



Algèbres de Lie/Physique mathématique

## Vecteurs de Perron–Frobenius et produits Gamma

*Perron–Frobenius vectors and Gamma products*

Véronique Cohen-Aptel, Vadim Schechtman

Institut de mathématiques, Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse, France

## I N F O A R T I C L E

*Historique de l'article :*

Reçu le 24 septembre 2012

Accepté après révision le 7 novembre 2012

Disponible sur Internet le 26 novembre 2012

Présenté par le Comité de rédaction

## R É S U M É

Cette Note présente des formules permettant d'exprimer les coordonnées des vecteurs de Perron–Frobenius des matrices de Cartan (finies ou affines) comme des produits de valeurs de la fonction Gamma, pour chaque système de racines fini irréductible de rang  $r$ .

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## A B S T R A C T

This Note presents formulas to express the coordinates of Perron–Frobenius vectors of Cartan matrices (finite or affine) as products of Gamma values, for each finite irreducible root system of rank  $r$ .

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

**1. Formule dans le cas des matrices de Cartan de type finie**

Soient  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $r$ ,  $R \subset V$  un système de racines réduit irréductible de rang  $r$ ,  $(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $V$ , invariante par le groupe de Weyl  $W(R)$ .

Identifions  $V$  avec son dual  $V^*$  grâce à cette forme  $(\cdot, \cdot)$ , et considérons les racines duales comme les éléments de  $V$  :  $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ ,  $\alpha \in R$ , cf. [2, Ch. VI].

Fixons une base  $\{\alpha_i, 1 \leq i \leq r\}$  de racines simples de  $R$ ; ceci permet de définir le sous-ensemble  $R_+ \subset R$  de racines positives. Soit  $\rho^\vee = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha^\vee$ .

Soit  $h$  le nombre de Coxeter de  $R$ . Pour chaque racine  $\alpha > 0$ ,  $0 < (\alpha|\rho^\vee)/h < 1$ .

Soit  $A = ((\alpha_i|\alpha_j^\vee))$  la matrice de Cartan de  $R$ .

La matrice  $A' = I_r - A/2$  (où  $I_r$  est la matrice  $r \times r$  identique) est indécomposable avec des coefficients positifs (c'est la matrice d'incidence du graphe de Dynkin de  $R$ ).

D'après le théorème de Perron–Frobenius (cf. [7, Ch. XIII, §2]),  $A'$  admet un unique, à proportionnalité près, vecteur propre  $v_{PF}$  aux coordonnées strictement positives, de valeur propre réelle  $\lambda_{\max}(A') > 0$ , strictement supérieure aux valeurs absolues de toutes autres valeurs propres de  $A'$ .

Toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles et strictement positives, et  $v_{PF}$  est un vecteur propre de  $A$  de valeur propre minimale  $\lambda_{\min}(A) = 4 \sin^2(\pi/2h)$ . On dira que  $v_{PF}$  est un *vecteur de Perron–Frobenius* de  $A$ .

Ces vecteurs sont connus pour tout système de racines réduit irréductible  $R$  et peuvent être exprimés en termes de fonctions trigonométriques.

Adresses e-mail : [vero.aptel@free.fr](mailto:vero.aptel@free.fr) (V. Cohen-Aptel), [schechtman@math.ups-tlse.fr](mailto:schechtman@math.ups-tlse.fr) (V. Schechtman).

Dans la physique, ces composantes ont une interprétation remarquable : ces nombres sont les masses des particules dans les déformations intégrables de la théorie de Toda. Le premier exemple, découvert par A. Zamolodchikov, a été  $R = E_8$ , où on retrouve 8 particules du modèle d'Ising critique dans un champ magnétique.

On trouvera les expressions de leurs coordonnées (assez élaborées dans le cas des systèmes exceptionnels), au section 3 ci-après.

Notre premier résultat (Théorème A) donne une expression de vecteurs  $v_{PF}$  en termes de produits Gamma. Le deuxième résultat (Théorème B) donne une expression analogue pour un vecteur  $v_{PF}$  des matrices de Cartan affines.

Introduisons des nombres réels strictement positifs

$$\Gamma(R, \alpha_i) = \prod_{\alpha \in R_+} \Gamma((\alpha | \rho^\vee) / h)^{-(\alpha^\vee | \alpha_i)}$$

et un vecteur

$$\Gamma(R) = (\Gamma(R, \alpha_1), \dots, \Gamma(R, \alpha_r)) \in \mathbb{R}^r.$$

**Théorème A.**  $\Gamma(R)$  est un vecteur de Perron–Frobenius de  $A$ .

Pour la preuve, voir section 3 ci-dessous.

## 2. Formule dans le cas des matrices de Cartan de type affine

Soit

$$\theta = \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i$$

la plus grande racine ; on pose  $n_0 = 1$ ,  $\alpha_0 = -\theta$ , donc  $h = \sum_{i=0}^r n_i$ .

On normalise le produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  de telle façon que  $(\theta | \theta) = 2$ .

Soit  $\hat{A}$  la matrice de Cartan  $(r+1) \times (r+1)$  du système de racines affine  $R^{(1)}$ , cf. [8]. Alors  $\hat{A}$  admet un seul, à proportionnalité près, vecteur propre de valeur propre 0 et

$$\delta := (n_0, \dots, n_r) \in \mathbb{R}^{r+1},$$

est l'unique tel vecteur aux coordonnées strictement positives entières. Les nombres  $n_i$ ,  $0 \leq i \leq r$ , coïncident avec les marques du graphe de Dynkin complété  $R^{(1)}$ , cf. [8, 4.8, 4.9, Table Aff 1], [10, Appendix 1], et [11, 1.3].

Soient  $n_i^\vee$  les marques du graphe de Dynkin dual, obtenues en renversant les arêtes du graphe initial. On a :

$$n_i^\vee = n_i (\alpha_i | \alpha_i) / 2, \quad 0 \leq i \leq r.$$

Posons :

$$\delta^\vee := (n_0^\vee, \dots, n_r^\vee),$$

c'est l'unique vecteur propre de valeur propre 0 de la matrice de Cartan généralisée  $\hat{A}^\vee$  duale de  $\hat{A}$ . Toutes les autres valeurs propres de  $\hat{A}^\vee$  sont strictement positives.

Posons  $\gamma(x) = \Gamma(x) / \Gamma(1-x)$ . On définit les nombres :

$$\gamma(R, \alpha_i) = \prod_{\alpha \in R_+} \gamma((\alpha | \rho^\vee) / h)^{-(\alpha^\vee | \alpha_i)}$$

et le vecteur

$$\gamma(R) = (\gamma(R, \alpha_0), \dots, \gamma(R, \alpha_r)) \in \mathbb{R}^{r+1}.$$

**Théorème B.**

$$\gamma(R) = \left( \prod_{i=0}^r n_i^{\vee n_i} \right)^{-1/h} \delta^\vee.$$

Pour la preuve, voir section 4 ci-dessous.

### 3. Esquisse de preuve du Théorème A

On peut identifier notre système de racines fini  $R$  avec un des systèmes de types  $A_r$ – $G_2$  décrits aux Planches I–IX à la fin du livre de Bourbaki [2]. Reprenons la numérotation des sommets du graphe de Dynkin comme dans [2].

Voici la liste des vecteurs de Perron–Frobenius  $m(R) = (m_1, \dots, m_r)$  des systèmes de racines finis réduits irréductibles  $R$ , cf. [9,3] :

Type  $A_r$ ,  $r \geq 1$ ,  $h = r + 1$  ;

$$m_a = \sin(\pi a / (r + 1)), \quad 1 \leq a \leq r.$$

Type  $B_r$ ,  $r \geq 2$ ,  $h = 2r$  ;

$$m_a = 2 \sin(\pi a / 2r), \quad 1 \leq a \leq r - 1, \quad m_r = 1.$$

Type  $C_r$ ,  $r \geq 2$ ,  $h = 2r$  ;

$$m_a = \sin(\pi a / 2r), \quad 1 \leq a \leq r.$$

Type  $D_r$ ,  $r \geq 3$ ,  $h = 2r - 2$  ;

$$m_a = 2 \sin(\pi a / (2r - 2)), \quad 1 \leq a \leq r - 2, \quad m_{r-1} = m_r = 1.$$

Type  $E_6$ ,  $h = 12$  ;

$$m(E_6) = \left( 1, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}, \sqrt{3} + 1, \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}, 1 \right).$$

Type  $E_7$ ,  $h = 18$  ;

$$m(E_7) = (1, 2 \cos(\pi / 9), 4 \cos(\pi / 18) \cos(5\pi / 18), 4 \cos(\pi / 18) \cos(\pi / 9), \\ 2 \cos(\pi / 9) \cos(2\pi / 9), 2 \cos(\pi / 18), 1).$$

Type  $E_8$ ,  $h = 30$  ;

$$m(E_8) = (2 \cos(\pi / 5), 4 \cos(\pi / 5) \cos(7\pi / 30), 4 \cos(\pi / 5) \cos(\pi / 30), \\ 8 \cos^2(\pi / 5) \cos(2\pi / 15), 8 \cos^2(\pi / 5) \cos(7\pi / 30), 4 \cos(\pi / 5) \cos(2\pi / 15), 2 \cos(\pi / 30), 1).$$

Type  $F_4$ ,  $h = 12$  ;

$$m(F_4) = \left( \sqrt{2}, \sqrt{3} + 1, \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}, 1 \right).$$

Type  $G_2$ ,  $h = 6$  ;

$$m(G_2) = (1, \sqrt{3}).$$

La fonction  $\Gamma(x)$  satisfait à deux propriétés fondamentales :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{x}{\sin(\pi x)} \tag{C}$$

et

$$\prod_{i=0}^{n-1} \Gamma(x + i/n) = (2\pi)^{(n-1)/2} n^{-nx+1/2} \Gamma(nx). \tag{M}$$

En utilisant (C) et (M) avec  $n = 2, 3, 5$  et  $9$ , on vérifie cas par cas que le vecteur  $\Gamma(R)$  est bien proportionnel à  $m(R)$ .

Par exemple,

$$\Gamma(A_r, \alpha_i) = \frac{1}{\Gamma(i/(r+1))\Gamma((r+1-i)/(r+1))} = \frac{\sin(\pi i/(r+1))}{\pi},$$

d'où  $\Gamma(A_r) = \pi^{-1}m(A_r)$  d'après (C).

Pour les autres séries classiques, les vérifications ne sont pas difficiles et donnent

$$\Gamma(B_r) = 2^{1/r}\pi^{-1}m(B_r), \quad \Gamma(C_r) = \pi^{-1}m(C_r), \quad \Gamma(D_r) = 2^{1/(r-1)}\pi^{-1}m(D_r).$$

Pour les systèmes exceptionnels les calculs sont plus pénibles.

Voici les réponses :

$$\begin{aligned}\Gamma(E_6) &= 2^{-5/4} 3^{1/8} (\sqrt{3} - 1)^{1/4} \pi^{-1} m(E_6), \\ \Gamma(E_7) &= 2^{1/9} 3^{-1/6} \sin(\pi/9) \pi^{-1} m(E_7), \quad \Gamma(E_8) = \Gamma(E_8, \alpha_8) m(E_8), \\ \Gamma(F_4) &= 2^{-5/4} 3^{1/8} \pi^{-1} (\sqrt{3} - 1)^{1/2} m(F_4), \\ \Gamma(G_2) &= 2^{-2/3} \pi^{-1} m(G_2).\end{aligned}$$

Pour les détails de calculs, cf. [6,5].

#### 4. Esquisse de preuve du Théorème B

Définissons

$$k(R) = \prod_{i=1}^r n_i^{\vee n_i}.$$

**Lemme 4.1.** *Quel que soit  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , on a*

$$\gamma(R, \alpha_i) = k(R)^{-1/h} n_i^{\vee}. \quad (\text{F})$$

Cette formule remarquable a été découverte par les physiciens, cf. [1] (et a été le point de départ de notre travail). Leurs arguments sont de nature physique, liés à l'ansatz de Bethe. La démonstration mathématique se trouve dans [4,5].

C'est aussi une vérification cas par cas. On remarque que *les calculs n'utilisent que la formule (M) (pas de formule (C))*.

Maintenant on en déduit le théorème. Supposons pour simplifier les notations, que  $R$  soit du type  $A$ ,  $D$  ou  $E$  (le cas général est identique).

Dans ce cas  $\hat{A}^{\vee} = \hat{A}$ ,  $n_i^{\vee} = n_i$ .

Puisque

$$\alpha_0 = - \sum_{i=1}^r n_i \alpha_i,$$

on a :

$$\gamma(R, \alpha_0) = \prod_{i=1}^r \gamma(R, \alpha_i)^{-n_i} = k(R)^{\sum_{i=1}^r n_i/h} \prod_{i=1}^r n_i^{-n_i} = k(R)^{-1/h},$$

car  $\sum_{i=1}^r n_i = h - 1$ .

Il s'ensuit que :

$$\gamma(R) = k(R)^{-1/h} \delta,$$

ce qui démontre le Théorème B.

Notons que la valeur du facteur  $k(R)^{-1/h}$  est définie de façon unique si on veut que  $\gamma(R)$  soit proportionnel à  $\delta$ .

#### Références

- [1] C. Ahn, P. Baseilhac, V.A. Fateev, C. Kim, C. Rim, Reflection amplitudes in non-simply laced Toda theories and thermodynamic Bethe ansatz, Phys. Lett. B 481 (2000) 114–124.
- [2] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Ch. IV–VI.
- [3] H.W. Braden, E. Corrigan, P.E. Dorey, R. Sasaki, Affine Toda field theory and exact  $S$ -matrices, Nucl. Phys. B 338 (1990) 689–746.
- [4] V. Cohen-Aptel, Formule de Fateev, arXiv:1012.5203.
- [5] V. Cohen-Aptel, Fonctions double Gamma liées aux systèmes de racines, Thèse, Toulouse, 2012.
- [6] V. Cohen-Aptel, V. Schechtman, Produits Gamma et vecteurs propres de matrices de Cartan, arXiv:1010.5945.
- [7] F.R. Gantmacher, Théorie des matrices.
- [8] V.G. Kac, Infinite Dimensional Lie Algebras.
- [9] T.R. Klassen, E. Melzer, Purely elastic scattering theories and their ultraviolet limits, Nucl. Phys. B 338 (1990) 485–528.
- [10] I.G. Macdonald, Affine root systems and Dedekind's  $\eta$ -function, Inv. Math. 15 (1972) 91–143.
- [11] I.G. Macdonald, Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials, Cambridge University Press, 2003.