



ELSEVIER

Contents lists available at [SciVerse ScienceDirect](http://www.sciencedirect.com)

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse complexe/Géométrie algébrique

Dérivation relative

Differentiating relatively

Michael McQuillan

Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Roma "Tor Vergata", Via della Ricerca Scientifica 1, 00133 Roma, Italy



I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 16 octobre 2012

Accepté après révision le 15 mai 2013

Disponible sur Internet le 6 août 2013

Présenté par Claire Voisin

R É S U M É

Étant donnée une suite f_n de points algébriques d'une variété X sur un corps de fonctions de caractéristique zéro, K , avec une hauteur (normalisée) tendant vers l'infini, nous construisons une dérivée de la suite dans $\mathbb{P}(\Omega_{X/K}^1)$. La vraie (Oesterlé, 2002 [4]) conjecture «a, b, c» sur les corps des fonctions est un corollaire immédiat. En principe, chaque problème du type Mordell sur les corps des fonctions se réduit, par cette construction, au problème hyperbolique correspondant sur la fibre générique, mais, malheureusement, une telle conclusion est délicate en présence de mauvaise réduction. Les résultats présentés ici – comme on les trouve dans McQuillan (2001) [3, §4.3] – ainsi qu'une autre approche de la conjecture «a, b, c» par K. Yamanoi (2004) [5] ont été déjà reportés dans le cadre du séminaire Bourbaki (Gasbarri, 2008 [1]).

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

A B S T R A C T

Given a sequence of algebraic points f_n of a variety X over a characteristic 0-function field K of unbounded (normalised) height, we construct a limiting derivative in $\mathbb{P}(\Omega_{X/K}^1)$. The real (Oesterlé, 2002 [4]) “a, b, c” conjecture over function fields is an immediate corollary. In principle, every Mordell problem over function fields reduces to a hyperbolicity problem on the generic fibre by way of the said construction, but, unfortunately, such a conclusion is delicate in the presence of bad reduction. This – as found in McQuillan (2001) [3, §4.3] – together with an alternative approach to the “a, b, c” conjecture by K. Yamanoi (2004) [5] has already been reported in the Séminaire Bourbaki (Gasbarri, 2008 [1]).

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Soient S/\mathbb{C} une courbe projective lisse de point générique K et $\xi : X \rightarrow S$ une famille semi-stable de courbes propres au-dessus de S . Pour simplifier le discours, nous supposons que X/\mathbb{C} est lisse. Nous identifions les \bar{K} -points f de X (les points algébriques) avec les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\quad} & X \\ & \searrow f & \\ \downarrow p & & \downarrow \xi \\ S & \xlongequal{\quad} & S \end{array}$$

Adresse e-mail : mquillan@ihes.fr.

où T/\mathbb{C} est lisse connexe et p est fini. Pour chaque fibré en droites, L , sur X , on définit la hauteur normalisée de f par rapport à L par :

$$h_L(f) = \frac{1}{(T : S)} L \cdot_f T$$

et le discriminant normalisé par :

$$\text{discr}(K(f)/K) = \frac{1}{(T : S)} [\text{degré de } (\text{Ram}_p)]$$

qui, pour S fixe, et à une constante près, s'exprime également par : $-\chi(T)/(T : S)$, où $\chi(T)$ est la caractéristique d'Euler topologique de T . Notre but est de démontrer le théorème suivant comme corollaire du lemme ci-dessous.

Théorème. *Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ telle que, pour tous les points algébriques f ,*

$$h_{K_{X/S}}(f) \leq (1 + \epsilon) \cdot \text{discr}(K(f)/K) + C(\epsilon)$$

où $K_{X/S}$ est le fibré canonique relatif.

Afin de comprendre l'hypothèse du lemme, supposons que, pour $\epsilon > 0$, le théorème soit faux. Alors, il existe une suite de points $f_n : T_n \rightarrow X$, $n \in \mathbb{N}$, telle que :

- (a) Pour H sur X ample, $h_H(f_n) \rightarrow \infty$, quand $n \rightarrow \infty$.
- (b) $-\chi(T_n)$ est majoré par un multiple constant (ici 1 si $H = K_{X/S}$) de degré $H \cdot_{f_n} T_n$.

En construisant les dérivées relatives du lemme, seulement les données (a) et (b) sont d'importance. Par conséquent, supposons uniquement que X/\mathbb{C} soit lisse et projectif, que ξ soit plat, avec chaque fibre géométrique au pire un diviseur à croisements simples normaux, et les données (a) et (b). Alors, quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons définir un courant fermé positif, A , sur X , et un courant dérivé, A' , sur P où $\pi : P = \mathbb{P}(\Omega_{X/\mathbb{C}}^1) \rightarrow X$ par :

$$A(\omega) = \lim_n \frac{1}{H \cdot_{f_n} T_n} \int_{T_n} (f_n)^* \omega, \quad A'(\tau) = \lim_n \frac{1}{H \cdot_{f_n} T_n} \int_{T_n} (f'_n)^* \tau$$

où ω (respectivement τ) est une forme différentielle du type $(1, 1)$ sur X (respectivement P). Par construction, $\pi_*(A') = A$.

Un peu plus généralement, soit $q : \mathcal{X} \rightarrow X$ une gerbe séparée de Deligne–Mumford au-dessus de X telle que \mathcal{X} soit lisse et ramifiée au-dessus d'un diviseur $D \subset X$ supporté dans les fibres de $\xi : X \rightarrow S$ et à croisements simples normaux. Par [2, XIII, 5.3], dans un voisinage W d'un point de D , il existe des coordonnées x_i , $1 \leq i \leq \dim(X)$, et $n_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq k$, pour $1 \leq k \leq \dim(X)$, telles que $y_i = (x_i)^{1/n_i}$, $1 \leq i \leq k$, et $y_j = x_j$, $k < j \leq \dim(X)$ soient les coordonnées sur un voisinage étale de \mathcal{X} . Soit $\mathbb{1}_*$ une fonction distance à $*$ et supposons que les composantes irréductibles D_i de D soient lisses, alors, quitte à prendre W plus petit :

$$dd^c \left(\sum_{1 \leq a \leq \dim(X)} |x_a|^2 \right) + \sum_i dd^c (\mathbb{1}_{D_i}^{2/n_i})|_W \geq dd^c \left(\sum_{1 \leq a \leq \dim(X)} |y_a|^2 \right)$$

D'où, si ω_X est une forme kählérienne sur X , il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\omega_{\mathcal{X}} := N\omega_X + \sum_i dd^c (\mathbb{1}_{D_i}^{2/n_i})$$

restreint à \mathcal{X} est une forme kählérienne sur \mathcal{X} . Par conséquent, si nous définissons $\phi_n : T_n \rightarrow X$ par normalisation de la composante de $T_n \times_X \mathcal{X}$ qui domine T_n , l'aire des ϕ_n est majorée par rapport à $\omega_{\mathcal{X}}$ par N fois l'aire de f_n par rapport à ω_X , et quitte à extraire une sous-suite, le courant A s'élève à un courant fermé positif, \mathcal{A} sur \mathcal{X} tel que $q_* \mathcal{A} = A$. De plus,

$$-\chi(T_n) \leq -\chi(T_n) + D \cdot_{f_n} T_n \leq -\chi(T_n) + C(T_n : S)$$

avec C une constante, tandis que :

$$-C \int_{T_n} (\phi_n)^* \omega_{\mathcal{X}} \leq L \cdot_{\phi_n} T_n \leq -\chi(T_n)$$

avec L le fibré tautologique sur $\pi : \mathcal{P} := \mathbb{P}(\Omega_{\mathcal{X}/\mathbb{C}}^1) \rightarrow \mathcal{X}$, C étant une autre constante. D'où, quitte à extraire une sous-suite, il existe un relèvement \mathcal{A}' de \mathcal{A} tel que $(\pi)_*(\mathcal{A}') = \mathcal{A}$, et on constate :

Lemme. Soit $i : \mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{P}$ l'adhérence de Zariski de l'espace projectif tangent relatif à K , $\mathbb{P}(\Omega^1_{\mathcal{X}/S} \otimes K)$, au-dessus du point générique, alors il existe un courant positif fermé, B sur \mathcal{Q} , tel que $(\pi)_*(\mathcal{A}' - (i)_*(B)) = 0$.

Démonstration. Par le théorème de Skoda–El Mir, nous pouvons écrire \mathcal{A}' comme $(i)_*(B) + C$ pour les courants positifs fermés avec B comme dans l'annonce, et C l'extension par 0 d'un courant positif fermé sur $U = \mathcal{P} \setminus \mathcal{Q}$, et il faut démontrer que $(\pi)_*C = 0$.

Pour un paramètre local s sur S , et un voisinage étale suffisamment petit, $V \rightarrow \mathcal{X}$, on trouve des coordonnées x_i sur V , $1 \leq i \leq \dim(X)$, et $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ telles que, pour quelque k tel que $1 \leq k \leq \dim(X)$, $(\xi q)^*s = x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k}$. Par conséquent, le sous-champ $\mathcal{Q} \hookrightarrow \mathcal{P}$ est défini par la forme linéaire :

$$\tau := \sum_i m_i \left(\prod_{j \neq i} x_j \right) dx_i \in \Gamma(V, \Omega^1_{\mathcal{X}/\mathbb{C}})$$

et la condition selon laquelle la projectivisation, $[t]$, d'un vecteur tangent, t , se trouve à une distance carrée d'au moins δ de \mathcal{Q} est équivalente à :

$$\omega_{\mathcal{X}}(t, t) \leq \frac{1}{\delta} [\tau \otimes \bar{\tau}(t, t)].$$

Cependant, si m est le maximum des m_i et V est assez petit,

$$\tau \otimes \bar{\tau} \leq \frac{ds \otimes d\bar{s}}{|s|^{2(1-1/m)}}$$

d'où l'existence d'une constante C qui ne dépend que de \mathcal{X} et telle que :

$$\int_{(\phi'_n)^{-1}(\text{dist}_{\mathcal{Q}} \geq \delta)} (\phi_n)^* \omega_{\mathcal{X}} \leq \frac{C}{\delta} (T_n : S); \quad \text{et le lemme suit.} \quad \square$$

Appliquons le lemme à la démonstration du théorème, en prenant X/S une famille de courbes semi-stables. Soit $d \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, et $X_d \rightarrow X$ le champ de Deligne–Mumford obtenu en prenant une racine d -ème de chaque composante irréductible, une à la fois, de chaque fibre à mauvaise réduction. La construction de X_d ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend les racines des composantes, et le champ X_d/\mathbb{C} est lisse. On prend $\mathcal{X} = X_d$ dans le lemme, avec A, A_d, A'_d, B_d les courants fermés positifs sur X, X_d , etc. associés à une suite de points tels que le théorème soit faux. Par conséquent, si L_d est le fibré tautologique sur $\mathbb{P}(\Omega^1_{X_d/\mathbb{C}})$, on a :

$$i^*L \cdot B_d \leq L \cdot A'_d \leq \Delta := \limsup_n \frac{-\chi(T_n)}{H \cdot f_n T_n}$$

et quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que Δ est une limite en n .

Le courant B_d est supporté sur le champ $\rho (= \pi i) : Q_d \rightarrow X_d$, qui est un éclatement aux points géométriques, $\{x\}$, de X_d où les composantes à mauvaise réduction se rencontrent. Soit $E_{dx} \hookrightarrow Q_d$ le diviseur exceptionnel au-dessus d'un tel point, x . On a :

$$i^*L = \rho^*(K_{X/S}|_{X_d}) \left(- \sum_x E_{dx} \right).$$

Par conséquent, il sera suffisant de démontrer que $E_{dx} \cdot B_d$ est assez petit. À cette fin, fixons x , et soient C_x, D_x les deux composantes de la fibre de $X \rightarrow S$ qui passent par x ; \tilde{C}_{dx}, D_{dx} leurs racines dans X_d , et $\tilde{C}_{dx}, \tilde{D}_{dx}$ leurs transformées propres dans Q_d . On a : $\rho^*C_{dx} = \tilde{C}_{dx} + E_{dx}$, et aussi,

$$C_x \cdot A = dC_{dx} \cdot A_d = d\pi^*(C_{dx}) \cdot A'_d = d\rho^*(C_{dx}) \cdot B_d = 0$$

d'où, si $\lambda \geq 0$ est le nombre de Lelong générique de A sur la courbe C_x ,

$$\begin{aligned} E_{dx} \cdot B_d &= -\tilde{C}_{dx} \cdot B_d \leq -\lambda d \tilde{C}_{dx}^2 \\ &= -\lambda d (\rho^*C_{dx} - E_{dx}) \cdot \tilde{C}_{dx} = -\frac{\lambda}{d} (C_x^2 - 1) \end{aligned}$$

et en prenant d suffisamment grand par rapport à ϵ^{-1} ; on obtient :

$$K_{X/S} \cdot A \leq \Delta + \frac{\epsilon}{2}. \quad \square$$

Références

- [1] C. Gasbarri, The strong *abc* conjecture over function fields (after McQuillan and Yamanoi), in: Séminaire Bourbaki, 2008, exposé 989.
- [2] A. Grothendieck, Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie – 1960–1961, Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1), Lect. Notes Math., vol. 224, Springer-Verlag, 1971.
- [3] M. McQuillan, Bloch hyperbolicity, Pré-publication de l’IHES, 2001, IHES/M/01/59.
- [4] J. Oesterlé, Communication personnelle, Paris, Nov. 2002.
- [5] K. Yamanoi, The second main theorem for small functions and related problems, *Acta Math.* 192 (2004) 225–294.