



Algèbres de Lie

Réflexions dans un cristal

*Reflections in a crystal*Pierre Baumann^a, Stéphane Gaussent^b, Joel Kamnitzer^c^a IRMA, Université de Strasbourg et CNRS, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France^b Université de Lyon, ICJ (UMR 5208), Université Jean-Monnet, 42023 Saint-Etienne cedex 2, France^c Department of Mathematics, University of Toronto, Toronto, ON, M5S 2E4, Canada

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 24 octobre 2012

Accepté le 20 novembre 2012

Présenté par le Comité de rédaction

R É S U M É

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ une algèbre de Kac–Moody symétrisable. Soit $B(\infty)$ le cristal de Kashiwara de $U_q(\mathfrak{n}^-)$, soit λ un poids dominant, soit $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ le cristal à un élément de poids λ , et soit $B(\lambda) \subseteq B(\infty) \otimes T_\lambda$ le cristal de la représentation intégrable de plus haut poids λ . Nous calculons les paramètres en cordes descendants d'un élément $b \otimes t_\lambda$ de $B(\lambda)$ en fonction des paramètres de Lusztig de b .

© 2012 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

A B S T R A C T

Let $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ be a symmetrizable Kac–Moody algebra. Let $B(\infty)$ be the Kashiwara crystal of $U_q(\mathfrak{n}^-)$, let λ be a dominant integral weight, let $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ be the crystal with one element of weight λ , and let $B(\lambda) \subseteq B(\infty) \otimes T_\lambda$ be the crystal of the integrable representation of highest weight λ . We compute the descending string parameters of an element $b \otimes t_\lambda$ in $B(\lambda)$ in terms of the Lusztig parameters of b .

© 2012 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.

1. Énoncé du résultat

Soit \mathfrak{g} une algèbre de Kac–Moody symétrisable. Elle vient avec la décomposition triangulaire $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, la famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ des racines simples, la famille $(\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee)$ des coracines simples, et le groupe de Weyl W engendré par les réflexions simples s_1, \dots, s_n . Soit P^+ l'ensemble des poids entiers dominants.

À chaque $\lambda \in P^+$ correspond une représentation irréductible intégrable $L(\lambda)$ de \mathfrak{g} . Le choix d'un vecteur de plus haut poids v_λ donne lieu à une surjection $X \mapsto X \cdot v_\lambda$ de $U(\mathfrak{n}^-)$ sur $L(\lambda)$. La combinatoire de cette situation est régie par les cristaux de Kashiwara [6] : le cristal $B(\lambda)$ de $L(\lambda)$ est un sous-cristal de $B(\infty) \otimes T_\lambda$, où $B(\infty)$ est le cristal de $U_q(\mathfrak{n}^-)$ et $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ est le cristal à un élément de poids λ . Le cristal $B(\lambda)$ étant normal, nous avons

$$\varphi_i(b \otimes t_\lambda) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \tilde{f}_i^n(b \otimes t_\lambda) \in B(\lambda)\}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $b \otimes t_\lambda \in B(\lambda)$.

Le cristal $B(\infty)$ est muni d'une involution $*$ (voir [6, §8.3]), ce qui permet de définir des opérateurs $\tilde{e}_i^* = *\tilde{e}_i*$. Dans [11], Saito définit une bijection

Adresses e-mail : p.baumann@unistra.fr (P. Baumann), stephane.gaussent@univ-st-etienne.fr (S. Gaussent), jkamnitz@math.toronto.edu (J. Kamnitzer).

$$\sigma_i : \{b \in B(\infty) \mid \varepsilon_i(b) = 0\} \rightarrow \{b \in B(\infty) \mid \varepsilon_i(b^*) = 0\}$$

par $\sigma_i(b) = \tilde{f}_i^{\varphi_i(b^*)} \tilde{e}_i^{*\max} b$. Prolongeons σ_i à $B(\infty)$ en posant $\hat{\sigma}_i(b) = \sigma_i(\tilde{e}_i^{*\max} b)$ pour tout $b \in B(\infty)$.

Théorème 1. Soit $\lambda \in P^+$, soit $(s_{i_1}, \dots, s_{i_\ell})$ une décomposition réduite dans W , et soit $b \in B(\infty)$ tel que $b \otimes t_\lambda \in B(\lambda)$. Définissons par récurrence des éléments b_0, \dots, b_ℓ de $B(\infty)$ et des entiers c_1, \dots, c_ℓ par

$$b_0 = b, \quad c_k = \varphi_{i_k}(b_{k-1} \otimes t_\lambda), \quad b_k \otimes t_\lambda = \tilde{f}_{i_k}^{c_k}(b_{k-1} \otimes t_\lambda),$$

pour tout $k \in \{1, \dots, \ell\}$. Posons enfin $d_k = \langle \alpha_{i_k}^\vee, s_{i_{k-1}} \cdots s_{i_1} \lambda \rangle$. Alors

$$\hat{\sigma}_{i_\ell} \cdots \hat{\sigma}_{i_1} b = \tilde{e}_{i_\ell}^{*d_\ell} \cdots \tilde{e}_{i_1}^{*d_1} b_\ell. \tag{1}$$

Le cas particulier $\ell = 1$ de ce résultat est dû à Saito [11, proposition 3.3.4] et à Muthiah et Tingley [10, proposition 2.2]. Plaçons-nous sous les hypothèses du Théorème 1. Prenant $k \in \{1, \dots, \ell\}$, écrivant (1) pour la décomposition réduite $(s_{i_1}, \dots, s_{i_k})$, et égalant les poids des deux membres, nous trouvons

$$s_{i_1} \cdots s_{i_k} \text{wt}(\hat{\sigma}_{i_k} \cdots \hat{\sigma}_{i_1} b) + \lambda = s_{i_1} \cdots s_{i_k} \text{wt}(b_k \otimes t_\lambda). \tag{2}$$

Notant n_1, \dots, n_ℓ les entiers solutions du système d'équations

$$s_{i_1} \cdots s_{i_k} \text{wt}(\hat{\sigma}_{i_k} \cdots \hat{\sigma}_{i_1} b) - \text{wt}(b) = \sum_{p=1}^k n_p s_{i_1} \cdots s_{i_{p-1}} \alpha_{i_p},$$

pour $k \in \{1, \dots, \ell\}$, nous obtenons alors

$$n_k = -c_k - \langle \alpha_{i_k}^\vee, \text{wt}(b_k \otimes t_\lambda) \rangle. \tag{3}$$

Supposons qu'en outre \mathfrak{g} soit de dimension finie, et prenons pour $(s_{i_1}, \dots, s_{i_\ell})$ une décomposition réduite de l'élément le plus long de W . Il suit alors de [11] que les entiers n_1, \dots, n_ℓ sont les paramètres de Lusztig de b relativement à cette décomposition réduite (voir par exemple [2, §3], pour cette notion). Dans ces conditions, la formule (3) est équivalente à la relation découverte par Morier-Genoud [9] entre les paramètres de Lusztig de b et les paramètres en cordes de b' , où $b' \otimes t_\lambda$ est l'image de $b \otimes t_\lambda$ par l'involution de Schützenberger de $B(\lambda)$.

Toujours dans le cas où \mathfrak{g} est de dimension finie, l'égalité (2) reflète la possibilité d'exprimer les sommets du polytope de Mirković–Vilonen de $b \otimes t_\lambda$ de deux façons différentes : soit en termes de réflexions de Saito, autrement dit en termes de paramètres de Lusztig, soit en termes de la structure de cristal de $B(\lambda)$ (voir [4, §6]). La principale motivation du présent travail réside dans la possibilité d'étendre partiellement ce résultat au cas où \mathfrak{g} est une algèbre de Kac–Moody symétrisable.

2. Démonstration

Ramenons-nous au cas d'une matrice de Cartan symétrique grâce à la méthode de repliement du diagramme de Dynkin (voir par exemple [7, §5]). Soit Λ la \mathbb{C} -algèbre préprojective complétée construite sur le graphe de Dynkin de \mathfrak{g} . En vecteur-dimension ν , les structures de Λ -module sont les points d'une variété affine $\Lambda(\nu)$, appelée variété nilpotente de Lusztig. Les composantes irréductibles de ces variétés sont indexées par $B(\infty)$ (voir [8, théorème 5.3.1]) : à un élément $b \in B(\infty)$ de poids $-\nu$ est associée une composante irréductible Λ_b de $\Lambda(\nu)$. Cette bijection permet de lire les opérations de cristal de $B(\infty)$ en termes d'opérations algébriques sur les Λ -modules. Le Théorème 1 se trouve alors être la traduction du Théorème 4 ci-dessous.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, notons S_i le Λ -module simple de vecteur-dimension α_i et I_i l'annulateur de S_i . Nous définissons le i -socle $\text{soc}_i M$ (respectivement, la i -tête $\text{hd}_i M$) d'un Λ -module M comme étant le plus grand sous-module (respectivement, quotient) de M isomorphe à une somme directe de copies de S_i . Alors $\text{soc}_i M \cong \text{Hom}_\Lambda(\Lambda/I_i, M)$ et $\text{hd}_i M \cong (\Lambda/I_i) \otimes_\Lambda M$.

Si $(s_{i_1}, \dots, s_{i_\ell})$ est une décomposition réduite dans W , alors le Λ -bimodule $I_{i_1} \otimes_\Lambda \cdots \otimes_\Lambda I_{i_\ell}$ est isomorphe à l'idéal produit $I_{i_1} \cdots I_{i_\ell}$ (voir [3]). Ce dernier ne dépend que du produit $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ et peut donc être désigné par la notation I_w . Comme I_w est basculant, la théorie de Brenner–Butler fournit deux paires de torsion $(\mathcal{T}_w, \mathcal{F}_w)$ et $(\mathcal{T}^w, \mathcal{F}^w)$ dans la catégorie des Λ -modules de dimension finie, données par

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_w &= \{T \mid I_w \otimes_\Lambda T = 0\}, & \mathcal{F}_w &= \{T \mid \text{Tor}_1^A(I_w, T) = 0\}, \\ \mathcal{T}^w &= \{T \mid \text{Ext}_\Lambda^1(I_w, T) = 0\}, & \mathcal{F}^w &= \{T \mid \text{Hom}_\Lambda(I_w, T) = 0\}. \end{aligned}$$

Le sous-module de torsion d'un Λ -module M de dimension finie relativement à $(\mathcal{T}_w, \mathcal{F}_w)$ (respectivement, $(\mathcal{T}^w, \mathcal{F}^w)$) est noté M_w (respectivement, M^w).

Lemme 2. Soit $w \in W$, soit $i \in \{1, \dots, n\}$, et soit M un Λ -module de dimension finie. Supposons que $s_i w > w$ et que $\text{Ext}_\Lambda^1(S_i, M) = 0$. Alors $M^{s_i w} \cong I_i \otimes_\Lambda M^w$.

Preuve. Pour commencer, observons que $\text{soc}_i M \in \mathcal{T}_{S_i}$ [1, exemple 5.6(i)], d'où $I_i \otimes_\Lambda \text{soc}_i M = 0$. Posons $N = \text{Hom}_\Lambda(I_i, M)$. Appliquant deux fois le théorème 5.4(i) de [1], nous obtenons

$$M^{s_i w} \cong I_{s_i w} \otimes_\Lambda \text{Hom}_\Lambda(I_{s_i w}, M) \cong I_i \otimes_\Lambda I_w \otimes_\Lambda \text{Hom}_\Lambda(I_w, N) \cong I_i \otimes_\Lambda N^w.$$

Compte tenu de l'isomorphisme $S_i \cong \Lambda/I_i$, l'hypothèse $\text{Ext}_\Lambda^1(S_i, M) = 0$ conduit à la suite exacte $0 \rightarrow \text{soc}_i M \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$. L'hypothèse $s_i w > w$ entraîne que $\mathcal{T}_{S_i} \subseteq \mathcal{T}^w$ [1, proposition 5.16], d'où $\text{soc}_i M \in \mathcal{T}^w$. Nous avons ainsi une suite exacte $0 \rightarrow \text{soc}_i M \rightarrow M^w \rightarrow N^w \rightarrow 0$, d'où nous déduisons que $I_i \otimes_\Lambda M^w \cong I_i \otimes_\Lambda N^w \cong M^{s_i w}$. \square

Pour un Λ -module M et un mot (i_1, \dots, i_ℓ) , définissons les sous-modules $\text{soc}_{(i_1, \dots, i_k)} M$ de M par récurrence sur $k \in \{0, \dots, \ell\}$ de la façon suivante [5, §2.4] :

$$\text{soc}_0 M = 0, \quad \text{soc}_{(i_1, \dots, i_k)} M / \text{soc}_{(i_1, \dots, i_{k-1})} M = \text{soc}_{i_k}(M / \text{soc}_{(i_1, \dots, i_{k-1})} M).$$

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, notons \hat{I}_i l'enveloppe injective de S_i . Pour $\lambda \in P^+$, posons $\hat{I}_\lambda = \bigoplus_{i=1}^n \hat{I}_i^{\oplus \lambda_i}$, où $\lambda_i = \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle$.

Lemme 3. Soit $\lambda \in P^+$, soit $w \in W$, et soit $(s_{i_1}, \dots, s_{i_\ell})$ une décomposition réduite de w . Alors $\text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} \hat{I}_\lambda$ est le plus grand sous-module de \hat{I}_λ appartenant à \mathcal{T}_w et son vecteur-dimension est égal à $\lambda - w^{-1}\lambda$.

Preuve. L'énoncé équivaut à dire que $\text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} \hat{I}_\lambda \in \mathcal{T}_w$ et que $\text{Hom}_\Lambda(X, \hat{I}_\lambda / \text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} \hat{I}_\lambda) = 0$ pour tout module $X \in \mathcal{T}_w$. Par additivité, nous pouvons donc nous ramener au cas où λ est un poids fondamental, c'est-à-dire \hat{I}_λ est un module indécomposable \hat{I}_j .

Le module $\text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} \hat{I}_j$ est le module noté $I_{\mathbf{i}, j}$ dans [5, §2.4], avec $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_\ell)$. C'est un objet injectif de la catégorie \mathcal{T}_w ([5, théorème 2.8(iii)] et [1, exemple 5.15]). Montrons qu'il contient tous les sous-modules de \hat{I}_j appartenant à \mathcal{T}_w . Soit X un tel sous-module. Alors la somme $Y = X + \text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} \hat{I}_j$ appartient à \mathcal{T}_w . Comme $\text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} \hat{I}_j$ est injectif dans \mathcal{T}_w , il est un facteur direct de Y . Or tous les sous-modules non-nuls de \hat{I}_j contiennent son socle S_j , ce qui exclut l'existence de somme directe non-triviale à l'intérieur de \hat{I}_j . Par conséquent, $\text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} \hat{I}_j$ est soit égal à Y tout entier, soit réduit à 0. La seconde possibilité a lieu quand $j \notin \{i_1, \dots, i_\ell\}$, mais dans ce cas X est lui aussi nul, car pour des raisons de vecteur-dimension, il ne peut pas contenir le socle S_j de \hat{I}_j [5, corollaire 9.3 et lemme 10.2]. Donc $\text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} \hat{I}_j$ contient X dans les deux cas de figure.

Enfin, l'assertion sur le vecteur-dimension est prouvée dans [5, corollaire 9.2]. \square

Théorème 4. Soit $\lambda \in P^+$, soit $w \in W$, soit $(s_{i_1}, \dots, s_{i_\ell})$ une décomposition réduite de w , et soit M un sous-module de dimension finie de \hat{I}_λ . Construisons par récurrence une chaîne $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_\ell$ de sous-modules de \hat{I}_λ de la façon suivante :

$$M_0 = M, \quad M_k / M_{k-1} = \text{soc}_{i_k}(\hat{I}_\lambda / M_{k-1}).$$

Alors $(M_\ell)_w = \text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} \hat{I}_\lambda$ et $M_\ell / (M_\ell)_w \cong \text{Hom}_\Lambda(I_w, M)$.

Preuve. Des arguments classiques montrent que si $f : X \rightarrow Y$ est un homomorphisme de Λ -modules, alors $f(\text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} X) \subseteq \text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} Y$. Appliquant ce résultat à la surjection $\hat{I}_\lambda \rightarrow \hat{I}_\lambda / M$, nous obtenons que $\text{soc}_{(i_1, \dots, i_\ell)} \hat{I}_\lambda$ est inclus dans M_ℓ . La première égalité de l'énoncé découle alors du Lemme 3.

Par ailleurs, $S_{i_k} \in \mathcal{T}^{s_{i_k} \dots s_{i_\ell}}$ pour tout $k \in \{1, \dots, \ell\}$, d'où $(M_{k-1})^{s_{i_k} \dots s_{i_\ell}} = (M_k)^{s_{i_k} \dots s_{i_\ell}}$. La définition de M_k entraîne que $\text{soc}_{i_k}(\hat{I}_\lambda / M_k) = 0$, autrement dit $\text{Hom}_\Lambda(S_{i_k}, \hat{I}_\lambda / M_k) = 0$; compte tenu du caractère injectif de \hat{I}_λ , cela donne $\text{Ext}_\Lambda^1(S_{i_k}, M_k) = 0$. Une utilisation répétée du Lemme 2 conduit alors à $M^w \cong I_w \otimes_\Lambda M_\ell$. Utilisant les relations $M_\ell / (M_\ell)_w \cong \text{Hom}_\Lambda(I_w, I_w \otimes_\Lambda M_\ell)$ [1, théorème 5.4(ii)] et $\text{Hom}_\Lambda(I_w, M / M^w) = 0$, nous obtenons la seconde égalité de l'énoncé. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 1. Adoptons les notations utilisées dans son énoncé. Soit M un point général de la composante irréductible Λ_b . La condition $b \otimes t_\lambda \in B(\lambda)$ se traduit par $\varepsilon_i(b^*) \leq \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ [6, proposition 8.2], d'où $\dim \text{soc}_i M \leq \dim \text{soc}_i \hat{I}_\lambda$. Il existe donc une inclusion $M \hookrightarrow \hat{I}_\lambda$. Les modules M_k construits dans l'énoncé du Théorème 4 sont alors des points généraux des composantes Λ_{b_k} et le module $\text{Hom}_\Lambda(I_w, M)$ est un point général de $\Lambda_{\delta_{i_1} \dots \delta_{i_\ell} b}$ [1, proposition 5.24]. Il reste à observer que $\text{soc}_{(i_1, \dots, i_k)} \hat{I}_\lambda / \text{soc}_{(i_1, \dots, i_{k-1})} \hat{I}_\lambda$ est isomorphe à la somme directe de d_k copies de S_{i_k} .

Remerciements

Pierre Baumann et Stéphane Gaussent bénéficient du soutien de l'ANR (projets ANR-09-JCJC-0102-01 et ANR-10-BLAN-0110); Joel Kamnitzer bénéficie du soutien du NSERC.

Références

- [1] P. Baumann, J. Kamnitzer, P. Tingley, Affine Mirković–Vilonen polytopes, prépublication, arXiv:1110.3661.
- [2] A. Berenstein, A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, *Invent. Math.* 143 (2001) 77–128.
- [3] A.B. Buan, O. Iyama, I. Reiten, J. Scott, Cluster structures for 2-Calabi–Yau categories and unipotent groups, *Compos. Math.* 145 (2009) 1035–1079.
- [4] M. Ehrig, MV-polytopes via affine buildings, *Duke Math. J.* 155 (2010) 433–482.
- [5] C. Geiß, B. Leclerc, J. Schröer, Kac–Moody groups and cluster algebras, *Adv. Math.* 228 (2011) 329–433.
- [6] M. Kashiwara, On crystal bases, in: *Representations of Groups, Banff, 1994*, in: CMS Conf. Proc., vol. 16, American Mathematical Society, 1995, pp. 155–197.
- [7] M. Kashiwara, Similarity of crystal bases, in: *Lie Algebras and Their Representations, Seoul, 1995*, in: *Contemp. Math.*, vol. 194, American Mathematical Society, 1996, pp. 177–186.
- [8] M. Kashiwara, Y. Saito, Geometric construction of crystal bases, *Duke Math. J.* 89 (1997) 9–36.
- [9] S. Morier-Genoud, Relèvement géométrique de la base canonique et involution de Schützenberger, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 337 (2003) 371–374.
- [10] D. Muthiah, P. Tingley, Affine PBW bases and MV polytopes in rank 2, prépublication, arXiv:1209.2205.
- [11] Y. Saito, PBW basis of quantized universal enveloping algebras, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 30 (1994) 209–232.