



Géométrie différentielle/Probabilités

Encadrement du barycentre convexe d'une loi uniforme portée par une petite sphère S^2 dans une 3-sphère

Bounds for the convex barycenter of a uniform law carried on a small sphere S^2 in a 3-sphere

M. Gorine, M. Belkhef

LPQM3, Faculté des sciences et de la technologie, Université de Mascara, Algérie

IN F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 6 juin 2012

Accepté après révision le 5 novembre 2012

Disponible sur Internet le 23 novembre 2012

Présenté par le Comité de rédaction

R É S U M É

Nous donnons un encadrement du barycentre convexe de la loi de probabilité uniforme portée par une petite sphère S^2 dans la 3-sphère. La majoration est obtenue par construction de fonctions convexes presque affines et la minoration par construction d'une suite de mesures finies qui converge étroitement vers la loi uniforme portée par un petit cercle en dimension 2 puis en utilisant l'associativité des barycentres pour le passage à la dimension 3.

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

We give upper and lower bounds for the convex barycenter of the uniform law of probability carried on a small sphere S^2 in the 3-sphere. The upper bound is obtained with the construction of almost affine convex functions. The lower bound rests on the construction of a sequence of finite measures which converges narrowly to the uniform law carried by a small circle in dimension 2, then we use the associativity of barycenters in order to go over to dimension 3.

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Définitions et rappels

On considère une variété différentiable M , sans bord, de classe C^∞ , munie d'une connexion affine, et telle que deux points quelconques de M sont toujours reliés par une géodésique et une seule, qui en outre dépend de façon C^∞ des deux points. On supposera donnée une mesure de probabilité μ à support compact K appartenant à M et suffisamment petit.

Le but est l'étude de l'influence de la structure de M sur la taille de $b(\mu)$, barycentre convexe de μ . On note $C(K)$ l'ensemble des fonctions convexes sur un voisinage ouvert et convexe de K . On dit que $x \in M$, est un point du barycentre convexe de μ si, pour toute fonction f appartenant à $C(K)$, $f(x)$ est définie et $f(x) \leq \mu(f)$ [2]. Pour tous x et y dans K , on note $\vec{x}\vec{y} \in T_x M$ le vecteur vitesse de la géodésique passant en x au temps 0 et en y au temps 1, $\vec{x}\vec{y} = \exp_x^{-1}(y)$. On appelle barycentre exponentiel de μ tout point e de M qui vérifie $\int \vec{e}\vec{y} \mu(dy) = 0$ [2]. On montre que tout barycentre exponentiel de μ est un point de $b(\mu)$ [2].

Adresses e-mail : gorinemoh@gmail.com (M. Gorine), mohamed.belkhef@gmail.com (M. Belkhef).

2. Résultats

Proposition 2.1. Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension 2, O un point de M , $T_O M$ l'espace tangent en O , k la courbure de M en O . Pour toute constante réelle $C > \frac{2}{9}|k|$, et pour toute forme linéaire λ , de norme 1, définie sur $T_O M$, la fonction $f(x) = \lambda(\vec{Ox}) + Cr^3$ est convexe sur un voisinage de O , où $r = r(x) = \|\vec{Ox}\|$ est la distance riemannienne de O à x .

Démonstration. La constante C et la forme linéaire λ sont fixées. La fonction f est de classe C^2 sauf en O . Pour montrer que f est convexe sur une petite boule B centrée en O , il suffit de montrer que $\text{Hess } f$ est positive sur $B \setminus \{O\}$. Pour calculer $\text{Hess } f$ sur $B \setminus \{O\}$, fixons une base orthonormée (e_1, e_2) de $T_O M$ telle que $\lambda(\vec{Ox}) = \langle e_1, \vec{Ox} \rangle$.

Dans le système de coordonnées normales (x^1, x^2) centré en O et associé à cette base, on a $\lambda(\vec{Ox}) = x^1$. Dans ces coordonnées normales, le développement de Taylor à l'ordre 2 de la métrique g est donné au voisinage de O par [4]

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3} \langle R(e_i, e_m)e_n, e_j \rangle x^m x^n + o(r^2).$$

En posant $h = \frac{k}{9C}$, on trouve que, hors de l'origine O , $\text{Hess } f$ dans les coordonnées (x^1, x^2) est donnée par

$$\frac{1}{3C} \text{Hess } f = \begin{pmatrix} r + \frac{(x^1)^2}{r} & \frac{x^1 x^2}{r} - hx^2 \\ \frac{x^1 x^2}{r} - hx^2 & r + \frac{(x^2)^2}{r} + 2hx^1 \end{pmatrix} + o(r^2).$$

L'hypothèse $|h| = \frac{|k|}{9C} < \frac{1}{2}$ assure que $\text{Hess } f(x)$ est définie positive au voisinage de O (hors O). \square

Corollaire 2.2. Soient (M, g) , O et k comme dans la proposition. Pour toute constante $C > \frac{2}{9}|k|$ il existe un voisinage V de O tel que pour toute forme linéaire λ sur $T_O M$ de norme 1, la fonction $f(x) = \lambda(\vec{Ox}) + Cr^3$ soit convexe sur V .

Démonstration. Fixons $C > \frac{2}{9}|k|$, et choisissons un $\alpha > 1$ tel que $C > \alpha \frac{2}{9}|k|$. Posons $f_{C,\lambda}(x) = \lambda(\vec{Ox}) + Cr^3$. Par la proposition 2.1, pour chaque λ de norme $\|\lambda\| \leq \alpha$, la fonction $f_{C,\lambda} = \alpha f_{C/\alpha,\lambda/\alpha}$ est convexe au voisinage de O . Choisissons dans la boule $B(O, \alpha)$ du plan cotangent $T_O^* M$ un ensemble fini Λ dont l'enveloppe convexe contient la boule unité $B(O, 1)$. Il existe un voisinage de l'origine sur lequel $f_{C,\lambda}$ est convexe pour tout $\lambda \in \Lambda$, donc aussi pour tout λ dans l'enveloppe convexe de Λ , et a fortiori pour tout λ de norme 1. \square

Théorème 2.3. (M, g) est une variété riemannienne de dimension 2, O est un point de M et k désigne la courbure de M en O . Alors

$$\limsup_{D \rightarrow 0} \sup_{\mu \in E(D)} \frac{|b(\mu)|}{D^3} \leq \frac{|k|}{18},$$

$E(D)$ désignant l'ensemble des mesures de probabilité portées par la boule géodésique $B(O, \frac{D}{2})$ et de barycentre exponentiel O .

Preuve du théorème. Soit C une constante supérieure à $\frac{2}{9}|k|$. D'après le corollaire 2.2, toutes les fonctions $f_{C,\lambda}$, où $\|\lambda\| = 1$, sont convexes sur une même boule géodésique $B(O, \varepsilon/2)$. Soient $D < \varepsilon$ et μ une mesure de probabilité portée par la boule géodésique $B(O, \frac{D}{2})$ ayant O pour barycentre exponentiel; ce dernier existe et est unique [3]. Soit enfin x un point de $b(\mu)$. Il existe λ de norme 1 telle que $r(x) = \lambda(\vec{Ox})$; pour un tel λ , on a $r(x) = \lambda(\vec{Ox}) \leq \lambda(\vec{Ox}) + Cr(x)^3 = f_{C,\lambda}(x) \leq \mu(f_{C,\lambda})$. Le calcul de $\mu(f_{C,\lambda})$ fait apparaître deux termes. Le premier, nul, est la moyenne selon μ de $y \mapsto \lambda(\vec{Oy})$, le deuxième est la moyenne de Cr^3 ; il est majoré par $C(D/2)^3$ car $r \leq D/2$ sur le support de μ . On a, pour tout x dans $b(\mu)$, $r(x) \leq CD^3/8$. Soit $|b(\mu)| \leq CD^3/4$. On a ainsi montré que

$$\forall C > \frac{2}{9}|k| \exists \varepsilon > 0 \forall D < \varepsilon \sup_{\mu \in E(D)} \frac{|b(\mu)|}{D^3} \leq \frac{C}{4}. \quad \square$$

I. Encadrement du diamètre du barycentre convexe de la loi uniforme portée par un petit cercle sur l'hémisphère

Dans cette partie, la variété M sera une boule géodésique ouverte de centre O et de rayon $R < \frac{\pi}{2}$ dans la sphère unité de dimension 2. Pour $r \in]0, R[$, on note μ_r la probabilité uniforme sur le cercle de centre O et de rayon r . L'ensemble $b(\mu_r)$ est une boule géodésique de centre O dont nous allons estimer le rayon.

Théorème 2.4. Si c et C sont des réels positifs tels que $c < \frac{\sqrt{3}}{8\pi}$ et $C > \frac{2}{9}$, il existe $r_0 \in]0, R[$ tel que pour tout $r \in]0, r_0[$, on ait la double inclusion : $B(O, cr^3) \subset b(\mu_r) \subset B(O, Cr^3)$.

Preuve. La deuxième inclusion est une conséquence du théorème 2.3 avec $k = 1$.

Soit ABC un triangle sphérique équilatéral dont les sommets sont sur le support de μ_r . Une orientation étant choisie, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note ρ_θ la rotation de centre O et d'angle θ sur l'émisphère ou sur l'espace tangent en O , on définit par récurrence pour $n \geq 0$ une suite de probabilités ν_n par :

$$\nu_0 = \frac{1}{3}(\delta_A + \delta_B + \delta_C), \quad \nu_{n+1} = \frac{1}{2}(\nu_n + \rho_{\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}(\nu_n)).$$

Soit x_0 le barycentre de I milieu de (A, B) et C affectés des coefficients $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$ respectivement. On définit par récurrence x_n tel que

$$\overrightarrow{Ox_{n+1}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ox_n} + \rho_{\frac{\pi}{3 \cdot 2^n}}(\overrightarrow{Ox_n})).$$

On démontre facilement par récurrence que le point x_n appartient au barycentre $b(\nu_n)$. On identifie isométriquement le plan $T_O M$ et le plan complexe \mathbb{C} , de façon que O soit identifié à 0. Pour tout n , le vecteur $\overrightarrow{Ox_n}$ est identifié à un complexe z_n , et on a la relation de récurrence

$$z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + e^{\frac{i\pi}{3 \cdot 2^n}} z_n) = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3 \cdot 2^{n+1}}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{3 \cdot 2^n}}} z_n,$$

d'où l'on tire

$$z_n = z_0 \frac{1}{2^n} \frac{1 - e^{\frac{2i\pi}{3}}}{1 - e^{\frac{i\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}}}.$$

Puisque $1 - e^{\frac{i\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}} \sim -\frac{i\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$, on obtient $z_n \rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} e^{\frac{i\pi}{3}} z_0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et x_n tend vers un point limite x_∞ tel que $d(O, x_\infty) = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} d(O, x_0)$. Comme ν_n converge étroitement vers μ_r , le point x_∞ est dans $b(\mu_r)$ [1], et le rayon de $b(\mu_r)$ est donc supérieur ou égal à $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} d(O, x_0)$. Un calcul simple montre que $d(O, x_0) \sim \frac{r^3}{12}$ et donc $d(O, x_\infty) \sim \frac{\sqrt{3}r^3}{8\pi}$. \square

Proposition 2.5. Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension 3, et O un point de M tel que toutes les courbures sectionnelles en O sont égales à une même valeur k . Pour tout $C > \frac{1+\sqrt{2}}{9}|k|$, il existe un voisinage de O sur lequel toutes les fonctions $f_{C,\lambda}(x) = \lambda(\overrightarrow{Ox}) + Cr^3$ sont convexes, où λ décrit la sphère unité de l'espace cotangent $T_O^* M$.

Démonstration. Comme en dimension 2, il suffit de montrer séparément que chaque $f_{C,\lambda}$ est convexe au voisinage de O , et cela va se ramener à une minoration de la hessienne. Un calcul analogue à celui de la dimension 2 montre que, hors de l'origine O , Hess f dans les coordonnées (x^1, x^2, x^3) est donnée par

$$\frac{1}{3C} \text{Hess } f = \begin{bmatrix} r + \frac{(x^1)^2}{r} & \frac{x^1 x^2}{r} - hx^2 & \frac{x^1 x^3}{r} - hx^3 \\ \frac{x^1 x^2}{r} - hx^2 & r + \frac{(x^2)^2}{r} + 2hx^1 & \frac{x^2 x^3}{r} \\ \frac{x^1 x^3}{r} - hx^3 & \frac{x^2 x^3}{r} & r + \frac{(x^3)^2}{r} + 2hx^1 \end{bmatrix} + o(r^2).$$

L'hypothèse $|h| = \frac{|k|}{9C} < \sqrt{2} - 1$ assure que les mineurs principaux sont strictement positifs au voisinage de O (hors O). \square

Exactement comme en dimension 2, la proposition 2.5 entraîne :

Théorème 2.6. Soient (M, g) une variété riemannienne de dimension 3, et O un point de M tel que toutes les courbures sectionnelles en O sont égales à une même valeur k . On a la majoration :

$$\limsup_{D \rightarrow 0} \sup_{\mu \in E(D)} \frac{|b(\mu)|}{D^3} \leq \frac{1 + \sqrt{2}}{36} |k|,$$

où $E(D)$ désigne l'ensemble des probabilités portées par la boule géodésique $B(O, \frac{D}{2})$ et dont le barycentre exponentiel est O .

II. Encadrement du diamètre du barycentre convexe de la loi uniforme portée par une petite sphère S^2 dans la 3-sphère

Avec des notations analogues à celles de la dimension deux, on démontre :

Théorème 2.7. Si c et C sont des réels positifs tels que $c < \frac{\sqrt{3}}{32}$ et $C > \frac{1+\sqrt{2}}{9}$, alors il existe $r_0 \in]0, R[$ tel que pour tout $r \in]0, r_0[$, on ait la double inclusion : $B(O, cr^3) \subset b(\mu_r) \subset B(O, Cr^3)$.

Preuve du théorème. La deuxième inclusion résulte du théorème 2.6 (courbure constante $k = 1$); la première est le cas particulier $n = 3$ du théorème 2.8 ci-dessous. \square

III. Minoration du diamètre du barycentre convexe de la loi uniforme portée par une petite sphère S^{n-1} dans la n -sphère

La variété M est maintenant de dimension n et à courbure constante 1; plus précisément, M est une boule géodésique régulière de rayon R et de centre O dans la n -sphère unité. Nous allons minorer le rayon du barycentre convexe $b(\mu_r)$, où μ_r est la probabilité uniforme sur la sphère géodésique de petit rayon r et de centre O . Nous utiliserons la suite des nombres

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \alpha)^k d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\frac{k}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)}.$$

Théorème 2.8. Pour tout c tel que $0 < c < \frac{\sqrt{3}}{8\pi} I_{n-1}$ il existe $r_0 \in]0, R[$ tel que pour tout $r \in]0, r_0[$, on ait la minoration

$$B(O, cr^3) \subset b(\mu_r).$$

Démonstration. Pour $n = 2$, on a $I_{n-1} = 1$, et la minoration a été établie dans le théorème 2.4. Nous allons démontrer la propriété dans le cas $n > 2$ par récurrence sur n , en la supposant vraie pour $n - 1$. Fixons $c < \frac{\sqrt{3}}{8\pi} I_{n-1}$, et posons $c' = \frac{I_{n-2}}{I_{n-1}} c$, de sorte que la propriété au rang $n - 1$ a lieu avec cette valeur c' . Pour démontrer le théorème, il suffit de construire, pour tout r assez petit, un point x de $b(\mu_r)$ tel que $d(O, x) \geq cr^3 = \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}} c' r^3$, car toute la boule $B(O, cr^3)$ sera alors incluse dans $b(\mu_r)$. Considérons G_r l'ensemble des grands cercles de la petite sphère support de μ_r ; ce sont les intersections de cette sphère avec les sous-variétés totalement géodésiques de codimension 1 passant par O . Notons α_r la mesure de probabilité uniforme sur G_r et pour tout $g \in G_r$, appelons ν_g la mesure de probabilité uniforme sur g . Étant invariante par rotations, la probabilité $\int_{G_r} \nu_g \alpha_r(dg)$ est égale à μ_r . Chaque $g \in G_r$ est inclus dans une hypersurface totalement géodésique H_g , passant par O , et à courbure constante 1. Appliquons dans H_g l'hypothèse de récurrence : puisque $c' < \frac{\sqrt{3}}{8\pi} I_{n-2}$, il existe $r_0 \in]0, R[$ tel que pour tout $r \in]0, r_0[$ et tout cercle $g \in G_r$, le barycentre convexe $b(\nu_g)$ de ν_g contient la boule géodésique $B(O, c'r^3)$ de H_g , c'est-à-dire l'intersection \hat{g} de H_g avec la boule géodésique n -dimensionnelle $B(O, c'r^3)$. Ce \hat{g} est la boule centrée en O , de rayon $c'r^3$, située dans H_g . Lus dans la carte exponentielle en O , g et \hat{g} deviennent une sphère de rayon r et une boule de rayon $c'r^3$, dans un même hyperplan passant par O . Fixons dans $T_O M$ une direction arbitraire, dite « verticale », et appelons $h(g)$ le point de \hat{g} le plus « haut » dans cette direction. (Lorsque g est horizontal, $h(g)$ n'est pas défini.) Quand g parcourt G_r , $h(g)$ décrit un hémisphère supérieur S_r , centré en O et de rayon $c'r^3$. Notons $\hat{\alpha}_r$ la mesure image de α_r par l'application h ; c'est une certaine probabilité sur S . Par associativité des barycentres [2] et en remarquant que $h(g) \in \hat{g} \subset b(\nu_g)$, on a $b(\hat{\alpha}_r) \subset b(\mu_r)$; pour achever la preuve, il suffit donc de trouver dans $b(\hat{\alpha}_r)$ un point distant de O d'au moins cr^3 . Le grand cercle g étant choisi uniformément, son axe coupe S_r en un point $p(g)$ de loi uniforme sur S_r , et la latitude θ de $p(g)$ (l'angle de $Op(g)$ avec l'horizontale) suit la loi de densité $(1/I_{n-2})(\cos \theta)^{n-2} d\theta$. La latitude de $h(g)$ est $\lambda = \frac{\pi}{2} - \theta$, et le centre de la $(n - 1)$ -sphère formée des points de S_r de latitude λ fixée se trouve au-dessus de O , à distance supérieur à $c'r^3 \sin \lambda$ (il y aurait égalité en courbure nulle; l'inégalité vient de la courbure positive). La moyenne de ces centres fournit un point x de $b(\hat{\alpha}_r)$ tel que

$$d(O, x) > \int_0^{\frac{\pi}{2}} c'r^3 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \frac{(\cos \theta)^{n-2} d\theta}{I_{n-2}} = \frac{I_{n-1}}{I_{n-2}} c'r^3 = cr^3.$$

Ceci achève la démonstration. \square

Remerciements

Nous tenons à souligner que ces travaux n'auraient pu être réalisés sans l'aide financière du PHC Tassili 08 MDU 737, qui nous a permis de fructueux contacts avec les probabilistes de Strasbourg et de Poitiers, à qui nous sommes reconnaissants. Enfin, nos remerciements vont aux dirigeants de la faculté des sciences et technologie à Mascara et de la faculté des sciences à Tlemcen qui ont contribué à la réussite de cette collaboration interuniversitaire.

Références

- [1] M. Arnaudon, Barycentres convexes et approximations des martingales continues dans les variétés, in : Séminaire de Probabilités XXIX, in : Lecture Notes in Math., vol. 1613, Springer, 1995, pp. 70–85.
- [2] M. Émery, G. Mokobodzki, Sur le barycentre d'une probabilité dans une variété, in : Séminaire de Probabilités XXV, in : Lecture Notes in Math., vol. 1485, Springer, 1991, pp. 220–223.
- [3] W.S. Kendall, Convexity and the hemisphere, J. London Math. Soc. (2) 43 (1991) 223–261.
- [4] J.M. Lee, Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature, Grad. Texts in Math., vol. 176, Springer-Verlag, 1997.