



Géométrie algébrique

Systèmes d'équations polynomiales pour les revêtements hyperelliptiques d -osculants

Systems of polynomial equations for hyperelliptic d -osculating covers

Armando Treibich ^{a,b,c}^a Université Lille-Nord-de-France, 59000 Lille, France^b UArtois, laboratoire de mathématique de Lens, EA2462, fédération CNRS Nord-Pas-de-Calais FR 2956, faculté des sciences Jean-Perrin, rue Jean-Souvraz, S.P. 18, 62300 Lens, France^c Investigador PEDECIBA, Universidad de la República – Regional Norte, Montevideo, Uruguay

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 23 novembre 2012

Accepté après révision le 18 janvier 2013

Disponible sur Internet le 4 février 2013

Présenté par le Comité de rédaction

R É S U M É

Soit X une courbe projective lisse de genre 1 donnée, définie sur un corps \mathbb{K} de caractéristique $\mathfrak{p} \neq 2$. Pour tout entier positif n , on considère l'espace des modules $H(X, n)$ de revêtements finis et séparables de X par une courbe hyperelliptique, marquée en un triplet de points de Weierstrass. On paramétrise d'abord $H(X, n)$ par un sous-espace des fractions rationnelles de degré n , obtenant une caractérisation polynomiale de ceux ayant ordre d'osculant d ($d \geq 1$). On en déduit, par la suite, des systèmes d'équations polynomiales dont les solutions donnent tous les revêtements hyperelliptiques d -osculants.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

Let X denote a fixed smooth projective curve of genus 1, defined over an algebraically closed field \mathbb{K} of arbitrary characteristic $\mathfrak{p} \neq 2$. For any positive integer n , we will consider the moduli space $H(X, n)$ of degree- n finite separable covers of X by a hyperelliptic curve marked at a triplet of Weierstrass points. We start parameterizing $H(X, n)$ by a suitable space of rational fractions, obtaining a polynomial characterization of those having order of osculation d ($d \geq 1$). We then deduce systems of polynomial equations, whose set of solutions codifies all degree- n hyperelliptic d -osculating covers of X .

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let $\mathbb{P}^1 := \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ and (X, ω_0) denote the projective line and a fixed elliptic curve, both defined over an algebraically closed field \mathbb{K} of characteristic $\mathfrak{p} \neq 2$. We fix $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, an ordered triplet of half-periods of (X, ω_0) , and let $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ denote the unique degree-2 projection such that $\varphi_X((\omega_0, \omega_1, \omega_2)) = (\infty, 0, 1)$. The latter is given in affine coordinates by $\{y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \rightarrow \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto x$, with $\lambda := \varphi_X(\omega_3) \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$, completed with $\omega_0 \mapsto \infty$.

We will study all finite separable triply marked morphisms $\pi : (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$, called henceforth *hyperelliptic covers*, such that Γ is a smooth hyperelliptic curve and the hyperelliptic involution $\tau_\Gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma$ fixes $\{p, p', p''\}$. We let $\varphi_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$ denote the unique degree-2 projection such that $\varphi_\Gamma((p, p', p'')) = (\infty, 0, 1)$. Modulo translation, one can always assume that

Adresse e-mail : treibich@cmat.edu.uy.

$\pi(p) = \omega_0$, in which case all Weierstrass points (fixed by τ_Γ) project into the set of $\frac{1}{2}$ -periods of (X, ω_0) . For any $n > 0$, we will let $H(X, n)$ denote the moduli space of such covers of degree n .

Given any genus- g hyperelliptic cover $\pi : (\Gamma, p, p'p'') \rightarrow X$, we have on one hand the canonical Abel embedding of Γ into its Jacobian $A_p : \Gamma \rightarrow \text{Jac } \Gamma$, and the flag $\{0\} \subsetneq V_{\Gamma,p}^1 \subsetneq \dots \subsetneq V_{\Gamma,p}^g = H^1(\Gamma, \mathcal{O}_\Gamma)$ of hyperosculating spaces to $A_p(\Gamma)$ at $A_p(p) \in \text{Jac } \Gamma$ [3]. On the other hand, we also have the group homomorphism $\iota_\pi : X \rightarrow \text{Jac } \Gamma$, $\omega \mapsto \iota_\pi(\omega) := \mathcal{O}_\Gamma(\pi^*(\omega - \omega_0))$.

Definition. For any hyperelliptic cover $\pi : (\Gamma, p, p'p'') \rightarrow X$, there exists a smallest positive integer d such that the tangent line to $\iota_\pi(X)$ is contained in $V_{\Gamma,p}^d$. We call it the osculating order of π , and π a hyperelliptic d -osculating cover [3].

Proposition. Any hyperelliptic cover $\pi : (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$ can be pushed down to a unique separable morphism $R : \infty \in \mathbb{P}^1 \rightarrow \infty \in \mathbb{P}^1$, satisfying $R \circ \varphi_\Gamma = \varphi_X \circ \pi$, with odd ramification indices at $(\infty, 0, 1)$, and such that $R(0), R(1) \in \{\infty, 0, 1, \lambda\}$.

We recover π by desingularizing the fiber product of R and φ_X .

Corollary. Any morphism R as above corresponds to a unique fraction $\frac{P}{Q}$ with coprime polynomials (P, Q) , such that Q is monic, $\deg P = n$, $\rho := \deg P - \deg Q$ is an odd positive integer and $PQ(P - Q)(P - \lambda Q)$ has odd vanishing order at $\{0, 1\}$.

A similar result has already popped up in [1] and [2], for any genus-2 cover of an elliptic curve X , and the corresponding morphism R been called a Frey–Kani covering. Given any $\pi \in H(X, n)$ and its associated fraction $R(t) := \frac{P(t)}{Q(t)}$, we will consider the factorizations $P = cA_1B_1^2$, $Q = A_0B_0^2$, $P - Q = cA_2B_2^2$, $P - \lambda Q = cA_3B_3^2$, with monic polynomials $\{A_i, B_i\}$, such that $\prod_i A_i$ has no multiple root.

The projection φ_X is represented as follows:

$$\{(x, y) \in \mathbb{K}^2, y^2 = x(x - 1)(x - \lambda)\} \rightarrow \mathbb{K}, \quad (x, y) \in \mathbb{K}^2 \mapsto x, \quad \omega_0 \mapsto \infty.$$

Moreover, $\Gamma \setminus \{p\}$ is isomorphic to the affine curve $\{(t, v) \in \mathbb{K}^2, v^2 = c^3 \prod_i A_i(t)\}$ and outside $\pi^{-1}(\omega_0)$, π is isomorphic to

$$(t, v) \mapsto (x, y) := \left(\frac{P(t)}{Q(t)}, \frac{v \prod_i B_i(t)}{Q(t)^2} \right).$$

Definition. We will let $H_{(m_i)}^\rho \text{Os}^d(X, n) \subset H(X, n)$ denote the submoduli space made of those satisfying $\deg P - \deg Q = \rho$ and $\deg A_i = m_i, \forall i = 0, \dots, 3$. All together, they define a natural stratification $H(X, n) = \bigcup_{\rho, d, (m_i)} H_{(m_i)}^\rho \text{Os}^d(X, n)$.

The latter numerical invariants and the genus g satisfy [4, 4.3., 4.4.]:

- (1) ρ is odd and $\rho < 2d + 1 \leq 2g + 1 = \sum_{i=0}^3 m_i \leq 4n - \rho$,
- (2) $m_0 + 1 \equiv m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv n \pmod{2}$,
- (3) $\sum_{i=0}^3 m_i^2 \leq 2(2d - 1)(n - 1) + 4 - \rho^2$,
- (4) and $2g + 1 \leq \mathbf{p}(2d - 1)$ if $\mathbf{p} := \text{char}(\mathbb{K}) > 2$.

Recall at last that π is a hyperelliptic d -osculating cover if and only if there exists a d -osculating function $\kappa : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$. The latter is τ_Γ -anti-invariant and has poles only at $\pi^{-1}(\omega_0)$, while $\kappa + \pi^*(\frac{1}{z})$ is holomorphic at $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus \{p\}$ (z being a local coordinate of X at ω_0) and has a pole of order $2d - 1$ at $p \in \Gamma$ [3].

We will pick hereafter $z := \frac{x}{y}$, hence $\pi^*(\frac{1}{z}) = \frac{v \prod_i B_i}{QP} = \frac{v B_2 B_3}{c A_0 B_0 A_1 B_1}$ according to the preceding identifications and factorizations.

Lemma (d -Osculating polynomial criterion). Any $\pi \in H(X, n)$ has osculating order d if and only if there exists a polynomial T of degree $\frac{1}{2}(n + m_1 + 2d - 2g - 2)$, such that $A_1 B_1$ divides $T A_0 B_0 - B_2 B_3$. In the latter case the d -osculating function is equal to $\kappa = \frac{v(T A_0 B_0 - B_2 B_3)}{c A_0 B_0 A_1 B_1}$.

Theorem. For any $n, d, g, \rho \in \mathbb{N}^*$ and $(m_i) \in \mathbb{N}^4$ as above, there exists a polynomial system of $N := \frac{1}{2}(5n + 4 + m_1)$ equations in an open dense subset of $\mathbb{K}^{N + \frac{1}{2}(2d - 1 - \rho)}$, such that its set of solutions parameterizes the strata $H_{(m_i)}^\rho \text{Os}^d(X, n)$.

Proof. Consider $c \in \mathbb{K}$ and two arbitrary sequences of monic polynomials, $\{A_i, B_i, i = 0, \dots, 3\}$, such that $\deg A_i = m_i$ and $\deg B_i^2 = n - m_i - \rho \delta_{i,0}$ for any $i = 0, \dots, 3$, as well as a polynomial T of degree $\frac{1}{2}(n + m_1 + 2d - 2g - 2)$. These data depend upon

$$1 + \sum_i \deg(A_i B_i) + \deg(T) + 1 = \frac{1}{2}(5n + 4 + m_1 + 2d - 1 - \rho)$$

variables, and will be subject to the following set of $\frac{1}{2}(5n + 4 + m_1)$ equations:

$$\begin{cases} cA_1B_1^2 - A_0B_0^2 = cA_2B_2^2, & cA_1B_1^2 - \lambda A_0B_0^2 = cA_3B_3^2, \\ t(t-1) \text{ divides } \Pi_i A_i & \text{and } A_1B_1 \text{ divides } TA_0B_0 - B_2B_3, \end{cases}$$

plus the open conditions:

$$c \neq 0, \quad \text{disc}(\Pi_i A_i) \neq 0 \quad \text{and} \quad \text{resultant}(P, Q) \neq 0.$$

Given $\pi \in H(X, n)$ corresponding to the rational fraction $\frac{P}{Q} := \frac{cA_1B_1^2}{A_0B_0^2}$, we let M denote the quotient of $TA_0B_0 - B_2B_3$ by cA_1B_1 . Then π has Weierstrass type (m_i) and ramification index ρ at p , the first marked Weierstrass point. Moreover, $\kappa := \frac{vM}{A_0B_0}$ is a d -osculating function for π [3]. In other words, $\pi \in H_{(m_i)}^\rho \text{Os}^d(X, n)$.

Conversely, given $\pi \in H_{(m_i)}^\rho \text{Os}^d(X, n)$, we consider its associated rational fraction $R := \frac{P}{Q}$ together with the canonical factorizations $P = cA_1B_1^2$, $Q = A_0B_0^2$, $P - Q = cA_2B_2^2$ and $P - \lambda Q = cA_3B_3^2$. Needless to say, they satisfy the equations

$$cA_1B_1^2 - A_0B_0^2 = cA_2B_2^2, \quad cA_1B_1^2 - \lambda A_0B_0^2 = cA_3B_3^2.$$

Moreover, $t(t-1)$ divides $\Pi_i A_i$ and, according to the preceding Lemma, there must exist a polynomial T of degree $\frac{1}{2}(n + m_1 + 2d - 2g - 2)$ such that A_1B_1 divides $TA_0B_0 - B_2B_3$. Hence, $\kappa := \frac{vT}{cA_1B_1} - \frac{vB_2B_3}{cA_0B_0A_1B_1}$ is a d -osculating function for π . In other words, any $\pi \in H(X, n)$ corresponds to a unique solution of one of the systems of equations (and open conditions) mentioned above. \square

1. Revêtements hyperelliptiques d -osculants

Soient $\mathbb{P}^1 := \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ et (X, ω_0) , la droite projective et une courbe elliptique donnée, toutes deux définies sur un corps \mathbb{K} de caractéristique $p \neq 2$. Étant donné $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, un triplet ordonné de demi-périodes de (X, ω_0) , nous désignerons par $\varphi_X : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ l'unique projection de degré 2 telle que $\varphi_X((\omega_0, \omega_1, \omega_2)) = (\infty, 0, 1)$.

Si on note $\lambda := \varphi_X(\omega_3) \in \mathbb{K} \setminus \{0, 1\}$, la projection φ_X est donnée en coordonnées affines par $\{y^2 = x(x-1)(x-\lambda)\} \rightarrow \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto x$, et complétée par $\omega_0 \mapsto \infty$.

Nous allons étudier tous les revêtements pointés finis et séparables de (X, ω_0) , $\pi : (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X$, appelés *revêtements hyperelliptiques*, tels que Γ est une courbe hyperelliptique lisse, marquée en un triplet de points fixés par l'involution hyperelliptique $\tau_\Gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Nous désignerons par $\varphi_\Gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$ l'unique projection de degré 2 telle que $\varphi_\Gamma((p, p', p'')) = (\infty, 0, 1)$. Modulo translation dans (X, ω_0) on peut toujours supposer que $\pi(p) = \omega_0$, auquel cas tous les points de Weierstrass de Γ (fixés par τ_Γ) se projettent dans $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Quel que soit $n > 0$, nous noterons $H(X, n)$ l'espace de modules de tels revêtements de degré n .

À tout $(\pi : (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow X) \in H(X, n)$ on associe le plongement canonique d'Abel $A_p : \Gamma \rightarrow \text{Jac } \Gamma$, $r \mapsto O_\Gamma(r - p)$, de même que l'homomorphisme de groupes $\iota_\pi : X \rightarrow \text{Jac } \Gamma$, $\omega \mapsto O_\Gamma(\pi^*(\omega - \omega_0))$. On lui associe également le drapeau $\{0\} \subsetneq V_{\Gamma, p}^1 \subsetneq \dots \subsetneq V_{\Gamma, p}^g = H^1(\Gamma, O_\Gamma)$ de *sous-espaces hyperosculateurs* en $A_p(p) \in A_p(\Gamma)$ [3], g étant le genre de Γ .

Définition. Quel que soit $\pi \in H(X, n)$, il existe un plus petit entier $d > 0$ tel que la tangente à l'image $\iota_\pi(X)$ soit contenue dans le sous-espace $V_{\Gamma, p}^d$. On dira alors que π est un revêtement hyperelliptique d -osculant (et d son ordre d'osculant).

Proposition. Tout revêtement hyperelliptique $\pi \in H(X, n)$ donne lieu à un unique morphisme séparable de degré n , $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, aux indices de ramification impairs en $\{\infty, 0, 1\}$, tel que $R(\infty) = \infty$ et $R(0), R(1) \in \{\infty, 0, 1, \lambda\}$.

Réciproquement, après désingularisation le produit fibré d'un tel morphisme R avec φ_X donne lieu au revêtement hyperelliptique $\pi \in H(X, n)$.

Proposition. Tout morphisme R comme ci-dessus s'identifie à une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$, où (P, Q) est un couple de polynômes premiers entre eux, tels que Q est unitaire, $\deg P = n$, $\rho := \deg P - \deg Q$ est un entier impair positif et le produit $PQ(P - Q)(P - \lambda Q)$ s'annule à un ordre de multiplicité impaire en $\{0, 1\}$.

Un résultat analogue fut obtenu dans [1] et [2], pour tout revêtement de genre 2 d'une courbe elliptique X , et le morphisme R correspondant appelé revêtement de Frey-Kani. Soient $P = cA_1B_1^2$, $Q = A_0B_0^2$, $P - Q = cA_2B_2^2$ et $P - \lambda Q = cA_3B_3^2$, avec $c \in \mathbb{K}^*$, les uniques factorisations en produit de polynômes unitaires tels que A_i n'a que des racines simples ($\forall i = 0, \dots, 3$). Le vecteur $(m_i) := (\deg A_i) \in \mathbb{N}^4$, appelé *type de Weierstrass* de π , donne le nombre de points de Weierstrass de Γ , autres que p , au dessus du vecteur de demi-périodes $(\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3) := \varphi_X^{-1}((\infty, 0, 1, \lambda))$.

La courbe affine $\Gamma \setminus \{p\}$ est isomorphe à $\{(t, v) \in \mathbb{K}^2, v^2 = c^3 \Pi_i A_i(t)\}$, tandis qu'en dehors de $\pi^{-1}(\omega_0)$ la projection π est isomorphe à

$$(t, v) \in \Gamma \setminus \pi^{-1}(\omega_0) \mapsto (x, y) := \left(\frac{P}{Q}, \frac{v \Pi_i B_i}{Q^2} \right) \in X \setminus \{\omega_0\}.$$

Définition. On note $H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n)$ le sous-espace de modules formé par tous les revêtements hyperelliptiques $(\pi : (\Gamma, p, p', p'') \rightarrow (X, \omega_0)) \in H(X, n)$ ayant ordre d'osculation d , indice de ramification ρ en p et type de Weierstrass (m_i) . On en déduit une stratification naturelle $H(X, n) = \bigcup_{\rho, d, (m_i)} H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n)$.

Les invariants numériques $n, d, \rho, g \in \mathbb{N}^*$ et $(m_i) \in \mathbb{N}^4$ associés à tout revêtement hyperelliptique $\pi \in H(X, n)$ ne sont pas arbitraires. En effet, ils satisfont les (in)-égalités suivantes [4, 4.3., 4.4.] :

- (1) ρ est impair et $\rho < 2d + 1 \leq 2g + 1 = \sum_{i=0}^3 m_i \leq 4n - \rho$,
- (2) $m_0 + 1 \equiv m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv n \pmod{2}$,
- (3) $\sum_{i=0}^3 m_i^2 \leq 2(2d - 1)(n - 1) + 4 - \rho^2$,
- (4) et $2g + 1 \leq \mathbf{p}(2d - 1)$ si $\mathbf{p} := \text{char}(\mathbb{K}) > 2$.

Rappelons également que π a ordre d'osculation d si et seulement s'il existe une fonction d -osculante. Il s'agit d'une fonction $\kappa : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^1$, τ_Γ -anti-invariante et holomorphe en dehors de $\pi^{-1}(\omega_0)$, telle que $\kappa + \pi^*(\frac{1}{z})$ soit holomorphe au voisinage de $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus p$, z étant une coordonnée locale de X en ω_0 [3]. Compte tenu des identifications et factorisations choisies précédemment, nous notons ci-après $z := \frac{x}{y}$. Nous obtenons alors $\pi^*(\frac{1}{z}) = \pi^*(\frac{y}{x}) = \frac{v\Pi_i B_i}{PQ} = \frac{vB_2 B_3}{cA_0 B_0 A_1 B_1}$.

Lemme (Critère polynomial d'osculation à l'ordre d). Le revêtement hyperelliptique $\pi \in H(X, n)$ est d -osculant si et seulement s'il existe un polynôme T de degré $\frac{1}{2}(n + m_1 + 2d - 2g - 2)$ tel que $A_1 B_1$ divise $T A_0 B_0 - B_2 B_3$. Dans ce cas, la fonction d -osculante est égale à $\kappa := \frac{v(T A_0 B_0 - B_2 B_3)}{c A_0 B_0 A_1 B_1}$.

Preuve. La fonction d -osculante κ associée à π est τ_Γ -anti-invariante, holomorphe en dehors de $\pi^{-1}(\omega_0)$ et telle que $\kappa + \pi^*(\frac{1}{z})$ est holomorphe au voisinage de $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus \{p\}$. Il s'ensuit que κ s'annule en tout point de Weierstrass situé en dehors de $\pi^{-1}(\omega_0)$, et est équivalente à $\pi^*(\frac{1}{z})$ en tout point de $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus \{p\}$.

D'autre part $\kappa_0 := \frac{v}{A_0 B_0}$ est aussi τ_Γ -anti-invariante et équivalente à $\pi^*(\frac{1}{z})$ en tout point de $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus \{p\}$ (car $\kappa_0 \pi^*(z) = \frac{PQ}{A_0 B_0 \Pi_i B_i} = \frac{P}{B_1 B_2 B_3}$ y est inversible).

Remarquons aussi qu'en dehors de $\pi^{-1}(\omega_0)$, κ_0 s'annule uniquement et à l'ordre 1, en tout point de Weierstrass. Il en résulte que $\frac{\kappa}{\kappa_0}$ est τ_Γ -invariante et holomorphe en dehors du point p . Il existe donc un polynôme $M(t)$ tel que $\kappa = \kappa_0 M = \frac{vM}{A_0 B_0}$, d'où $\kappa + \pi^*(\frac{1}{z}) = \frac{vM}{A_0 B_0} + \frac{v\Pi_i B_i}{PQ} = \frac{vM}{A_0 B_0} + \frac{vB_2 B_3}{cA_0 B_0 A_1 B_1} = \frac{v(cMA_1 B_1 + B_2 B_3)}{cA_0 B_0 A_1 B_1}$.

Cette dernière est holomorphe sur un voisinage de $\pi^{-1}(\omega_0) \setminus p$ si et seulement si $A_0 B_0$ divise $cMA_1 B_1 + B_2 B_3$. Autant dire que $cMA_1 B_1 + B_2 B_3 = T A_0 B_0$ et $\kappa + \pi^*(\frac{1}{z}) = \frac{vT}{cA_1 B_1}$. Finalement on vérifie que $\deg T = \frac{1}{2}(n + m_1 + 2d - 2g - 2)$, compte tenu du fait que $\kappa + \pi^*(\frac{1}{z})$ et v ont, respectivement, des pôles d'ordre $2d - 1$ et $2g + 1$ en p . \square

Théorème. Pour tout $n, d, \rho, g \in \mathbb{N}^*$ et $(m_i) \in \mathbb{N}^4$ comme ci-dessus, il existe un système de $N := \frac{1}{2}(5n + 4 + m_1)$ équations polynomiales, dans un ouvert dense de $\mathbb{K}^{N + \frac{1}{2}(2d - 1 - \rho)}$, dont les solutions paramétrisent la strate $H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n)$.

Preuve. Étant donné $\pi \in H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n)$ et la fraction rationnelle associée $R := \frac{P}{Q}$, nous savons que les factorisations $P = cA_1 B_1^2$, $Q = A_0 B_0^2$, $P - Q = cA_2 B_2^2$ et $P - \lambda Q = cA_3 B_3^2$ satisfont les équations

$$cA_1 B_1^2 - A_0 B_0^2 = cA_2 B_2^2, \quad cA_1 B_1^2 - \lambda A_0 B_0^2 = cA_3 B_3^2.$$

De plus, $t(t - 1)$ divise $\Pi_i A_i$ et, d'après le Lemme ci-dessus, il existe un polynôme T de degré $\frac{1}{2}(n + \deg A_1 + 2d - 2g - 2)$ tel que $A_1 B_1$ divise $T A_0 B_0 - B_2 B_3$.

Réciproquement, considérons $c \in \mathbb{K}$, des polynômes unitaires $\{A_i, B_i, i = 0, \dots, 3\}$ tels que $\deg A_i = m_i$ et $\deg B_i^2 = n - m_i - \rho \delta_{i,0}$, ainsi qu'un polynôme T de degré $\deg T = \frac{1}{2}(n + \deg A_1 + 2d - 2g - 2)$. Ces données dépendent de $N + \frac{1}{2}(2d - 1 - \rho)$ variables et sont supposées satisfaire les N équations :

$$\begin{cases} cA_1 B_1^2 - A_0 B_0^2 = cA_2 B_2^2, & cA_1 B_1^2 - \lambda A_0 B_0^2 = cA_3 B_3^2, \\ t(t - 1) \text{ divise } \Pi_i A_i & \text{et } A_1 B_1 \text{ divise } T A_0 B_0 - B_2 B_3, \end{cases}$$

de même que les conditions ouvertes :

$$c \neq 0, \quad \text{disc}(\Pi_i A_i) \neq 0 \quad \text{et} \quad \text{resultant}(P, Q) \neq 0.$$

Soit $\pi \in H(X, n)$ le revêtement hyperelliptique associé à la fraction rationnelle $\frac{P}{Q} := \frac{cA_1 B_1^2}{A_0 B_0^2}$ et notons M le quotient de $T A_0 B_0 - B_2 B_3$ par $cA_1 B_1$, i.e. : $cA_1 B_1 M = T A_0 B_0 - B_2 B_3$. Dans ce cas, π a type de Weierstrass (m_i) et indice de ramification

ρ au premier point de Weierstrass marqué. De plus, $\kappa := \frac{vM}{\lambda_0 B_0}$ est une *fonction d-osculante* pour π . En d'autres termes, $\pi \in H_{(m_i)}^\rho Os^d(X, n)$. \square

Références

- [1] E. Kani, The number of genus-2 covers of an elliptic curve, *Man. Math.* 121 (2006) 51–80.
- [2] T. Shaska, Curves of genus 2 with (N, N) decomposable Jacobians, *J. Symb. Comp.* 31 (5) (2001) 603–617.
- [3] A. Treibich, Revêtements hyperelliptiques d-osculateurs et solitons elliptiques de la hiérarchie KdV, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I* 345 (2007) 213–218.
- [4] A. Treibich, Hyperelliptic d -osculating covers and rational surfaces, <http://premat.fing.edu.uy/papers/2012/144.pdf>.