

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I



www.sciencedirect.com

Équations aux dérivées partielles/Analyse numérique

Méthode des éléments finis multi-échelles pour le problème de Stokes

Finite element method multi-scale for the Stokes problem

Alexei Lozinski^a, Zoubida Mghazli^b, Khallih Ould Ahmed Ould Blal^b

^a LMB-Laboratoire de mathématiques de Besançon–UMR 6623 CNRS, 16, route de Gray, 25000 Besançon, France
 ^b LIRNE–EIMA–université Ibn-Tofail, faculté des sciences, BP 133, Kenitra, Maroc

INFO ARTICLE

Historique de l'article : Reçu le 31 janvier 2013 Accepté après révision le 15 avril 2013 Disponible sur Internet le 15 mai 2013

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

Ce travail consiste à faire une étude numérique de la méthode des éléments finis multiéchelles pour le problème du type Stokes en présence de coefficients fortement oscillants. L'objectif de cette méthode est de capturer la structure multi-échelles de la solution via les fonctions de base locales précalculées. Ces dernières contiennent les informations essentielles sur les petites échelles.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

This work consists of a numerical study of a multi-scale finite element method for a Stokestype problem with highly oscillating coefficients. The objective of this method is to capture the multi-scale structure of the solution via local basis functions calculated in advance, which contain the essential information on small scales.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded polygonal domain and consider the boundary value problem: find $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ and $p : \Omega \to \mathbb{R}$ such that:

$$Lu + \nabla p = f \quad \text{in } \Omega, \qquad \text{div } u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{and} \quad u = 0 \quad \text{on } \partial \Omega, \tag{1}$$

with $Lu = -\operatorname{div}(v \nabla u) + \sigma u$, $f \in (L^2(\Omega))^2$. We suppose that the coefficients v and σ are $\mathbb{L}^{\infty}(\Omega)$ functions with $v(x) \ge v_{\min} > 0$ and $\sigma(x) \ge \sigma_{\min} \ge 0$, for a.e. in Ω . Introduce the bilinear form on $(\mathbb{H}^1_0(\Omega))^2$, $a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u : \nabla v + \sigma u v) \, dx$ and the space $\mathbb{V} = \{v \in (\mathbb{H}^1_0(\Omega))^2$, such that $\operatorname{div} v = 0$ in $\Omega\}$. The weak form of (1) then reads: find $u \in \mathbb{V}$ such that $a(u, v) = (f, v), \forall v \in \mathbb{V}$.

We now introduce a regular mesh T_H of Ω and the following multi-scale finite element space adapted to the Stokes operator for the velocity:

$$\mathbb{V}_{H} = \left\{ v_{H} \in \left(C^{0}(\Omega) \right)^{2} \cap \left(\mathbb{H}_{0}^{1}(\Omega) \right)^{2}, \text{ such that } \exists \chi_{H} \in \mathbb{L}^{2}(\Omega) \text{ such that } Lv_{H} + \nabla \chi_{H} = 0 \text{ in } K, \\ \operatorname{div} v_{H} = 0 \text{ in } K, \forall K \in \mathcal{T}_{H}, v_{H} \text{ is linear on all the edges of the mesh} \right\}.$$

Adresses e-mail: alexei.lozinski@univ-fcomte.fr (A. Lozinski), mghazli_zoubida@yahoo.com (Z. Mghazli), kh.ouldahmed@gmail.com (K. Ould Ahmed Ould Blal).

The MsFEM approximation of the problem (1) is based on the formulation:

find
$$u_H \in \mathbb{V}_H$$
, $a(u_H, v_H) = (f, v_H)$, $\forall v_H \in \mathbb{V}_H$.

The difficulty lies in the divergence-free restriction which makes impossible to construct a nice basis of \mathbb{V}_H , consisting of functions with the same supports as those in the standard \mathbb{P}^1 or \mathbb{Q}^1 spaces. The idea here is to introduce some non-divergence-free functions into the MsFEM space and then to kill the extra degrees of freedom by a Lagrange multiplier. Hence, we introduce the new velocity spaces:

$$\mathbb{X}_{H} = \left\{ v_{H} \in \left(C^{0}(\Omega) \right)^{2} \cap \left(\mathbb{H}_{0}^{1}(\Omega) \right)^{2}, \text{ such that } \exists \chi_{H} \in \mathbb{L}^{2}(\Omega), Lv_{H} + \nabla \chi_{H} = 0, \\ \operatorname{div} v_{H} = \operatorname{cst} \text{ in } K, \forall K \in \mathcal{T}_{H}, v_{H} \text{ is linear on all the edges of the mesh} \right\}$$

and space $\mathbb{M}_H = \{\mu_H \text{ such that } \mu_H = cst \text{ on } K \text{ for all } K \in \mathcal{T}_H \}$ for Lagrange multipliers.

We consider then the standard mixed problem (7)–(8) for $(u_H, p_H) \in \mathbb{X}_H \times \mathbb{M}_H$. The basis functions for \mathbb{X}_H can be constructed as solutions to local problems (9). In practice, one discretizes them using sufficiently fine meshes and one can solve them in parallel. The results in Fig. 2 confirm that the MsFEM solution is better than the standard FE solution.

1. Introduction

La méthode des éléments finis multi-échelles (MsFEM) a été introduite dans un premier temps par T. Hou et X.H. Wu pour les problèmes elliptiques à coefficients fortement oscillants (voir [6] ou [4] pour une revue récente). L'idée principale de MsFEM provient d'un travail de Babuska et Osborn [2]. L'objectif de cette méthode est de capturer la structure multi-échelles de la solution via des fonctions de base locales qui contiennent l'information essentielle des petites échelles. Elle permet ainsi de recouvrir l'information locale en s'adaptant aux caractéristiques spéciales des échelles, ce qui fait d'elle un outil puissant.

Dans ce travail nous introduisons une méthode MsFEM pour le problème de Stokes modifié, qui peut décrire l'écoulement d'un fluide visqueux en présence de multiples obstacles qui sont pris en compte par la pénalisation (voir [1] et [3]). Une des applications possibles de ce problème serait dans le cadre des milieux poreux où on peut considèrer l'écoulement à l'échelle du pore comme un écoulement de Stokes avec des obstacles (les pores). On peut penser aussi au cas des milieux poreux et fracturés : l'écoulement dans la fracture, si l'ouverture est assez grande, ne serait plus darcyen, mais plutôt de type Stokes. Généralement, la méthode MsFEM est basée sur deux ingrédients principaux : la construction des fonctions de base multi-échelles et une formulation variationnelle couplant ces fonctions et fournissant une approximation précise de la solution. Les fonctions de base multi-échelles sont conçues pour saisir les caractéristiques de la solution multi-échelle et contiennent des informations sur les petites échelles. Elles sont construites à partir de celles des éléments finis standard, de telle manière qu'elles aient le même support et coïncident avec elles sur la frontière de chaque élément de ce support. Elles vérifient l'EDP du problème posé avec un second membre nul, et ceci sur chaque élément du support. Pour le problème de Stokes, qui est notre objectif dans ce travail, l'équation de l'incompressibilité (div u = 0) ne peut pas être prise en compte de manière exacte dans la construction de ces fonctions de base, car elle est incompatible avec l'exigence de la localité. Nous montrons comment cette équation peut être relaxée au niveau local pour être retrouvée lors de la reconstruction de la solution approchée globale. Nous testons cette méthode sur des exemples académiques pour lesquels les coefficients de l'opérateur en question présentent de grandes oscillations et nous montrons que l'écart entre la solution de référence et la solution approchée obtenue par l'approximation multi-échelles est meilleur que celui entre la solution de référence et la solution approchée obtenue par l'approximation standard.

2. Formulation multi-échelles pour le problème de Stokes

2.1. Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^2 . Pour une fonction u de $\Omega \to \mathbb{R}^2$, notons $Lu = -\operatorname{div}(\nu \nabla u) + \sigma u$, où ν et σ sont dans $\mathbb{L}^{\infty}(\Omega)$ vérifiant pour tout $x \in \Omega$, $\nu(x) \ge \nu_{\min} > 0$ et $\sigma(x) \ge \sigma_{\min} \ge 0$. Pour $f \in (L^2(\Omega))^2$ le problème de Stokes est : chercher u et p solutions de :

$$\begin{cases} Lu + \nabla p = f & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial \Omega, \end{cases}$$
(2)

(3)

dont une formulation variationnelle est :

Trouver
$$u \in \mathbb{V}$$
 tel que $a(u, v) = (f, v), \forall v \in \mathbb{V}$,

où $\mathbb{V} = \{v \in (\mathbb{H}_0^1(\Omega))^2$, tel que div v = 0 dans $\Omega\}$, $H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \nabla \varphi \in L^2(\Omega), \varphi|_{\Gamma} = 0\}$, $a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u : \nabla v + \sigma uv) dx$ et $(u, v) = \int_{\Omega} uv dx$, $\forall u, v \in \mathbb{V}$. Notons par $\|\cdot\|_{E,\Omega}$ la norme énergie définie par $\|v\|_{(E,\Omega)}^2 := \int_{\Omega} (v|\nabla u|^2 + v) dv$.

 $\sigma |u|^2$) dx. La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue et \mathbb{V} -elliptique pour cette norme, ce qui donne l'existence et l'unicité de la solution de (3) par le théorème de Lax-Milgram.

Les fonctions ν et σ introduites dans le problème de Stokes (3) peuvent servir à prendre en compte des obstacles par l'approche de pénalisation ($\nu = 1$, $\sigma = 0$ dans le domaine du fluide et ν , σ très grands dans les obstacles).

2.2. Formulation multi-échelles

Soit \mathcal{T}_H une triangulation régulière de Ω en triangles ou rectangles K : $\Omega = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_H} K$. Nous faisons les notations suivantes :

- $n_{\mathcal{T}}$ est le nombre d'éléments de \mathcal{T}_H ,
- H_K est le diamètre de l'élément K, $H = \max_K H_K$,
- \mathcal{E}_H est l'ensemble des arêtes des éléments $K \in \mathcal{T}_H$ sauf celles qui font partie de $\partial \Omega$,
- $\mathbb{P}(E)$ est l'espace des fonctions polynomiales de degrés ≤ 1 sur $E \in \mathcal{E}_H$.

Nous introduisons l'espace multi-échelle de vitesse adapté à l'opérateur de Stokes :

$$\mathbb{V}_{H} = \left\{ \nu_{H} \in \left(\mathbb{C}^{0}(\Omega) \right)^{2} \cap \left(\mathbb{H}_{0}^{1}(\Omega) \right)^{2}, \text{ tel que } \exists \chi_{H} \in \mathbb{L}^{2}(\Omega) \text{ vérifiant } L\nu_{H} + \nabla \chi_{H} = 0 \text{ dans } K, \\ \operatorname{div} \nu_{H} = 0 \text{ dans } K, \forall K \in \mathcal{T}_{H}, \ \nu_{H}|_{E} \in \left(\mathbb{P}(E) \right)^{2}, \forall E \in \mathcal{E}_{H} \right\}.$$

$$(4)$$

Une approximation de (2) dans \mathbb{V}_H s'écrit :

Trouver
$$u_H \in \mathbb{V}_H$$
, $a(u_H, v_H) = (f, v_H)$, $\forall v_H \in \mathbb{V}_H$. (5)

Nous avons $\mathbb{V}_H \subset \mathbb{V}$; par le théorème de Lax–Milgram, nous avons donc l'existence et l'unicité de la solution de (5).

Comme l'implémentation de l'espace \mathbb{V}_H n'est pas facile à cause de la contrainte div $v_H = 0$, qui implique $\int_{\partial K} n \cdot v_H = 0$ sur chaque élément $K \in \mathbb{V}_H$, nous allons utiliser une méthode des éléments finis mixtes. Nous introduisons de nouveaux espaces et une nouvelle formulation mixte, qui est équivalente à (5). L'espace de vitesse est défini comme suit :

$$\mathbb{X}_{H} = \left\{ v_{H} \in \left(C^{0}(\Omega) \right)^{2} \cap \left(H_{0}^{1}(\Omega) \right)^{2}, \text{ tel que } \exists \chi_{H} \in \mathbb{L}^{2}(\Omega) \text{ vérifiant } Lv_{H} + \nabla \chi_{H} = 0 \text{ dans } K, \\ \operatorname{div} v_{H} = \operatorname{const} \operatorname{dans} K, \ \forall K \in \mathcal{T}_{H}, \ v_{H}|_{E} \in \left(\mathbb{P}(E) \right)^{2}, \ \forall E \in \mathcal{E}_{H} \right\}.$$
(6)

Cet espace est analogue à \mathbb{V}_H défini dans (4); la différence réside dans le fait de supposer que la divergence soit constante dans chaque *K* (au lieu d'être nulle dans chaque *K*). Une formulation mixte de (2) est de trouver $u_H \in \mathbb{X}_H$ et $p_H \in \mathbb{M}_H$ tels que :

$$a(u_H, v_H) + b(v_H, p_H) = (f, v_H), \quad \forall v_H \in \mathbb{X}_H,$$

$$\tag{7}$$

$$b(u_H, q_H) = 0, \quad \forall q_H \in \mathbb{M}_H, \tag{8}$$

où $M_H = vect\{\mathbb{1}_{K_i}, j = 1, \dots, n_T\}$ et $b(u, q) = -\int_{\Omega} q \operatorname{div} u \, dx$.

Lemme 2.1. Le problème (7)-(8) est équivalent au problème (5) dans le sens :

- (i) $(u_H, p_H) \in \mathbb{X}_H \times \mathbb{M}_H$ est une solution de (7)–(8) $\Rightarrow u_H$ est une solution de (5),
- (ii) $u_H \in \mathbb{X}_H$ est une solution de (5) $\Rightarrow \exists p_H \in \mathbb{M}_H$ tel que (u_H, p_H) est une solution de (7)-(8).

Preuve. Le point (i) est évident. Pour montrer la réciproque, u_H étant solution de (5) et de (8), nous avons besoin de construire p_H tel que (u_H , p_H) soit solution de (7). Pour cela, nous observons que \mathbb{X}_H est la somme directe de \mathbb{V}_H et d'un sous-espace engendré par n_T fonctions de \mathbb{X}_H dont la divergence dans certain K de \mathcal{T}_H est non nulle :

$$\mathbb{X}_{H} = \mathbb{V}_{H} \oplus Vect(v_{H}^{K_{1}}, v_{H}^{K_{2}}, \dots, v_{H}^{K_{m}}) \text{ avec } v_{H}^{K_{i}} \in \mathbb{X}_{H} \text{ tel que div } v_{H}^{K_{i}} = \begin{cases} -1, & \text{sur } K_{i}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On pose $p_H \in \mathbb{M}_H$ par $p_H|_{K_i} = \frac{1}{|K_i|}[(f, v_H^{K_i}) - a(u_H, v_H^{K_i})]$ et on définit la fonctionnelle $\phi(\cdot)$ sur \mathbb{X}_H par $\phi(w) = (f, w) - a(u_H, w)$. On a alors $\phi(v_H^{K_i}) = -\int_{\Omega} \operatorname{div} v_H^{K_i} p_H \, dx = b(v_H^{K_i}, p_H)$, $i = 1, \dots, m$. Par ailleurs, $\phi(v_H) = 0 = b(v_H, p_H)$ pour tout $v_H \in \mathbb{V}_H$ par la définition de cet espace. L'équation (8) est donc vérifiée pour tout $v_H \in \mathbb{X}_H$ grâce à la décomposition de \mathbb{X}_H . \Box

Remarque 1. Le lemme précédent montre que la vitesse u_H solution du problème (7)–(8) est déterminée de manière unique. En revanche, la partie p_H ne l'est pas. En effet, on peut ajouter à une solution p_H n'importe quel $\tilde{p}_H \in \tilde{\mathbb{M}}_H$ où $\tilde{\mathbb{M}}_H \subset \mathbb{M}_H$ est le sous-espace défini par $\tilde{\mathbb{M}}_H = \{\tilde{p}_H \in \mathbb{M}_H \text{ tel que } b(v_H, \tilde{p}_H) = 0, \forall v_H \in \mathbb{X}_H\}$. En particulier, $\tilde{p}_H = const$ est dans ce



Fig. 1. Erreurs commises par MsFEM.

sous espace et cela correspond au fait que la pression dans le problème de Stokes est déterminée à une constante près. Cependant, il existe encore d'autres fonctions $\tilde{p}_H \in \tilde{\mathbb{M}}_H$ connues sous le nom des modes parasites. Notons que ces modes sont exactement les mêmes que ceux dans la discrétisation standard du problème de Stokes par les éléments $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_0$ ou $\mathbb{Q}_1 \times \mathbb{Q}_0$, parce que la forme *b* peut être réécrite comme $b(u_H, q_H) = \sum_{K \in \mathcal{T}_H} \int_{\partial K} q_H u_H \cdot n$, $\forall (u_H, q_H) \in \mathbb{X}_H \times \mathbb{M}_H$ et elle ne dépend donc que des traces sur les arêtes du maillage. En pratique, pour rendre le problème (7)–(8) bien posé, on peut remplacer l'espace \mathbb{M}_H dans ce problème par un sous-espace $\hat{\mathbb{M}}_H \subset \mathbb{M}_H$ choisi de telle façon que $\mathbb{M}_H = \hat{\mathbb{M}}_H \oplus \tilde{\mathbb{M}}_H$, c'est-à-dire $\hat{\mathbb{M}}_H \cap \tilde{\mathbb{M}}_H = 0$ et dim $\hat{\mathbb{M}}_H + \dim \tilde{\mathbb{M}}_H = \dim \mathbb{M}_H$. On montrera comment cette idée peut être mise en œuvre dans la géométrie simple décrite dans la section suivante, où il est facile de construire les sous-espaces $\tilde{\mathbb{M}}_H$ et $\hat{\mathbb{M}}_H$.

2.3. Base multi-échelles et approximation

On se restreint dorénavant au cas où $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et \mathcal{T}_H est le maillage rectangulaire uniforme avec $(n+1) \times (n+1)$ nœuds. Soient { ψ_H^i , $i = 1, ..., (n-1)^2$ } les fonctions de base standards dans \mathbb{Q}_1 (espace des polynômes de degrés ≤ 1 par rapport à chaque variable) correspondant aux nœuds intérieurs du maillage et $\Psi_H^{i,1} = (\psi_H^i, 0), \Psi_H^{i,2} = (0, \psi_H^i)$. La fonction de base multi-échelles $\Phi_H^{i,k} \in \mathbb{X}_H$, avec (k = 1, 2), correspondant au nœud x_i , est définie sur les quatre rectangle $K_{i,1}, \ldots, K_{i,4}$ qui entourent le nœud i, comme la solution du problème : trouver $\Phi_H^{i,k} \in (\mathbb{H}^1(K_{i,d}))^2$ et $p_H^{i,k} \in \mathbb{L}_0^2(K_{i,d})$:

$$\begin{cases} L\Phi_{H}^{i,k} + \nabla p_{H}^{i,k} = 0 & \text{dans } K_{i,d}, \\ \text{div } \Phi_{H}^{i,k} = C_{i,d}^{k} & \text{dans } K_{i,d}, \text{ avec } C_{i,d}^{k} \in \mathbb{R}, \\ \Phi_{H}^{i,k}|_{\partial K_{i,d}} = \Psi_{H}^{i,k}|_{\partial K_{i,d}}. \end{cases}$$
(9)

La fonction $\Phi_H^{i,k}$ s'annule en dehors de $K_{i,d}$, d = 1, 2, 3, 4. En tenant compte de la condition limite, $C_{i,d}^k = \frac{1}{|K_{i,d}|} \int_{\partial K_{i,d}} \Psi_H^{i,k} \cdot n \, ds$. On peut montrer qu'il y a deux modes parasites dans ce cas : $p_H^1 = 1$ et p_H^2 tel que $p_H^2|_{K_{ij}} = (-1)^{i+j}$ en numérotant les rectangles avec deux indices i, j = 1, ..., n dans les deux directions. On voit donc qu'on peut rendre le problème mixte bien posé si on remplace \mathbb{M}_H par le sous-espace $\hat{\mathbb{M}}_H = vect\{\mathbb{1}_{K_i}, j = 1, ..., n^2 - 2\}$.

Pour construire les fonctions de base multi-échelles en pratique, on introduit une nouvelle triangulation assez fine $\mathcal{T}_h(K)$ de chaque $K \in \mathcal{T}_H$ et on discrétise les problèmes (9) sur ces maillages par les éléments finis standard (par exemple, $\mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_1$ sont utilisés dans nos tests numériques décrits dans la section suivante). Notons par \mathbb{X}_h^H l'espace engendré par les fonctions de base ainsi calculées. Le problème discret global est l'approximation du problème (7)–(8) dans les espaces \mathbb{X}_H^h et $\hat{\mathbb{M}}_H$: trouver $u_H \in \mathbb{X}_H^h$ et $p_H \in \hat{\mathbb{M}}_H$ tels que :

$$\begin{cases} a(u_H, v_H) + b(v_H, p_H) = (f, v_H), & \forall v_H \in \mathbb{X}_H^h, \\ b(u_H, q_H) = 0, & \forall q_H \in \hat{\mathbb{M}}_H. \end{cases}$$
(10)



Fig. 2. Erreurs commises par MsFEM et E.F. standards.

3. Mise en œuvre

Nous considérons le problème (2) avec $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[, fT = (xy, 0), \nu = 1.01 + \cos(50x) \times \sin(50y)$ et $\sigma = 0$. Pour comparer les solutions obtenues avec la méthode MsFEM et la méthode des éléments finis standards (EFS), nous considérons une solution de référence qui est la solution EFS obtenue par *Freefem++* [5]) sur le maillage uniforme du pas h = 1/130. Pour la MsFEM, nous construisons un maillage fin triangulaire \mathcal{T}_h de pas h, puis le maillage rectangulaire \mathcal{T}_H de pas H, de telle sorte que chaque rectangle de \mathcal{T}_H soit la réunion $\mathcal{T}_h(K)$, d'un certain nombre de triangles de \mathcal{T}_h . Les fonctions de base MsFEM sont construites par *Freefem++* en utilisant le maillage $\mathcal{T}_h(K)$ pour chaque $K \in \mathcal{T}_H$.

MsFEM sont construites par *Freefem++* en utilisant le maillage $\mathcal{T}_h(K)$ pour chaque $K \in \mathcal{T}_H$. Les cas testés sont $H = \frac{1}{4}$, $H = \frac{1}{8}$, $H = \frac{1}{16}$ et $H = \frac{1}{32}$. La comparaison est faite avec la norme énergie. La Fig. 1 représente l'erreur commise par la méthode MsFEM en fonction du nombre de fonctions de base multi-échelle ($\approx 1/H$), pour différentes valeurs de *h*. Nous remarquons que l'erreur diminue avec *H* et une bonne précision est atteinte pour un nombre de fonctions de base relativement petit. Nous remarquons aussi, sur la même figure, que la différence entre les différentes erreurs associées aux différents pas *h* est minime, ce qui signifie que nous n'avons pas besoin de considérer un maillage \mathcal{T}_h très fin pour obtenir une bonne précision. Dans la Fig. 2, nous avons comparé les erreurs en fonction du nombre de fonctions de base pour trois cas. Le premier concerne la solution MsFEM avec h = 1/64, le deuxième la solution EFS avec des éléments rectangulaires \mathbb{Q}_1 sur \mathcal{T}_H et le troisième la solution EFS avec des éléments triangulaires \mathbb{P}_1 -bulle sur \mathcal{T}_H . On constate que MsFEM donne une meilleure précision.

Remerciements

Ce travail a bénéficié du soutien de l'Al France/Maroc, MA/10/225 et du projet Euro-Méditerranée HYDRINV.

Références

- [1] P. Angot, C.-H. Bruneau, P. Fabrie, A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows, Numer. Math. 81 (4) (1999) 497-520.
- [2] I. Babuska, J.E. Osborn, Generalized finite element methods: their performance and their relation to mixed methods, SIAM J. Numer. Anal. 20 (1983) 510–536.
- [3] L. Carballal Perdiz, P. Degond, F. Deluzet, R. Loubère, A. Lozinski, J.-M. Rovarch, Multiscale finite element method for perforated domains, en préparation.
- [4] Y. Efendiev, T.Y. Hou, Multiscale Finite Element Methods: Theory and Applications, Springer Science+Business, Media, LLC, 2009.
- [5] F. Hecht, O. Pironneau, Freefem++, Version 2.0-0, Laboratoire Jacques-Louis-Lions, Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris.
- [6] T.Y. Hou, X.H. Wu, A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media, J. Comput. Phys. 134 (1997) 169–189.