



Probabilités

Relations de récurrence à coefficients aléatoires et lois stables<sup>☆</sup>*Affine stochastic recursions and stable laws*Zhiqiang Gao<sup>a</sup>, Yves Guivarc'h<sup>b</sup>, Émile Le Page<sup>c</sup><sup>a</sup> School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Laboratory of Mathematics and Complex Systems, 100875 Beijing, China<sup>b</sup> IRMAR, université de Rennes-1, campus de Beaulieu, 35042 Rennes cedex, France<sup>c</sup> Laboratoire de mathématiques de Bretagne atlantique, UMR CNRS 6205, université de Bretagne-Sud, campus de Tohannic, BP 573, 56017 Vannes, France

## I N F O A R T I C L E

*Historique de l'article :*

Reçu le 21 novembre 2012

Accepté après révision le 10 janvier 2013

Disponible sur Internet le 1<sup>er</sup> février 2013

Présenté par le Comité de rédaction

## R É S U M É

Nous considérons une relation de récurrence affine multivariée à coefficients aléatoires et la somme de Birkhoff correspondante le long d'une trajectoire. Sous une condition générique pour la loi des coefficients, nous montrons que cette somme, convenablement normalisée, converge en distribution vers une loi stable, qui dépend essentiellement de la partie multiplicative de la relation. La preuve est basée sur les propriétés spectrales de l'opérateur de Markov associé et l'homogénéité à l'infini de la mesure stationnaire.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## A B S T R A C T

We consider a multivariate affine stochastic recursion and the corresponding Birkhoff sum along a trajectory. Under a condition on the law of coefficients which is generic, we show that the above sum, suitably normalized, converges in distribution to a stable law, depending essentially on the multiplicative part of the relation. The proof is based on the spectral properties of the associated Markov operator, and on the homogeneity at infinity of the stationary measure.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Soit  $V$  l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$  muni de son produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$  et de sa norme  $x \rightarrow |x|$ . Notons  $H = \text{Aff}(V)$  (resp.  $G = \text{GL}(V)$ ) le groupe affine (resp. linéaire) de  $V$ . Soit  $\mu$  une probabilité sur  $H$ ,  $\bar{\mu}$  sa projection sur  $G$ . Nous considérons la relation de récurrence

$$X_0 = x, \quad X_{n+1}^x = a_{n+1} X_n^x + b_{n+1} = h_n(X_n^x) \quad (n \geq 0), \quad (1)$$

où  $h_n \in H$  est une suite i.i.d. de loi  $\mu$ . Si  $a_n = \text{Id}$  (resp.  $b_n = 0$ ),  $X_n^x$  est une marche aléatoire additive (resp. multiplicative) sur  $V$  (resp.  $V \setminus \{0\}$ ); certains aspects essentiels de ces processus spéciaux persistent dans le cas général de  $X_n^x$  et fournissent un guide heuristique pour l'étude du cas général. Par ailleurs, pour l'opérateur de Markov défini par (1), et en dehors de toute condition de densité pour  $\mu$ , la conjonction de ces deux processus différents entraîne des propriétés nouvelles, comme le trou spectral pour l'opérateur associé (cf. [1,6]) ou bien l'homogénéité à l'infini de la mesure stationnaire (cf. [4,7]). Nous notons  $\text{supp } \bar{\mu}$  le support de  $\bar{\mu}$  et  $[\text{supp } \bar{\mu}]$  le sous-semigroupe fermé de  $G$  engendré par  $\text{supp } \bar{\mu}$ . Pour une mesure de Radon positive  $\rho$  sur  $V$ , nous définissons la convolution  $\mu * \rho$  de  $\mu$  et  $\rho$  par  $(\mu * \rho)(\phi) = \int \phi(hx) d\mu(h) d\rho(x)$ .

<sup>☆</sup> The project is partially supported by National Nature Science Foundation of China (Grant Nos. 11101039, 11271045) and the Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education (Grant No. 20100003110004).

Adresses e-mail : [gaozq@bnu.edu.cn](mailto:gaozq@bnu.edu.cn) (Z. Gao), [yves.guivarch@univ-rennes1.fr](mailto:yves.guivarch@univ-rennes1.fr) (Y. Guivarc'h), [emile.le-page@univ-ubs.fr](mailto:emile.le-page@univ-ubs.fr) (É. Le Page).

Notre hypothèse C ci-dessous implique que l'équation  $\mu * \eta = \eta$  a une unique solution  $\eta$  qui est une probabilité de support non borné; la loi de  $X_n^x$  définie par la relation de récurrence ci-dessus converge alors vers  $\eta$ . Sous l'hypothèse C, il est observé en [4] et prouvé en [7] que  $\eta$  est « homogène à l'infini », donc appartient au domaine d'attraction d'une loi stable. Nous sommes intéressés ici par le comportement asymptotique en loi de la somme de Birkhoff  $S_n^x = \sum_{k=1}^n X_k^x$  convenablement normalisée, où les variables (dépendantes)  $X_k^x$  sont définies par la relation (1). Pour  $d = 1$ , cette question est reliée à la propriété de diffusion lente en milieu aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  (cf. [11]); elle a déjà été étudiée en [6] si  $d = 1$ . Pour  $d$  arbitraire, et  $\text{supp } \bar{\mu}$  formé de similitudes, la convergence vers une loi semi-stable au sens de [9] a été obtenue en [1]. Ici nous supposons  $d \geq 2$ . Nous disons qu'un semigroupe fermé  $\Gamma \subset G$  satisfait la condition  $i$ - $p$  si :

- a)  $\Gamma$  ne laisse invariante aucune réunion finie de sous-espaces stricts de  $V$ ,
- b)  $\Gamma$  contient au moins un élément  $\gamma$  ayant une unique valeur propre simple  $\lambda_\gamma$  telle que

$$|\lambda_\gamma| = \lim_{n \rightarrow \infty} |\gamma^n|^{1/n}.$$

Alors  $\Gamma$  vérifie la propriété  $i$ - $p$  si et seulement si son adhérence de Zariski la vérifie [10]. L'ensemble des probabilités  $\rho$  sur  $G$  telles que  $[\text{supp } \rho]$  vérifie la condition  $i$ - $p$  est un ouvert dense en topologie vague. De plus, la condition  $i$ - $p$  entraîne que l'ensemble des modules des valeurs propres dominantes  $\lambda_\gamma$  des éléments de  $\Gamma$  engendre un sous-groupe dense du groupe multiplicatif  $\mathbb{R}_+$ , ce qui garantira plus bas l'apériodicité de la convolution par  $\bar{\mu}$  sur  $V$ . Posons pour  $a \in G$  :  $v(a) = \sup(|a|, |a^{-1}|)$  et pour  $s \geq 0$  :  $\kappa(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbb{E}(|a_n \dots a_1|^s))^{1/n}$ ,  $s_\infty = \sup\{s \geq 0; \kappa(s) < \infty\}$  et supposons  $s_\infty > 0$ ,  $\mathbb{E}(|\log |a||) < \infty$ . Alors le plus grand exposant de Lyapunov  $L(\bar{\mu})$  existe et vérifie :

$$L(\bar{\mu}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}(\log |a_n \dots a_1|) = \kappa'(0_+).$$

Si, de plus, le semigroupe  $[\text{supp } \bar{\mu}]$  vérifie la condition  $i$ - $p$ , la fonction  $\log \kappa(s)$  est strictement convexe sur  $[0, s_\infty)$ ; si  $\lim_{s \rightarrow s_\infty} \kappa(s) > 1$ , il existe un unique  $\alpha \in [0, s_\infty)$  tel que  $\kappa(\alpha) = 1$ . Ici notre hypothèse est la condition C suivante :

- C<sub>1</sub>  $[\text{supp } \bar{\mu}]$  satisfait la condition  $i$ - $p$ ,
- C<sub>2</sub>  $s_\infty > 0$ ,  $L(\bar{\mu}) < 0$  et il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\kappa(\alpha) = 1$ ,
- C<sub>3</sub>  $\mathbb{E}(v(a)^{\alpha+\delta} + |b|^{\alpha+\delta}) < \infty$  pour un  $\delta > 0$ ,
- C<sub>4</sub> le support de  $\mu$  n'a pas de point fixe dans  $V$ .

Avant de formuler le théorème, nous précisons la propriété d'homogénéité à l'infini de  $\eta$ . Pour  $t > 0$  nous notons  $\rho \rightarrow t \cdot \rho$  l'extension aux mesures de  $x \rightarrow tx$ . Pour  $s > 0$ , nous considérons la mesure homogène sur  $\mathbb{R}_+$  définie par  $\ell^s(dt) = \frac{dt}{t^{s+1}}$ . Si  $\mathbb{S}^{d-1}$  désigne la sphère unité de  $V$  nous considérons la décomposition de  $V$  en coordonnées polaires  $V \setminus \{0\} = \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}_+$ . Alors, sous la condition C, on a d'après [7], en convergence vague :

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} t^{-\alpha}(t \cdot \eta) = c\sigma_\alpha \otimes \ell^\alpha = \Lambda,$$

où  $c > 0$  et  $\sigma_\alpha$  est une probabilité sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ , relation qui exprime l'homogénéité à l'infini de  $\eta$ . Ici  $\Lambda$  est bien définie par cette convergence et vérifie  $t \cdot \Lambda = t^\alpha \Lambda$  ( $t > 0$ ),  $\bar{\mu} * \Lambda = \Lambda$ . Si  $[\text{supp } \bar{\mu}]$  ne laisse pas de cône convexe propre invariant, alors  $\Lambda$  est symétrique et  $\sigma_\alpha$  est l'unique probabilité sur  $\mathbb{S}^{d-1}$  définie par la condition :

$$\bar{\mu} * (\sigma_\alpha \otimes \ell^\alpha) = \sigma_\alpha \otimes \ell^\alpha.$$

Dans tous les cas la projection  $\bar{\sigma}_\alpha$  de  $\sigma_\alpha$  sur l'espace projectif  $\mathbb{P}^{d-1}$  est uniquement définie par l'équation précédente, est de dimension strictement positive et son support est l'ensemble limite du semigroupe  $[\text{supp } \bar{\mu}]$  dans  $\mathbb{P}^{d-1}$  (cf. [5]).

Nous notons  $g^*$  la transposée de  $g$ ,  $\bar{\mu}^*$  l'image de  $\bar{\mu}$  par  $g \rightarrow g^*$ ,  $w^*$  la forme linéaire duale de  $w \in V$ . Le calcul de la loi limite de  $S_n^x$  utilisera la relation de récurrence (1') suivante :

$$Y_0 = y, \quad Y_{n+1} = a_n^*(Y_n + v), \tag{1'}$$

où  $v \in V \setminus \{0\}$  est un vecteur fixé. Alors, comme ci-dessus la probabilité stationnaire associée  $\eta_v$  satisfait la convergence vague sur  $V \setminus \{0\}$  :

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} t^{-\alpha}(t \cdot \eta_v) = \Delta_v \neq 0,$$

avec  $\Delta_{tv} = t \cdot \Delta_v = t^\alpha \Delta_v$  pour  $t > 0$ . Nous notons  $\mathcal{X}_x(y)$  l'exponentielle de Fourier  $\mathcal{X}_x(y) = e^{i\langle x, y \rangle}$  et si  $\alpha \in [0, 2]$ , nous définissons la « transformée de Fourier »  $\tilde{\Lambda}$  de  $\Lambda$  par

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(y) &= \int (\mathcal{X}_y(x) - 1) d\Lambda(x), \quad \text{si } 0 < \alpha < 1, \\ \tilde{\Lambda}(y) &= \int \left( \mathcal{X}_y(x) - 1 - i \frac{\langle x, y \rangle}{1 + |\langle x, y \rangle|^2} \right) d\Lambda(x), \quad \text{si } \alpha = 1, \\ \tilde{\Lambda}(y) &= \int (\mathcal{X}_y(x) - 1 - i \langle x, y \rangle) d\Lambda(x), \quad \text{si } 1 < \alpha < 2, \\ \tilde{\Lambda}(y) &= -\frac{1}{4} \int \langle y, x \rangle^2 d\sigma_2(x), \quad \text{si } \alpha = 2. \end{aligned}$$

La fonction  $\tilde{\Lambda}$  est  $\tilde{\mu}^*$ -harmonique et satisfait :  $\tilde{\Lambda}(ty) = t^\alpha \tilde{\Lambda}(y)$  pour  $t > 0$ . Nous utilisons aussi la fonction  $\tilde{\Lambda}^1$  définie par  $\tilde{\Lambda}^1(y) = \tilde{\Lambda}(\tilde{y}) \mathbf{1}_{[1, \infty)}(|y|)$ , où  $\tilde{y}$  est la projection de  $y \in V \setminus \{0\}$  sur  $\mathbb{S}^{d-1}$  ainsi que le nombre  $m_\alpha = \kappa'(\alpha)$ . Nous disons qu'une probabilité  $\rho$  sur  $V$  est  $\alpha$ -stable si sa transformée de Fourier  $\hat{\rho}(v) = \rho(\mathcal{X}_v)$  est telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe  $c_n \in V$  avec  $\hat{\rho}^n(v) = \hat{\rho}(n^{1/\alpha} v) \mathcal{X}_v(c_n)$ . On verra que la transformée de Fourier de la loi limite de  $S_n^x$  pour  $\alpha \in [0, 2]$  est égale à  $e^{C_\alpha(v)} = \Phi_\alpha(v)$  avec  $C_\alpha(v)$  définie négative et vérifiant :

$$C_\alpha(v) = \begin{cases} \alpha m_\alpha \Delta_v(\tilde{\Lambda}^1), & \text{si } \alpha \in (0, 1) \cup (1, 2]; \\ m_1 \Delta_v(\tilde{\Lambda}^1) + i\gamma(v), & \text{si } \alpha = 1, \end{cases}$$

où  $\gamma(v)$  est une intégrale de fonction rationnelle. Si  $\alpha > 2$ , la covariance  $q$  de  $\eta$  interviendra dans les formules. Si  $\alpha > 1$  on notera  $m = \int x d\eta(x)$ ,  $z = \int a d\tilde{\mu}(a)$ . On voit que le rayon spectral de  $z$  est inférieur à  $\kappa(\alpha) = 1$ , en particulier  $I - z^*$  est inversible. On a alors le théorème.

**Théorème.** *Supposons que la probabilité  $\mu$  sur le groupe affine  $H$  de  $\mathbb{R}^d$  satisfasse la condition C et que  $d \geq 2$ . Alors pour tout  $x \in V$  :*

1) Si  $\alpha > 2$ , la suite  $\frac{1}{\sqrt{n}}(S_n^x - nm)$  converge en loi vers la loi normale sur  $V$  de transformée de Fourier

$$\Phi_{2+}(v) = \exp(-q(v, v)/2 - q(v, (I - z^*)^{-1} z^* v)).$$

2) Si  $\alpha \in (0, 2)$ , posons  $t_n = n^{-1/\alpha}$  and  $d_n = \begin{cases} 0, & \alpha \in (0, 1); \\ n\delta(t_n), & \alpha = 1; \\ nt_n m, & \alpha \in (1, 2), \end{cases}$  avec  $\delta(t) = \int_V \frac{tx}{1+|tx|^2} d\eta(x)$  pour  $t > 0$ . Alors  $(t_n S_n^x - d_n)$

converge en loi vers la loi  $\alpha$ -stable de transformée de Fourier  $\Phi_\alpha(v) = \exp(C_\alpha(v))$ .

De plus si  $\alpha = 1$ , et avec une constante  $K > 0$ ,  $|\delta(t)|$  est bornée par  $Kt|\log t|$  pour  $t \leq 1/2$ ,  $Kt$  pour  $t > 1/2$ .

3) Si  $\alpha = 2$ , alors  $\frac{1}{\sqrt{n \log n}}(S_n^x - nm)$  converge en loi vers la loi normale sur  $V$  de transformée de Fourier  $\Phi_2(v) = \exp(C_2(v))$ , où

$$C_2(v) = -\frac{1}{4} \int \langle v, w \rangle^2 + 2 \langle v, w \rangle \eta_v(w^*) d\sigma_2(w).$$

4) Dans tous les cas la loi limite de  $S_n^x$  normalisée est totalement non dégénérée.

L'expression détaillée de  $C_\alpha$  montre que, en général et pour  $0 < \alpha < 2$ , la loi stable limite du théorème diffère de celle qui correspondrait à une somme normalisée de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi stationnaire de la relation (1), contrairement aux sommes étudiées en [9] et associées aux quotients partiels du développement en fraction continue. Afin de prouver le théorème, on utilise l'opérateur de Fourier sur  $V$ , défini par  $P_v \varphi(x) = \mathbb{E}(\langle \mathcal{X}_v \varphi, X_1^x \rangle)$  et on a  $P_v^n \varphi(x) = \mathbb{E}(\langle \mathcal{X}_v(S_n^x) \varphi, X_n^x \rangle)$ . Sur un certain espace de Banach de fonctions Höldériennes à croissance polynomiale, on peut utiliser le théorème spectral de Ionescu-Tulcea et Marinescu ([8]) pour l'opérateur  $P_v$  et développer en puissances fractionnaires de  $|v|$  pour  $|v|$  petit, sa valeur propre dominante  $k(v)$ . Le théorème en résulte. L'existence de cette asymptotique de  $k(v)$  est basée sur la propriété d'homogénéité à l'infini de  $\eta$  et  $\eta_v$  (cf. [4,7]), ainsi que sur la propriété de trou spectral pour  $P_0$  (cf. [1,4,6]). Dans le cas où  $\tilde{\mu}$  domine une densité sur  $G$  et où  $\text{supp } \tilde{\mu}$  ne laisse pas de cône convexe invariant, un résultat voisin a été obtenu récemment en [2], en utilisant les méthodes des chaînes de Harris. Observons ici que pour  $d \geq 2$  et contrairement à la condition de [2], la condition C est stable par perturbation en topologie faible de  $\mu$ . Il en est de même du théorème, et les lois semi-stables associées à la périodicité éventuelle de  $\tilde{\mu}$  n'apparaissent donc pas ici par perturbation comme c'est le cas dans la Réf. [1]. Pour les preuves détaillées, nous renvoyons à [3].

### Références

[1] D. Buraczewski, E. Damek, Y. Guivarc'h, Convergence to stable laws for a class of multidimensional stochastic recursions, Probab. Theory Related Fields 148 (2010) 333–402.  
 [2] E. Damek, S. Mentemeier, M. Mirek, J. Zienkiewicz, Convergence to stable laws for multidimensional stochastic recursions: the case of regular matrices, Potential Anal. (2012), <http://dx.doi.org/10.1007/s11118-012-9292-y>, online first.  
 [3] Z. Gao, Y. Guivarc'h, E. Le Page, Stable laws and spectral gap properties for affine random walks, preprint, arXiv:1108.3146.  
 [4] Y. Guivarc'h, Heavy Tail Properties of Stationary Solutions of Multidimensional Stochastic Recursions, Dynamics & Stochastics, IMS Lecture Notes Monogr. Ser., vol. 48, Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, 2006, pp. 85–99.

- [5] Y. Guivarc'h, Produits de matrices aléatoires et applications aux propriétés géométriques des sous-groupes du groupe linéaire, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 10 (1990) 483–512.
- [6] Y. Guivarc'h, E. Le Page, On spectral properties of a family of transfer operators and convergence to stable laws for affine random walks, *Ergodic Theory Dynam. Systems* 28 (2008) 423–446.
- [7] Y. Guivarc'h, E. Le Page, Spectral gap properties and asymptotics of stationary measures for affine random walks, preprint, arXiv:1204.6004v1.
- [8] C.T. Ionescu Tulcea, G. Marinescu, Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues, *Ann. of Math.* 52 (1950) 140–147.
- [9] P. Lévy, Théorie de l'addition des variables aléatoires, 2nd edn., Gauthier-Villars, Paris, 1954.
- [10] G. Prasad,  $\mathbf{R}$ -regular elements in Zariski-dense subgroups, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* 45 (1994) 541–545.
- [11] F. Solomon, Random walks in a random environment, *Ann. Probab.* 3 (1975) 1–31.