'une hypersurface S de \mathbb{P}_n contenant Γ . Ce sont les courbes ordinaires qui sont arithmétiquement de Cohen-Macaulay.

Ce théorème résulte immédiatement de la remarque 3-1-1 et du corollaire 3-2 de [6], lorsque $\Gamma \cap H$ est ordinaire.

2. Lien avec la géométrie des tissus

Rappelons que les d points (supposés distincts) d'une section hyperplane $\Gamma \cap H$ d'une courbe algébrique Γ de degré d dans \mathbb{P}_n peuvent s'interpréter comme d hyperplans de l'espace projectif dual \mathbb{P}_n , passant par un point H de \mathbb{P}_n ; ce sont les feuilles d'un d -tissu linéaire de codimension un dans \mathbb{P}_n : on dit que c'est le *tissu associé* à Γ , et les tissus définis par ce procédé sont dits *algébriques*.

Etant donné un d -tissu holomorphe de codimension un sur une variété complexe U de dimension n , ($d > n$), notons $R_h(x)$ ($h \geq 0$) l'espace des relations abéliennes formelles à l'ordre h en un point $x \in U$. Pour $h \geq 2$, les éléments de $R_{h-1}(x)$ au dessus d'un élément donné a_0 de $R_{h-2}(x)$ s'appliquent bijectivement sur les solutions d'un système linéaire $\Sigma_h(a_0)$ de $c(n, h)$ équations à d inconnues, dont la partie homogène ne dépend que de $x \in U$, et pas de a_0 .

Définissant localement le d -tissu par les 1-formes $\sum_{\lambda} p_{i\lambda}(x_1, \dots, x_n) dx_{\lambda}$, supposées intégrables, nous avons vu dans [1] que les coefficients $C_{iL}^{(h)}(x)$ de la matrice $P_h(x)$ de taille $d \times c(n, h)$ représentant $\Sigma_{h-2}(a_0)$ pour $h \geq 2$ sont : $C_{iL}^{(h)}(x) = \prod_{\lambda=1}^n (p_{i\lambda}(x))^{\ell_{\lambda}}$, où $1 \leq i \leq d$, et $L = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$. Nous avons alors appelé *ordinaires* (ou *réguliers* dans [2]) les tissus pour lesquels, en dehors d'un ensemble singulier Σ supposé vide ou de dimension complexe au plus $n - 1$, la matrice P_h était de rang maximum $\inf(c(n, h), d)$ (elle est d'ailleurs automatiquement de rang d pour $h > k_0 + 1$, dès l'instant qu'elle l'est pour $h = k_0 + 1$).

Or, pour le tissu algébrique associé à une courbe Γ dans \mathbb{P}_n , et pour $x = H$, la matrice $P_h(H)$ est précisément la transposée de celle du système linéaire obtenu en écrivant qu'une hypersurface de H , de degré h passe par les d points de $\Gamma \cap H$. On en déduit :

Théorème 2. Si $k_0 \geq 2$, les courbes ordinaires sont aussi celles dont le tissu associé est ordinaire.

Lorsque $k_0 \geq 2$, le rang des tissus ordinaires est majoré par $\pi'(n, d)$ d'après [1], et la partie (i) du théorème 1 ci-dessus découle aussi du théorème d'Abel⁵ selon lequel le rang du tissu associé à une courbe irréductible non-dégénérée est au moins égal au genre arithmétique de cette courbe.

Remarque. Pour un d -tissu ordinaire, et lorsque d était égal à $c(n, k_0)$, ($k_0 \geq 2$), nous avons construit dans [1] un fibré vectoriel holomorphe de rang $\pi'(n, d)$ au dessus du complémentaire de Σ , ainsi qu'une connexion holomorphe sur ce fibré pour laquelle les sections à dérivée covariante nulle s'identifient aux relations abéliennes du tissu. Si ce d -tissu est algébrique, la non-nullité de la courbure de cette connexion, que nous espérons savoir bientôt calculer explicitement sur ordinateur, représente donc une obstruction à ce que la courbe ayant défini ce tissu soit arithmétiquement de Cohen-Macaulay.

² Une courbe de \mathbb{P}_n est dite *intègre* si elle est réduite et irréductible, *non-dégénérée* si elle n'est incluse dans aucun sous-espace projectif strict de \mathbb{P}_n .

³ Pour $n \geq 3$, l'entier $\pi'(n, d)$ est strictement plus petit que la borne de Castelnuovo

$$\pi(n, d) = \sum_{h \geq 1} (d - h(n - 1) - 1)^+, \quad \text{où } a^+ = \sup(a, 0).$$

⁴ Attention : pour $k_0 = 1$, $\pi'(n, d) = d - n$, et non 0 comme dans [1].

⁵ Énoncé après dualité, et dans un autre langage.

3. Exemples de courbes ordinaires rationnelles

Notons (t, s) (resp. (X_0, \dots, X_n)) un système de coordonnées homogènes dans \mathbb{P}_1 (resp. dans \mathbb{P}_n), et soit Γ la courbe rationnelle $\pi : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_n$ de degré d définie par $X_i(t, s) = t^{b_i} s^{d-b_i}$ pour $0 \leq i \leq n$, où les $(b_i)_{i \geq 1}$ sont des entiers premiers entre eux tels que $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_i < \dots < b_{n-1} < b_n = d$. Les situations (b_1, \dots, b_{n-1}, d) et $(d - b_{n-1}, \dots, d - b_1, d)$ sont isomorphes. Pour $n = 3$, par exemple, on peut donc toujours supposer $b_1 + b_2 \geq d$.

Théorème 3. *Considérons les familles de $n - 1$ entiers $m_i \geq 0$ ($1 \leq i \leq n - 1$). Il suffit alors que, parmi les $c(n, k_0 + 1)$ entiers $\sum_{i=1}^{n-1} m_i b_i$ tels que $0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} m_i \leq k_0 + 1$, il y en ait d qui soient distincts modulo d parmi lesquels tous ceux (en nombre $c(n, k_0)$) tels que $\sum_{i=1}^{n-1} m_i \leq k_0$, pour que l'hyperplan d'équation $X_0 = X_n$ soit ordinaire relativement à la courbe Γ ci-dessus.*

Par exemple, pour $n = 3$ et $k_0 = 1$ (i.e. $d = 3, 4, 5$), la condition précédente est toujours vérifiée.

Pour $k_0 = 2$ (i.e. $d = 6, 7, 8, 9$) la condition précédente s'écrit : parmi les 10 entiers

$$(0, b_1, b_2, 2b_1, b_1 + b_2, 2b_2, 3b_1, 2b_1 + b_2, b_1 + 2b_2, 3b_2),$$

d sont distincts modulo d , parmi lesquels les 6 premiers. C'est ce qui se passe avec⁶ :

$$\begin{aligned} (b_1, b_2, d) &= (4, 5, 7), & g_a &= 5 = \pi'(3, 7) \\ &= (2, 6, 7), & &= 3 < \pi'(3, 7) \\ &= (5, 7, 8), & &= 7 = \pi'(3, 8) \\ &= (2, 7, 8), & &= 3 < \pi'(3, 8). \end{aligned}$$

Dans le cas (ii) ci-dessus où g_a n'est pas maximal, on observe que la courbe d'équation $(X_2)^3 - (X_1)^2 X_3 = 0$ dans le plan H d'équation $X_0 = X_3$ contient $\Gamma \cap H$, mais n'est l'intersection avec H d'aucune hypersurface algébrique contenant Γ , et de même pour la courbe d'équation $(X_1)^3 - (X_2)^2 X_3 = 0$ dans le même plan H en ce qui concerne l'exemple (iv). Les cas (i) et (iii), au contraire, où g_a est maximal, sont des courbes arithmétiquement de Cohen–Macaulay, pour lesquelles ce phénomène ne peut se produire ; nous reverrons ces exemples (i) et (iii) dans la section suivante.

Voici encore deux exemples pour $n = 4$, $k_0 = 2$: $(b_1, b_2, b_3, d) = (9, 11, 14, 15)$ de genre $g_a = 15$, et $(b_1, b_2, b_3, d) = (8, 12, 13, 15)$ de genre maximal $g_a = 16 (= \pi'(4, 15))$.

La démonstration du Théorème 3 consiste à observer que, sous les hypothèses du théorème, la matrice du système linéaire homogène dont les inconnues sont les coefficients des courbes de degré h passant par les d points de $\Gamma \cap H$, admet toujours un mineur de taille maximum qui est un déterminant de Vandermonde (associé aux racines d -ièmes de l'unité), donc non-nul.

4. Courbes ordinaires en dimension trois, arithmétiquement de Cohen–Macaulay

Théorème 4. *Pour tout entier d ($d \geq 3$), la famille des courbes ordinaires de degré d dans \mathbb{P}_3 , qui sont arithmétiquement de Cohen–Macaulay, est non-vide et constitue une composante irréductible du schéma de Hilbert $H_{d, \pi'(3, d)}$.*

Voici un exemple explicite de telles courbes : on se donne un opérateur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}$ -linéaire M (dont tous les coefficients sont homogènes de degré 1 ou 2)

$$\begin{aligned} (t - r - 1)\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-(k_0 + 2)) \oplus r\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-(k_0 + 3)) &\xrightarrow{M} t\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-(k_0 + 1)) \quad \text{si } t \geq r + 1, \\ r\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-(k_0 + 3)) &\xrightarrow{M} t\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-(k_0 + 1)) \oplus (r + 1 - t)\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-(k_0 + 2)) \quad \text{si } t \leq r + 1 \end{aligned}$$

où l'on a posé $r = d - c(3, k_0)$, et $t = c(3, k_0 + 1) - d$, ($r + t = k_0 + 2$). On définit alors une courbe par son idéal, dont un système de générateurs est donné par les mineurs de taille maximale de M .

Il est en outre possible de choisir M pour que la courbe soit lisse.

Le principe de la démonstration consiste à d'abord montrer que toute courbe intègre Γ dans \mathbb{P}_3 qui est arithmétiquement de Cohen–Macaulay a un idéal \mathcal{I}_Γ qui admet, pour une certaine valeur des entiers positifs k, a_i, b_j ($a_i \leq b_j$), une résolution de longueur 1 de la forme

$$0 \rightarrow \bigoplus_{1 \leq j \leq k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-b_j) \xrightarrow{M'} \bigoplus_{0 \leq i \leq k} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(-a_i) \xrightarrow{\mu} \mathcal{I}_\Gamma \rightarrow 0,$$

⁶ Le rapporteur conjecture que, pour $n = 3$, les seules possibilités supplémentaires telles que $b_1 + b_2 \geq d$, sont $(4, 6, 7)$ (de genre maximal 5) et $(5, 6, 8)$ (de genre non maximal 6). Il a vérifié cette conjecture par ordinateur pour $d \leq 100$.

l'application μ étant définie par les mineurs de taille maximale de la matrice M' dont les coefficients f_{ij} sont des polynômes homogènes de degrés respectifs $b_j - a_i$. Elle admet donc $k + 1$ équations $F_i = 0$ (F_i , de degré a_i , désignant le mineur obtenu en supprimant la i -ième ligne de M'), reliées par k relations linéaires R_j (de degré b_j , données par les colonnes de M' , et qui sont linéairement indépendantes puisque la résolution est de longueur 1). Faisant la convention $c(n, i) = 0$ si $i < 0$, la fonction de Hilbert $H_\Gamma(h)$ de la courbe est donc égale à $c(4, h) - \sum_{0 \leq i \leq k} c(4, h - a_i) + \sum_{1 \leq j \leq k} c(4, h - b_j)$ d'où les relations suivantes, par identification pour h suffisamment grand avec le polynôme de Hilbert $hd - g_a + 1$ d'une courbe de degré d :

$$\sum_j b_j - \sum_i a_i = 0, \quad \sum_j (b_j)^2 - \sum_i (a_i)^2 = 2d, \quad \text{et} \quad \sum_j (b_j)^3 - \sum_i (a_i)^3 = 6(g_a - 1 + 2d).$$

Puisque la courbe est arithmétiquement de Cohen–Macaulay, elle admet d'après [6] des sections planes $A = \Gamma \cap H$ dont la fonction de Hilbert $H_A(h)$ est obtenue par l'opérateur différence $H_A = \partial H_\Gamma$, soit :

$$H_A(h) = c(3, h) - \sum_{0 \leq i \leq k} c(3, h - a_i) + \sum_{1 \leq j \leq k} c(3, h - b_j)$$

puisque $\partial c(4, h) = c(3, h)$.

Dire que A est ordinaire, c'est-à-dire que $H_A(h) = c(3, h)$ (resp. d) pour $h \leq k_0$ (resp. $h > k_0$), équivaut à ce que les suites (a_i) et (b_j) soient celles définissant la source et le but de l'opérateur M de l'énoncé, à prolongation près $(a_i) \cup u$ et $(b_j) \cup u$ par une même suite finie u : ceci prouve déjà que les courbes qui y sont définies conviennent ; et elles sont lisses pour presque tout M , d'après [4].

Toutes ces suites $(a_i) \cup u$ et $(b_j) \cup u$ déterminent le même caractère numérique (cf. définition dans [5]), à savoir $(t - 1)$ fois $(k_0 + 1)$ suivi de r fois $(k_0 + 2)$, et ce sont les seules. Comme celui-ci est sans lacune, il caractérise entièrement, d'après [5] (théorèmes 2-5 et proposition 2-10), une composante irréductible du schéma de Hilbert $H_{d, \pi'(3, d)}$.

Par exemple, les cas $(b_1, b_2, d) = (4, 5, 7)$ ou $(5, 7, 8)$ de courbes rationnelles (non-lisses) dans \mathbb{P}_3 vues dans la section précédente, correspondent respectivement aux opérateurs

$$\begin{pmatrix} X_3 & (X_2)^2 \\ X_1 & X_0 X_3 \\ X_2 & (X_1)^2 \end{pmatrix} : \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-4) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-5) \rightarrow 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-3), \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} (X_3)^2 & (X_2)^2 \\ (X_1)^2 & X_0 X_3 \\ X_2 & X_1 \end{pmatrix} : 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-5) \rightarrow 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-4).$$

Remarque.⁷ Notons $\Gamma(k_0, r, t, M)$ la courbe définie dans l'énoncé, et S_i , ($0 \leq i \leq k$), la surface dont l'équation s'obtient en annulant le i -ème cofacteur de M (omettant la i -ème ligne). Notons N la matrice transposée de celle obtenue à partir de M en en supprimant deux lignes. De la proposition 21-24 de [3], résulte :

- si $0 < r \leq t - 1$, les deux courbes $\Gamma(k_0, r, t, M)$ et $\Gamma(k_0 - 2, t - 2, r, N)$ sont reliées par deux surfaces de même degré $k_0 + 1$ (i.e. leur réunion est l'intersection complète de ces deux surfaces),
- si $r = 0$, $\Gamma(k_0 - 1, 0, k_0 + 1, N)$ et $\Gamma(k_0, 0, k_0 + 2, M)$ sont reliées par deux surfaces de degré $k_0 + 1$,
- si $r \geq t - 1$, $\Gamma(k_0 - 1, t - 1, r, N)$ et $\Gamma(k_0, r, t, M)$ sont reliées par deux surfaces de degrés respectifs $k_0 + 1$ et $k_0 + 2$.

5. Contre-exemples : les intersections complètes

Théorème 5. Pour $k_0 \geq 2$, les courbes algébriques $\Gamma = \bigcap_{i=1}^{n-1} S_i$ dans \mathbb{P}_n , qui sont intersection complète de $n - 1$ hypersurfaces algébriques S_i ($n \geq 3$), ne sont jamais ordinaires.

Si Γ était ordinaire, les degrés des hypersurfaces S_i seraient tous $\geq k_0 + 1$, ce qui impliquerait l'inégalité $(k_0 + 1)^{n-1} < c(n, k_0 + 1)$. On montre que celle-ci n'est pas vérifiée, sauf dans le cas des intersections complètes de deux surfaces cubiques dans \mathbb{P}_3 pour lesquelles on constate directement que le genre arithmétique 10 est plus grand que $\pi'(3, 9) = 9$.

Pour $k_0 = 1$, le résultat reste valable, à l'exception près de l'intersection complète de deux quadriques dans \mathbb{P}_3 (la quartique elliptique) qui est ordinaire et de genre arithmétique maximal $\pi'(3, 4) = 1$.

En fait, pour $n = 3$ au moins, on a un résultat plus fort, dont nous conjecturons qu'il peut se généraliser en toute dimension⁸ :

Théorème 6. Le genre arithmétique d'une courbe de degré d , qui est intersection complète de deux surfaces algébriques dans \mathbb{P}_3 , est plus grand que $\pi'(3, d)$ (strictement si $k_0 \geq 2$). Si $k_0 = 1$, le cas de la quartique elliptique est la seule exception à l'inégalité stricte.

L'inégalité cherchée se démontre par récurrence sur k_0 , sachant que $\frac{d}{2}(2\sqrt{d} - 4) + 1 \leq g_a$ pour une intersection complète.

⁷ Nous devons cette remarque au rapporteur.

⁸ Depuis la présentation de cette note, nous avons effectivement généralisé le Théorème 6 en toute dimension. En fait, on vérifie aisément que toute courbe acm, en dimension n quelconque, a un genre arithmétique au moins égal à $\pi'(n, d)$, et strictement plus grand si la courbe n'est pas ordinaire.

Références

- [1] V. Cavalier, D. Lehmann, Ordinary holomorphic webs of codimension one, preprint, arXiv:math/0703596v2 [mathDS], 13/10/2008, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, cl. Sci. (5) XI (2012) 197–214.
- [2] V. Cavalier, D. Lehmann, Rang et courbure de Blaschke des tissus holomorphes réguliers de codimension un, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).
- [3] D. Eisenbud, Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer, 1994.
- [4] G. Ellingsrud, Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans \mathbb{P}_e à cône de Cohen–Macaulay, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 8 (4) (1975) 423–431.
- [5] L. Gruson, C. Peskine, Genre des courbes de l'espace projectif, in: Algebraic Geometry, Tromsø 1977, in: Lecture Notes in Math., vol. 687, Springer Verlag, 1978, pp. 31–59.
- [6] J. Harris, Curves in Projective Space, Les Presses de l'Université de Montréal, 1982, Chapter III (with the collaboration of D. Eisenbud).