



Analyse mathématique/Physique mathématique

## Une famille de transformations de Bargmann circulaires

## A family of circular Bargmann transforms

Zouhaïr Mouayn

Université Sultan Moulay Slimane, faculté des sciences et techniques (M'Ghila), BP. 523, Béni Mellal, Maroc

## I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 24 avril 2012

Accepté après révision le 13 novembre 2012

Disponible sur Internet le 17 novembre 2012

Présenté par le Comité de rédaction

## R É S U M É

Dans cette Note, on construit une famille de transformations intégrales indéxées par  $(\gamma, m)$  qui appliquent isométriquement les fonctions de carré intégrables sur le cercle unité par rapport à la mesure  $\sin^{\gamma-2m}(\theta/2)d\theta$  sur les espaces propres  $L^2$  associés au spectre discret d'une particule chargée évoluant dans le disque de Poincaré sous l'influence d'un champ magnétique uniforme d'une intensité proportionnelle à  $\gamma + 1$ . Ces transformations intégrales sont attachées aux niveaux de Landau hyperboliques  $\epsilon_m^\gamma = 4m(\gamma - m)$  avec  $m \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, \gamma/2]$  et seront appelées transformations de Bargmann circulaires.

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## A B S T R A C T

In this Note, we construct a family of integral transforms labeled by  $(\gamma, m)$  and mapping isometrically square integrable functions on the unit circle with respect to the measure  $\sin^{\gamma-2m}(\theta/2)d\theta$  onto the  $L^2$ -eigenspaces associated with the discrete spectrum of a charged particle evolving in the Poincaré disk under influence of a uniform magnetic field with a strength proportional to  $\gamma + 1$ . These integral transforms are attached to hyperbolic Landau levels  $\epsilon_m^\gamma = 4m(\gamma - m)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, \gamma/2]$  and will be called circular Bargmann transforms.

© 2012 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

In this Note, we first introduce, the following integral transform

$$\mathcal{B}_\gamma : L^2(\mathbf{S}^1, d\sigma_\gamma) \rightarrow \mathcal{A}^\gamma(\mathbb{D})$$

defined by

$$\mathcal{B}_\gamma[f](z) := \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (1-z)^{-\frac{1}{2}\gamma} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1-ze^{i\theta})^{1+\frac{1}{2}\gamma}} f(e^{i\theta}) d\sigma_\gamma(\theta), \quad (1)$$

Adresse e-mail : mouayn@fstbm.ac.ma.

and mapping isometrically the square integrable functions on the unit circle  $S^1 = \{\omega \in \mathbb{C} | \omega| = 1\}$  endowed with  $d\sigma_\gamma(\theta) := \frac{2^\gamma \Gamma^2(\gamma/2+1)}{\Gamma(\gamma+1)} \sin^\gamma(\theta/2) d\theta$  as a measure where  $\gamma > 0$  is a fixed parameter, onto the Bergman space

$$\mathcal{A}^\gamma(\mathbb{D}) := \left\{ \psi \text{ analytic on } \mathbb{D}, \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)|^2 (1 - z\bar{z})^{\gamma-1} d\mu(z) < +\infty \right\} \tag{2}$$

on the unit disk  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$  and  $d\mu(z)$  being the Lebesgue measure on it. We obtain the kernel function of the integral transform (1) by using a generating function for Jacobi polynomials due to H.M. Srivastava [9]. Next, we propose a generalization of this transform by replacing the arrival space (2) by the eigenspace [3]:

$$\mathcal{A}_m^\gamma(\mathbb{D}) := \left\{ \psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}, \Delta_\gamma \psi = \epsilon_m^\gamma \psi, \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)|^2 (1 - z\bar{z})^{\gamma-1} d\mu(z) < +\infty \right\} \tag{3}$$

of the second order differential operator

$$\Delta_\gamma := -4(1 - z\bar{z}) \left( (1 - z\bar{z}) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - (\gamma + 1) \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \tag{4}$$

with the eigenvalue (hyperbolic Landau level):

$$\epsilon_m^\gamma := 4m(\gamma - m); \quad m = 0, 1, 2, \dots, \left[ \frac{\gamma}{2} \right], \tag{5}$$

where  $[x]$  denotes the greatest integer less than  $x$ . The operator  $\Delta_\gamma$  in (4) can be unitarily intertwined to represent the Schrödinger operator of a charged particle evolving in the Poincaré disk under influence of a uniform magnetic field with a strength proportional to  $(\gamma + 1)$ . Note that for  $m = 0$ , the space  $\mathcal{A}_0^\gamma(\mathbb{D})$  in (3) coincides with the Bergman space  $\mathcal{A}^\gamma(\mathbb{D})$  in (2). For  $m \neq 0$ , we precisely construct the integral transform

$$\mathcal{B}_{\gamma,m} : L^2(S^1, d\sigma_{(\gamma-2m)}) \rightarrow \mathcal{A}_m^\gamma(\mathbb{D})$$

defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\gamma,m}[f](z) &= \left( \frac{\Gamma(\gamma + 1 - m)}{\pi m! \Gamma(\gamma - 2m)} \right)^{\frac{1}{2}} (1 - z)^{-\frac{\gamma}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 - e^{i\theta} z)^{\frac{\gamma}{2} + 1}} \left( \frac{(\bar{z} - 1)(1 - e^{i\theta} z)}{(1 - z\bar{z})} \right)^m \\ &\times {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -m, \frac{\gamma}{2} - m + 1 \\ 1 + \gamma - 2m \end{matrix} \middle| \frac{(1 - e^{i\theta})(1 - z\bar{z})}{(1 - \bar{z})(1 - e^{i\theta} z)} \right) f(e^{i\theta}) d\sigma_{(\gamma-2m)}(\theta), \end{aligned} \tag{6}$$

where  ${}_2F_1(-m, \dots | \cdot)$  is a Gauss hypergeometric function which can be written in terms of the Jacobi polynomial [5]. We obtain the kernel function of the integral transform (6) by using a generating function for Gauss hypergeometric sums due to L. Weisner [10]. Our method in obtaining these transforms is based on a coherent state analysis [4] in a parallel way with the construction of the classical Bargmann transform [2] which maps isometrically the space  $L^2(\mathbb{R})$  of square integrable functions on the real line onto the Fock space  $\mathfrak{F}(\mathbb{C})$  of entire Gaussian square-integrable functions on the complex plane, after being observed that the role the Hermite functions as a basis of  $L^2(\mathbb{R})$  can be replaced by the circular Jacobi polynomials [6,8,1].

**1. Introduction et énoncé des résultats**

Dans [2], V. Bargmann avait introduit une transformation intégrale bien célèbre qui applique isométriquement l'espace  $L^2(\mathbb{R})$  sur l'espace de Fock des fonctions entières de carré intégrable par rapport à la mesure Gaussienne de  $\mathbb{C}$ . Il est aussi possible d'interpréter le noyau de cette transformation intégrale en termes des états cohérents associés à l'Hamiltonien de l'oscillateur harmonique. Plus précisément, un état cohérent est un état quantique représenté par une fonction d'onde normalisée que l'on définit à l'aide d'une superposition assez particulière de fonctions propres de l'Hamiltonien. C'est un fait bien connu que les fonctions propres de l'oscillateur harmonique sont données par les fonctions d'Hermite. Il se trouve aussi que dans la superposition de ces fonctions propres qui définit un état cohérent, les coefficients apparaissent sous la forme  $(n!)^{-\frac{1}{2}} z^n$ . Cette dernière expression n'est autre que celle des éléments de la base de l'espace de Fock  $\mathfrak{F}(\mathbb{C})$ .

Dans cette Note, on procède de façon parallèle à la construction de V. Bargmann dans le but de former deux nouvelles transformations intégrales. Pour le noyau integral de la première, on commence par introduire l'état cohérent défini par la superposition suivante [4, p. 74, Eq. (58)] :

$$\phi_{z,\gamma}(\bullet) := (N_\gamma(z))^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\Phi_n^\gamma(z)} \psi_{n,\gamma}(\bullet) \tag{7}$$

laquelle est indexée par  $z \in \mathbb{D}$  et paramétrée par  $\gamma > 0$ . Ici,  $N_\gamma(z) := \pi^{-1} \gamma (1 - z\bar{z})^{-\gamma-1}$  est un facteur de normalisation de  $\phi_{z,\gamma}$ , les coefficients

$$\phi_n^\gamma(z) := \left( \frac{\gamma \Gamma(\gamma + 1 + n)}{\pi \Gamma(\gamma + 1) n!} \right)^{\frac{1}{2}} z^n; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{8}$$

forment une base orthonormale de l'espace de Bergman  $\mathcal{A}^\gamma(\mathbb{D})$  défini dans (2) et les vecteurs *ket*  $\psi_{n,\gamma} \equiv |n; \gamma\rangle$  que l'on considère ici sont donnés par la formule

$$\psi_{n,\gamma}(e^{i\theta}) := \sqrt{\frac{\Gamma(\gamma + 1 + n)}{\Gamma(\gamma + 1)\Gamma(n + 1)}} \cdot {}_2F_1\left(-n, \frac{\gamma}{2} + 1, \gamma + 1; 1 - e^{i\theta}\right) \tag{9}$$

à l'aide d'une fonction hypergéométrique de Gauss  ${}_2F_1$  qui s'écrit aussi en termes d'un polynôme de Jacobi. Les fonctions  $\{\psi_{n,\gamma}\}_{n=0}^{+\infty}$  constituent une base orthonormale de l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}_\gamma := L^2(\mathbf{S}^1, d\sigma_\gamma)$  muni de la mesure  $d\sigma_\gamma(\theta) := \frac{2^\gamma \Gamma^2(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\gamma+1)} (\sin \frac{\theta}{2})^\gamma \frac{d\theta}{2\pi}$  et sont connues dans la littérature sous le nom de polynômes de Jacobi circulaires [6].

A présent, puisque la superposition (7) servira, à une racine carré de  $N_\gamma(z)$  multiplicative près, de noyau integral pour la transformation intégrale, on aura besoin de son expression sous forme compacte. D'où l'intérêt du résultat ci-dessous.

**Proposition 1.1.** *Pour tout  $\gamma > 0$ , les fonctions d'ondes (7) s'écrivent aussi sous la forme*

$$\phi_{z,\gamma}(e^{i\theta}) = (1 - z\bar{z})^{\frac{1+\gamma}{2}} (1 - \bar{z})^{-\frac{1}{2}\gamma} (1 - \bar{z}e^{i\theta})^{-1-\frac{1}{2}\gamma} \tag{10}$$

où  $z \in \mathbb{D}$  est un point d'indexation fixé et  $e^{i\theta} \in \mathbf{S}^1$ .

Ensuite à l'aide de (10), on est en mesure d'appliquer le formalisme des transformations issues des états cohérents (*coherent states transforms* ou son abréviation *CST*) [4]. Précisément, on écrit la transformée d'une fonction arbitraire  $f \in \mathcal{H}_\gamma$  grâce au produit scalaire dans  $\mathcal{H}_\gamma$  de la façon suivante

$$\mathcal{B}_\gamma[f](z) := (N_\gamma(z))^{\frac{1}{2}} \langle f, \phi_{z,\gamma} \rangle_{\mathcal{H}_\gamma},$$

et on peut énoncer ce qui suit :

**Théorème 1.2.** *Soit  $\gamma > 0$ . Alors, la transformation intégrale issue des états cohérents (7) est donnée explicitement par l'isométrie  $\mathcal{B}_\gamma : L^2(\mathbf{S}^1, d\sigma_\gamma) \rightarrow \mathcal{A}^\gamma(\mathbb{D})$  telle que*

$$\mathcal{B}_\gamma[f](z) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - z)^{-\frac{1}{2}\gamma} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 - ze^{i\theta})^{1+\frac{1}{2}\gamma}} f(e^{i\theta}) d\sigma_\gamma(\theta). \tag{11}$$

**Définition 1.3.** La transformation intégrale  $\mathcal{B}_\gamma$  est appelée transformation de Bargmann circulaire associée au niveau d'énergie de Landau hyperbolique le plus bas  $\epsilon_0^\gamma = 0$ .

De manière analogue à ce qui a été fait ci-dessus, le noyau de la deuxième transformation intégrale s'obtient en introduisant un état cohérent via la superposition

$$\phi_{z,\gamma,m}(\bullet) = (N_{\gamma,m}(z))^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{\Phi_n^{\gamma,m}(z)} \psi_{n,(\gamma-2m)}(\bullet) \tag{12}$$

indexée par  $z \in \mathbb{D}$  et paramétrée par le couple  $(\gamma, m)$  avec  $\gamma > 0$  et  $m = 0, 1, \dots, [\frac{\gamma}{2}]$ . Ici,  $N_{\gamma,m}(z) = \pi^{-1}(\gamma - 2m)(1 - |z|^2)^{-1-\gamma}$  est un facteur de normalisation de  $\phi_{z,\gamma,m}$  et les coefficients sont donnés cette fois-ci par

$$\Phi_n^{\gamma,m}(z) := (-1)^n \left( \frac{(\gamma - 2m)n! \Gamma(\gamma - m + 1)}{\pi m! \Gamma(\gamma - 2m + n + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} (1 - z\bar{z})^{-m} z^{m-n} P_n^{(m-n, \gamma-2m)}(1 - 2z\bar{z}), \tag{13}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ , en termes des polynômes de Jacobi. Ces coefficients constituent une base orthonormale de l'espace propre  $\mathcal{A}_m^\gamma(\mathbb{D})$  introduit dans (3), voir [3, p. 516]. Les vecteurs *ket*  $\psi_{n,(\gamma-2m)} \equiv |n; (\gamma - 2m)\rangle$  se définissent à l'aide de la même formule (9) où l'on remplace le paramètre  $\gamma$  par  $\gamma - 2m > 0$ . Ces vecteurs forment une base de l'espace de Hilbert  $\mathfrak{H}_{\gamma,m} := L^2(\mathbf{S}^1, d\sigma_{(\gamma-2m)})$ . Pour la même raison que précédemment, on aura besoin d'une expression de (12) sous forme compacte.

**Proposition 1.4.** Pour tout  $\gamma > 0$  et  $m = 0, 1, \dots, [\frac{\gamma}{2}]$ , les fonctions d'ondes (13) s'écrivent aussi sous la forme

$$\begin{aligned} \phi_{z,\gamma,m}(e^{i\theta}) &= \left( \frac{\Gamma(\gamma - m + 1)}{m! \Gamma(\gamma - 2m + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{(1 - |z|^2)^{\frac{\gamma+1}{2}}}{(1 - \bar{z})^{\frac{\gamma}{2}} (1 - \bar{z}e^{i\theta})^{\frac{\gamma}{2}+1}} \\ &\times \left( \frac{(z - 1)(1 - \bar{z}e^{i\theta})}{(1 - |z|^2)} \right)^m \cdot {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -m, \frac{\gamma}{2} - m + 1 \\ 1 + \gamma - 2m \end{matrix} \middle| \frac{(1 - |z|^2)(1 - e^{i\theta})}{(1 - z)(1 - \bar{z}e^{i\theta})} \right) \end{aligned} \tag{14}$$

où  $z \in \mathbb{D}$  est un point d'indexation fixé et  $e^{i\theta} \in \mathbf{S}^1$ .

Maintenant, on écrit la transformée d'une fonction arbitraire  $f \in \mathfrak{H}_{\gamma,m}$  à l'aide du produit scalaire dans  $\mathfrak{H}_{\gamma,m}$  de la façon suivante

$$\mathcal{B}_{\gamma,m}[f](z) := (N_{\gamma,m}(z))^{\frac{1}{2}} \langle f, \phi_{z,\gamma,m} \rangle_{\mathfrak{H}_{\gamma,m}}.$$

Ensuite, par les mêmes arguments que précédemment on peut énoncer le résultat suivant.

**Théorème 1.5.** Soit  $\gamma > 0$  et  $m = 0, 1, \dots, [\frac{\gamma}{2}]$ . Alors, la transformation intégrale issue des états cohérents (12) est donnée par l'isométrie  $\mathcal{B}_{\gamma,m} : L^2(\mathbf{S}^1, d\sigma_{(\gamma-2m)}) \rightarrow \mathcal{A}_m^\gamma(\mathbb{D})$  telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\gamma,m}[f](z) &= \left( \frac{\Gamma(\gamma + 1 - m)}{\pi m! \Gamma(\gamma - 2m)} \right)^{\frac{1}{2}} (1 - z)^{-\frac{\gamma}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 - e^{i\theta}z)^{\frac{\gamma}{2}+1}} \left( \frac{(\bar{z} - 1)(1 - ze^{i\theta})}{(1 - |z|^2)} \right)^m \\ &\times {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -m, \frac{\gamma}{2} - m + 1 \\ 1 + \gamma - 2m \end{matrix} \middle| \frac{(1 - e^{i\theta})(1 - |z|^2)}{(1 - \bar{z})(1 - e^{i\theta}z)} \right) f(e^{i\theta}) d\sigma_{(\gamma-2m)}(\theta). \end{aligned} \tag{15}$$

**Définition 1.6.** La transformation intégrale (15) est appelée transformation de Bargmann circulaire associée au niveau d'énergie de Landau hyperbolique  $\epsilon_m^\gamma = 4m(\gamma - m)$  avec  $m = 0, 1, 2, \dots, [\frac{\gamma}{2}]$ .

**Remarque 1.** Il est clair que lorsque  $m = 0$ , la transformation (15) se réduit à la transformation (11). C'est-à-dire que l'on a  $\mathcal{B}_{\gamma,0} = \mathcal{B}_\gamma$ . Dans ce cas, la transformée  $\mathcal{B}_\gamma[f]$  d'une fonction  $f \in \mathcal{H}_\gamma$  est une fonction analytique puisqu'elle appartient à l'espace de Bergman  $\mathcal{A}^\gamma(\mathbb{D})$ . C'est la raison pour laquelle on a présenté de façon séparée l'énoncé du résultat relatif au cas  $m = 0$ .

**Remarque 2.** En tenant compte de l'application qui projete le cercle unité  $\mathbf{S}^1$  sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , il est possible d'écrire l'action de la transformation de Bargmann circulaire  $\mathcal{B}_{\gamma,m}$  sur les fonctions de carré intégrable par rapport à une mesure appropriée sur  $[-1, 1]$ .

**Remarque 3.** Notons que des états cohérents attachés aux niveaux de Landau hyperboliques on été discutés dans [3] et [7] mais les espaces de Hilbert auxquels ils appartenaient sont bien différents de l'espace de Hilbert  $\mathfrak{H}_{\gamma,m}$  que l'on considère dans cette Note.

## 2. Esquisse de démonstration des résultats

Pour établir le premier résultat on commence par remplacer les quantités  $\Phi_n^\gamma(z)$  et  $\psi_{n,\gamma}(e^{i\theta})$  qui figurent dans la formule (7) par leurs expressions dans (8) et (9) respectivement. Cela conduit à la sommation

$$\phi_{z,\gamma}(e^{i\theta}) = (1 - |z|^2)^{\frac{\gamma+1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\gamma + 1)_n}{n!} \cdot {}_2F_1 \left( -n, \frac{\gamma}{2} + 1, \gamma + 1; 1 - e^{i\theta} \right) \bar{z}^n. \tag{16}$$

Ensuite, on exprime la fonction hypergéométrique  ${}_2F_1$  qui apparait dans (16) en fonction du polynôme de Jacobi grâce à la relation [5, p. 999] :

$$P_n^{(\alpha,\beta-n)}(u) = \binom{n + \alpha}{n} \left( \frac{1 + u}{2} \right)^n \cdot {}_2F_1 \left( -n, -\beta, \alpha + 1; \frac{u - 1}{u + 1} \right), \tag{17}$$

que l'on applique pour les paramètres  $\alpha = \gamma, 1 + \gamma/2 = -\beta$  et  $u = 2e^{-i\theta} - 1$ . On obtient donc

$${}_2F_1 \left( -n, \frac{\gamma}{2} + 1, \gamma + 1; 1 - e^{i\theta} \right) = \frac{n!}{(\gamma + 1)_n} e^{in\theta} P_n^{(\gamma, -(1+\frac{\gamma}{2})-n)}(2e^{-i\theta} - 1). \tag{18}$$

Compte tenu de (18), l'équation (16) devient

$$\phi_{z,\gamma}(e^{i\theta}) = (1 - |z|^2)^{\frac{\gamma+1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (\bar{z}e^{i\theta})^n P_n^{(\gamma, -(1+\frac{\gamma}{2})-n)} (2e^{-i\theta} - 1). \tag{19}$$

A ce stade, on fait appel à la formule génératrice

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+\nu}{n} P_{n+\nu}^{(\alpha,\beta-n)}(u)t^n = (1-t)^\beta \left(1 - \frac{1}{2}(1+u)t\right)^{-\alpha-\beta-\nu-1} P_\nu^{(\alpha,\beta)}\left(\frac{(u - \frac{1}{2}(1+u)t)}{(1 - \frac{1}{2}(1+u)t)}\right)$$

qui est due à H.M. Srivastava [9, p. 154] et que l'on utilise avec les paramètres  $\nu = 0, \alpha = \gamma, \beta = -(1 + \frac{\gamma}{2}), u = 2e^{-i\theta} - 1$  et  $t = \bar{z}e^{i\theta}$ . Avec ceci, on aboutit à une expression sous forme compacte de la fonction d'onde  $\phi_{z,\gamma}(e^{i\theta})$ , ce qui amène au résultat du théorème 1 en appliquant le formalisme bien connu des transformées issues des états cohérents (CST).

Pour le second résultat, comme pour le premier, le remplacement au niveau de l'équation (12) des quantités  $\Phi_n^{\gamma,m}(z)$  et  $\psi_{n,(\gamma-2m)}(e^{i\theta})$  par leurs expressions explicites, conduit à la forme suivante de la fonction d'onde

$$\begin{aligned} \phi_{z,\gamma,m}(e^{i\theta}) &= \left(\frac{\Gamma(\gamma - m + 1)}{m!\Gamma(\gamma - 2m + 1)}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - z\bar{z})^{\frac{\gamma+1}{2}-m} z^m \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{-n} P_n^{(m-n,\gamma-2m)}(1 - 2z\bar{z}) \cdot {}_2F_1\left(-n, \frac{\gamma'}{2} + 1, \gamma' + 1; 1 - e^{i\theta}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

où  $\gamma' = \gamma - 2m$ . L'équation (20) peut être réécrite

$$\phi_{z,\gamma,m}(e^{i\theta}) = \left(\frac{\Gamma(\gamma - m + 1)}{m!\Gamma(\gamma - 2m + 1)}\right)^{\frac{1}{2}} (1 - z\bar{z})^{\frac{\gamma+1}{2}-m} z^m \mathfrak{G}_{\gamma,m}, \tag{21}$$

de manière à faire apparaître la sommation

$$\mathfrak{G}_{\gamma,m} := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^{-n} P_n^{(m-n,\gamma-2m)}(1 - 2z\bar{z}) \cdot {}_2F_1\left(-n, \frac{\gamma'}{2} + 1, \gamma' + 1; 1 - e^{i\theta}\right). \tag{22}$$

Ensuite, l'usage de la symétrie des polynômes de Jacobi  $P_n^{(m-n,\gamma-2m)}(1 - 2z\bar{z}) = (-1)^n P_n^{(\gamma-2m,m-n)}(2z\bar{z} - 1)$  et l'application de la formule (17) font que l'équation (22) devient

$$\mathfrak{G}_{\gamma,m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\gamma' + 1)_n}{n!} \cdot {}_2F_1\left(-n, -m, \gamma' + 1; \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2}\right) \cdot {}_2F_1\left(-n, \frac{\gamma'}{2} + 1, \gamma' + 1; 1 - e^{i\theta}\right) \bar{z}^n. \tag{23}$$

Maintenant, on exploite la formule génératrice due à L. Weisner [10, p. 1037] :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\beta)_n}{n!} \cdot {}_2F_1(-n, \alpha, \beta; x) \cdot {}_2F_1(-n, \delta, \beta; y) t^n \\ &= \frac{(1-t)^{\alpha+\delta-\beta}}{(1+(x-1)t)^\alpha (1+(y-1)t)^\delta} \cdot {}_2F_1\left(\alpha, \delta, \beta; \frac{xyt}{(1+(x-1)t)(1+(y-1)t)}\right) \end{aligned} \tag{24}$$

et ce pour les paramètres  $\beta = \gamma' + 1, \alpha = -m, \delta = \frac{\gamma'}{2} + 1, x = \frac{|z|^2-1}{|z|^2}$  et  $y = 1 - e^{i\theta}$ . Ce qui amène à l'écriture

$$\mathfrak{G}_{\gamma,m} = \frac{(z-1)^m (1 - \bar{z}e^{i\theta})^{-\frac{\gamma}{2}-1+m}}{z^m (1 - \bar{z})^{\frac{\gamma}{2}}} \cdot {}_2F_1\left(-m, \frac{\gamma}{2} - m + 1 \mid \frac{(1 - |z|^2)(1 - e^{i\theta})}{(1 - z)(1 - \bar{z}e^{i\theta})}\right). \tag{25}$$

Finalement on dispose d'une expression compacte de la fonction d'onde  $\phi_{z,\gamma,m}(e^{i\theta})$  permettant de conclure le résultat du Théorème 1.5 avec les mêmes arguments qui ont servi pour énoncer le Théorème 1.2.

**Remerciements**

L'auteur tient à remercier le rapporteur pour ses remarques et suggestions.

## Références

- [1] L.D. Abreu, Remarks on isometric mappings between the Hardy–Szegő and Bergman–Selberg spaces: wavelet transforms and Laguerre functions, *Integral Transforms Spec. Funct.* 19 (7) (2008) 463–470.
- [2] V. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part I, *Comm. Pure Appl. Math.* 14 (1961) 187–214.
- [3] F. ElWassouli, A. Ghanmi, A. Intissar, Z. Mouayn, Generalized second Bargmann transforms associated with the hyperbolic Landau levels on the Poincaré disk, *Ann. Henri Poincaré* 13 (2012) 513–524.
- [4] J.P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Physics*, Wiley-VCH Verlag GmbH & KGaA, Weinheim, 2009.
- [5] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, seventh edition, Academic Press, Inc., 2007.
- [6] M.E.H. Ismail, *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, *Encyclopedia Math. Appl.*, Cambridge University Press, 2005.
- [7] Z. Mouayn, Coherent states attached to Landau levels on the Poincaré disk, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38 (42) (2005) 9306–9316.
- [8] L.-C. Shen, Orthogonal polynomials on the unit circle associated with the Laguerre polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* 129 (3) (2001) 873–879.
- [9] H.M. Srivastava, Note on certain generating functions for Jacobi and Laguerre polynomials, *Publications de l'Institut Mathématiques, Nouvelle série* tome 17 (31) (1974) 149–154.
- [10] L. Weisner, Group-theoretical origin of certain generating functions, *Pacific J. Math.* 5 (1955) 1033–1039.