Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Analyse numérique

Construction d'un champ continu de métriques

From discrete to continuous metric fields

Patrick Laug^a, Houman Borouchaki^b

^a INRIA Paris-Rocquencourt, GAMMA3 joint project-team, BP 105, 78153 Le Chesnay cedex, France
^b University of Technology of Troyes, GAMMA3 joint project-team, BP 2060, 10010 Troyes cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article : Reçu le 18 février 2013 Accepté après révision le 5 juillet 2013 Disponible sur Internet le 28 août 2013

Présenté par Olivier Pironneau

RÉSUMÉ

L'intérêt du calcul adaptatif pour résoudre des problèmes complexes d'EDP est pleinement reconnu de nos jours. Un tel calcul demande, à chaque étape, la définition d'un champ continu de métriques pour gouverner la génération de maillages adaptés. En pratique, via un estimateur d'erreur *a posteriori*, des métriques sont calculées aux sommets du maillage du domaine de calcul. Pour obtenir un champ continu de métriques, le champ discret est interpolé dans tout le maillage du domaine. Dans cette Note, une nouvelle méthode pour interpoler ces champs, fondée sur une décomposition dite «naturelle» des métriques, est introduite. La méthode proposée, basée sur des décompositions connues de matrices, met en jeu des algorithmes robustes et efficaces. Quelques comparaisons qualitatives avec des méthodes classiques sont réalisées afin de montrer la pertinence de cette méthodologie.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

Adaptive computation using adaptive meshes is now recognized as essential for solving complex PDE problems. This computation requires, at each step, the definition of a continuous metric field to govern the generation of the adapted meshes. In practice, via an appropriate *a posteriori* error estimation, metrics are calculated at the vertices of the computational domain mesh. In order to obtain a continuous metric field, the discrete field is interpolated in the whole domain mesh. In this Note, a new method for interpolating discrete metric fields, based on a so-called "natural decomposition" of metrics, is introduced. The proposed method is based on known matrix decompositions and is computationally robust and efficient. Some qualitative comparisons with classical methods are made to show the relevance of this methodology.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

During the simulation of a physical phenomenon by the finite-element method, local adaptations of meshes can improve the accuracy of the computed solutions, and in particular it is possible to capture high variations of the solution in specific areas while maintaining a reasonable number of degrees of freedom [13,11,7]. In an initial phase, a mesh of the domain is built by using any adequate method [8,16], then a first calculation of the solution of the problem is made. After choosing an appropriate criterion (provided by an error estimate, based for instance on the Hessian and/or the gradient of the solution







Adresses e-mail: patrick.laug@inria.fr (P. Laug), houman.borouchaki@utt.fr (H. Borouchaki).

¹⁶³¹⁻⁰⁷³X/\$ – see front matter © 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés. http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.07.009

[4,3,14,5]), areas that must be adapted by refinement or coarsening are detected in the initial mesh, and a new mesh is generated, which is better adapted to the problem [8,9,15,10]. This process is iterated until obtaining a mesh which satisfies the specified criterion (for which the finite-element error is bounded by a specified threshold ε).

In practice, via an *a posteriori* analysis of the finite-element error, a discrete map of sizes or metrics is set to the mesh vertices. This discrete size or metric field is made continuous by interpolating in the mesh, and the new mesh is generated according to this new continuous field. In general, for a given point of the domain, a mesh element containing this point is found, and the interpolation of the size or metric field at this point is made from the sizes or metrics associated with the vertices of the containing element. For a scalar-size field, the interpolation is straightforward by considering any interpolation scheme (for instance linear or geometric). On the other hand, the same scheme cannot be applied in the case of metrics representing a tensor field. Several approaches have been proposed based on the link between a size and the corresponding metric [6,2] and, in most cases, the interpolation scheme for sizes is applied using a power or a logarithm of the metrics. In particular, as a size *h* is represented by the isotropic metric $\mathbf{M} = 1/h^2 \mathbf{I}$, where **I** is the identity matrix, a possible link consists in approximating the size by $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$, then applying the size interpolation scheme to this new metric, and finally recovering the interpolated metric. These schemes require the calculation of the eigenvalues of **M**, which is generally costly.

This Note proposes a new method for interpolating discrete metric fields, based on the "natural decomposition" of metrics using the LU factorization. With this decomposition, for each metric, the natural sizes along particular (or natural) directions can be retrieved, thus the size interpolation scheme can be applied to both natural directions and sizes, and the interpolation on the metrics is obtained. The proposed method is faster than those mentioned above and provides a continuous metric field with low variations. Some numerical examples illustrate our methodology.

1. Introduction

Au cours de la simulation d'un phénomène physique par la méthode des éléments finis, des adaptations locales des maillages permettent d'améliorer la précision des solutions calculées, et en particulier de capter de fortes variations de la solution dans des zones spécifiques, tout en gardant un nombre raisonnable de degrés de liberté [13,11,7]. Dans une phase initiale, un maillage du domaine est construit en utilisant une méthode adéquate quelconque [8,16], puis un premier calcul de la solution est effectué. Après avoir choisi un critère approprié (fourni par un estimateur d'erreur, basé par exemple sur le hessien et/ou le gradient de la solution [4,3,14,5]), les zones à adapter par raffinement ou déraffinement sont détectées dans le maillage initial, et un nouveau maillage mieux adapté au problème est généré [8,9,15,10]. Le processus est itéré jusqu'à l'obtention d'un maillage satisfaisant le critère spécifié (pour lequel l'erreur éléments finis est bornée par un seuil spécifié ε). Ainsi, le schéma du calcul adaptatif est le suivant :

- (i) construction d'un maillage initial;
- (ii) calcul d'une solution aux nœuds du maillage courant;
- (iii) estimation d'erreur (a posteriori) fournissant une carte de tailles associée aux nœuds du maillage courant;
- (iv) construction d'un nouveau maillage respectant ces spécifications de taille et de forme, rendues continues par interpolation:
- (v) interpolation de la solution sur le nouveau maillage;
- (vi) réiteration à partir de l'étape (ii), jusqu'à ce que l'erreur soit inférieure au seuil donné ε .

En pratique, via une analyse *a posteriori* de l'erreur éléments finis, une carte discrète de tailles ou de métriques est associée aux sommets du maillage. Ce champ discret de tailles ou de métriques est rendu continu par interpolation dans le maillage, et le nouveau maillage est généré conformément à ce nouveau champ continu. En général, pour un point donné du domaine, un élément de maillage contenant ce point est trouvé, et l'interpolation du champ de tailles ou de métriques à ce point est effectuée à partir des tailles ou des métriques associées aux sommets de l'élément le contenant. Pour un champ scalaire de tailles, l'interpolation est simple, en considérant un schéma d'interpolation quelconque, par exemple linéaire ou géométrique. En revanche, le même procédé ne peut pas être appliqué dans le cas de métriques représentant un champ de tenseurs. Plusieurs approches ont été proposées, en se fondant sur le lien entre une taille et la métrique correspondante [6,2] et, dans la plupart de cas, le schéma d'interpolation pour les tailles est appliqué en utilisant une puissance ou un logarithme des métriques. En particulier, puisqu'une taille *h* est représentée par la métrique isotrope $\mathbf{M} = 1/h^2 \mathbf{I}$, où \mathbf{I} est la matrice identité, un lien possible consiste à approcher la taille par $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$, puis à appliquer le schéma d'interpolation de taille à cette nouvelle métrique, et finalement à rétablir la métrique interpolée. Ce type de schéma demande le calcul des valeurs propres de \mathbf{M} , ce qui est généralement coûteux.

Cette Note propose une nouvelle méthode pour interpoler des champs discrets de métriques, fondée sur la «décomposition naturelle» des métriques en utilisant la factorisation *LU*. Avec cette décomposition, pour chaque métrique, les tailles naturelles selon des directions particulières (ou naturelles) peuvent être extraites, et ainsi un schéma d'interpolation peut être appliqué à la fois aux directions et aux tailles, d'où une interpolation des métriques. La méthode proposée est plus rapide que celles mentionnées plus haut et fournit un champ continu de métriques à faibles variations. Des exemples numériques illustrent notre méthodologie. La Section 2 ci-dessous est consacrée à l'espace bidimensionnel et rappelle des méthodes classiques d'interpolation de métriques, avant d'introduire la nouvelle méthodologie. Les interpolations linéaires et géométriques sont étudiées pour chaque méthode. Dans la Section 3, les méthodes d'interpolation sont étendues en 3D.





Fig. 1. Sur une arête, interpolations linéaires et géométriques par réduction simultanée. En couleur dans la version électronique.

La Section 4 donne une comparaison des résultats obtenus par la nouvelle méthode en regard des approches plus classiques. Quelques conclusions et perspectives sont fournies dans la Section 5.

2. Méthodes d'interpolation de métriques en 2D

L'interpolation de métriques est nécessaire dans le schéma de résolution adaptatif pour définir un champ continu de tailles (c'est-à-dire un espace riemannien) dans le but de gouverner la génération de maillages adaptatifs (cf. étape (iv) du schéma de l'introduction). Le but du maillage adaptatif est de construire un maillage dans lequel toutes les arêtes sont de longueur « unité » par rapport à la carte de métriques spécifiée. Rappelons la définition de la longueur d'une arête \overline{AB} d'un domaine Ω dans un espace riemannien muni d'une carte de métriques **M** :

$$L_{\mathbf{M}}(\overline{AB}) = \int_{0}^{1} \sqrt{\overline{AB}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}(A + t \,\overline{AB}) \overline{AB}} \,\mathrm{d}t \tag{1}$$

où $\mathbf{M}(A + t \overrightarrow{AB})$ est la métrique au point $A + t \overrightarrow{AB}$ de l'arête \overrightarrow{AB} . Ainsi, la connaissance de la métrique en tout point du domaine est nécessaire pour évaluer la longueur d'une arête quelconque de celui-ci. En pratique, la métrique est définie par une matrice symétrique définie positive. En particulier, dans le cas isotrope où une carte de tailles h(P) est spécifiée en tout point P de Ω , la métrique ou matrice associée est $\mathbf{M}(P) = (1/h^2(P))\mathbf{I}$.

Nous présentons ci-dessous quelques méthodes permettant d'interpoler une carte discrète de métriques (associée aux sommets d'un maillage donné du domaine) afin de construire un champ continu de métriques. Si *P* est un point de Ω , il existe un élément simplicial *K* contenant *P*, et il s'agit d'interpoler la métrique en *P* à partir des métriques aux sommets de *K* et des coordonnées barycentriques { α_i } de *P* dans *K*.

2.1. Interpolation des coefficients de matrices

Puisqu'une métrique est représentée par une matrice, l'idée la plus simple est d'interpoler directement ses coefficients de manière linéaire ou géométrique. L'interpolation géométrique des coefficients n'est généralement pas valide, car il peut exister un coefficient négatif ou nul. Quant à l'interpolation linéaire, elle n'est généralement pas satisfaisante, car les coefficients de la matrice n'ont pas d'interprétation en termes de taille. Ce fait est facilement visible en représentant chaque métrique $\mathbf{M}(P)$ interpolée en un point donné P par son «cercle unité », lieu des points Q tels que $L_{\mathbf{M}(P)}(\overline{PQ}) = 1$, qui est en 2D une ellipse centrée en P.

2.2. Interpolation par réduction simultanée

Considérons deux sommets P_1 et P_2 d'un triangle K et un point $P = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i P_i$ sur l'arête $\overline{P_1P_2}$. Étant données deux métriques $\mathbf{M}(P_1)$ et $\mathbf{M}(P_2)$, nous pouvons construire une base commune (généralement non orthonormale) dans laquelle les matrices sont toutes deux diagonales. Ces dernières peuvent être interpolées en utilisant une interprétation en termes de taille. Plus précisément, la base commune est obtenue par la réduction simultanée de $\mathbf{M}(P_1)$ et de $\mathbf{M}(P_2)$, qui consiste à trouver les vecteurs propres de $\mathbf{M}^{-1}(P_1)\mathbf{M}(P_2)$. Dans cette base commune ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$), chaque métrique $\mathbf{M}(P_i)$ possède seulement des termes diagonaux, qui peuvent être interprétés comme $1/h_j^2(P_i)$, où $h_j(P_i)$ représente la taille prescrite dans la direction du vecteur \mathbf{e}_j . Pour tout point $P = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i P_i$ sur l'arête $\overline{P_1P_2}$, ces tailles peuvent être interpolées linéairement ou géométriquement, définissant ainsi des métriques interpolées. La Fig. 1 montre des interpolations linéaires et géométriques de deux métriques données en utilisant cette méthode. Remarquons que la taille varie effectivement linéairement (à gauche) et géométriquement (à droite). Cependant, cette méthode ne peut pas s'étendre facilement à trois métriques données aux sommets d'un élément K, car elle n'est pas associative : en notant $\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j$ l'interpolation de deux métriques \mathbf{M}_i et \mathbf{M}_j , on a bien $\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j = \mathbf{M}_j \mathbf{M}_i$, mais généralement ($\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j \mathbf{M}_k \neq \mathbf{M}_i (\mathbf{M}_j \mathbf{M}_k)$.

2.3. Interpolation par des fonctions de matrices

Puisqu'une interpolation directe des coefficients d'une métrique $\mathbf{M}(P)$ n'est pas satisfaisante (voir plus haut), nous voudrions interpoler une matrice de la forme $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}(P)$ dont les coefficients « ressemblent » à des tailles. Ceci soulève la question de l'application d'une fonction scalaire quelconque f à une matrice, ici $x \mapsto f(x) = x^{-\frac{1}{2}} = 1/\sqrt{x}$. La réponse est donnée par l'algorithme ci-dessous, en trois étapes :



Fig. 2. Interpolation linéaire et géométrique de $M^{-\frac{1}{2}}$ (utilisant les fonctions de matrices log et exp dans le second cas). En couleur dans la version électronique.

- (i) diagonalisation de **M**, ce qui donne une base orthonormale de vecteurs propres **P** et une matrice diagonale **D** telles que $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$. On peut remarguer que \mathbf{P} est une matrice de rotation en 2D;
- (ii) application de la fonction scalaire f à chaque coefficient diagonal de **D**, produisant ainsi une nouvelle matrice diagonale appelée $f(\mathbf{D})$;
- (iii) recomposition de la nouvelle matrice $f(\mathbf{M}) = \mathbf{P} f(\mathbf{D}) \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$.

Dans la décomposition $\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{\mathrm{T}}$ de la première étape, les coefficients diagonaux λ_{j} de \mathbf{D} sont les valeurs propres de \mathbf{M} et peuvent être écrits comme $\lambda_j = 1/h_j^2 = h_j^{-2}$, ce qui définit la taille $h_j = 1/\sqrt{\lambda_j} = \lambda_j^{-\frac{1}{2}}$ dans la direction du vecteur propre correspondant. Ceci confirme que les coefficients de $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ «ressemblent» à des tailles et justifie leur interpolation linéaire ou géométrique.

Dans une interpolation linéaire, $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}(P)$ est défini par $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}(P_i)$, ce qui donne finalement $\mathbf{M}(P)$ = $(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}(P_i))^{-2}$. L'interpolation édométrique ne peut être appliquée telle quelle, car le produit de deux métriques n'est généralement pas une métrique. Ainsi, nous utilisons une autre expression utilisant les fonctions logarithme et exponentielle : $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}(P) = \exp(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \log(\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}(P_i)))$, d'où $\mathbf{M}(P) = (\exp(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \log(\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}(P_i))))^{-2}$. L'expression de la métrique interpolée géométriquement, que l'on trouve aussi en particulier dans [2], s'écrit comme $\mathbf{M}(P) = \exp(\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \log(\mathbf{M}(P_i)))$. Dans ce dernier article, les auteurs montrent les bénéfices de cette interpolation et, en particulier, que le déterminant de la métrique résultante est l'interpolation géométrique des déterminants des métriques d'origine, une propriété très intéressante, de laquelle découle le principe du maximum. Afin d'assurer cette dernière propriété, cette interpolation est utilisée dans [1] et [12] pour la génération de maillages adaptés.

La Fig. 2 montre l'interpolation de trois métriques dans un triangle K utilisant ces méthodes. À gauche, les métriques $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}(P_i)$ sont interpolées linéairement et à droite, les métriques sont interpolées géométriquement à l'aide des fonctions logarithme et exponentielle. Les variations linéaires et géométriques peuvent être observées, en particulier sur le côté gauche du triangle.

2.4. Interpolation suivant des bases naturelles (nouvelle approche)

Les méthodes d'interpolation de la section précédente sont coûteuses en temps, puisqu'elles exigent une étape de diagonalisation et parfois l'évaluation de fonctions transcendentales. Pour éviter cela, nous proposons un nouveau schéma consistant à définir un cadre commun de bases, dans lequel toutes les métriques sont diagonales (puisqu'une base unique n'existe pas). Dans le cas isotrope, une métrique **M** peut s'écrire sous la forme (1/hI)(1/hI). Cette écriture suggère une décomposition similaire pour le cas anisotrope. En effet, une métrique anisotrope M peut être décomposée comme $M = LL^{T}$ (en utilisant la décomposition de Cholesky) où L est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont > 0. Considérons la boule unité définie par la métrique **M**, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs **v** tels que $\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{v} = 1$, ou $\mathbf{v}^{\mathsf{T}}\mathbf{L}\mathbf{L}^{\mathsf{T}}\mathbf{v} = 1$. Puisque la matrice \mathbf{L} (ou \mathbf{L}^{T}) se comporte comme 1/h dans le cas isotrope, il s'avère justifié d'interpoler \mathbf{L}^{-1} (qui représente *h* dans le cas isotrope) dont la forme générale est $\mathbf{L}^{-1} = \begin{pmatrix} \star & 0 \\ \star & \star \end{pmatrix}$. Dans ce cas, seule une interpolation linéaire

des coefficients de L^{-1} est possible, puisque certains d'entre eux peuvent être négatifs.

Un autre schéma d'interpolation peut être défini comme suit. Par une factorisation des termes diagonaux de L, nous avons : $\mathbf{L} = \mathbf{L}'\mathbf{D}$ où \mathbf{L}' est une matrice triangulaire inférieure dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 et \mathbf{D} est une matrice diagonale :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \star & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/h_1 & 0 \\ 0 & 1/h_2 \end{pmatrix}.$$
 (2)

En utilisant cette factorisation, notre second schéma d'interpolation consiste à :



Fig. 3. Interpolation par «bases naturelles» (L⁻¹ linéaire, L' linéaire et h_j linéaire, L' linéaire et h_j géométrique). En couleur dans la version électronique.



Fig. 4. Interpolation de métriques en 3D. En haut, **M** linéaire, $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ linéaire et $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ géométrique (utilisant en fait log et exp). En bas, interpolation utilisant les bases naturelles : \mathbf{L}^{-1} linéaire, \mathbf{L}' linéaire avec taille h_j linéaire et géométrique. En couleur dans la version électronique.

- (i) interpoler \mathbf{L}' (linéairement seulement, puisqu'un coefficient peut être négatif);
- (ii) interpoler les tailles h_i (linéairement ou géométriquement).

Dans le cadre d'une interpolation géométrique des tailles h_j , ce second schéma est aussi une interpolation géométrique des déterminants des métriques. En effet, on a det(\mathbf{M}) = det(\mathbf{D}), et il est évident que, pour une métrique diagonale, la propriété citée est vérifiée. Ainsi, comme pour l'interpolation géométrique de $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$, ce nouveau schéma d'interpolation vérifie le principe du maximum.

Les schémas d'interpolation proposés s'appuient sur des cadres communs de bases, respectivement L^{-1} et L', appelés « bases naturelles ». Cette nouvelle méthodologie, basée sur la factorisation de matrices de Cholesky, est conceptuellement simple et se traduit par des algorithmes robustes et plus rapides que ceux invoquant des fonctions de matrices.

La Fig. 3 montre l'interpolation de trois métriques dans un triangle K, en utilisant à présent les bases naturelles. À gauche, \mathbf{L}^{-1} est interpolé linéairement. Au centre et à droite, \mathbf{L}' est interpolé linéairement et les tailles h_j sont interpolées, soit linéairement, soit géométriquement.

3. Méthodes d'interpolation de métriques en 3D

Toutes les méthodologies précédentes s'étendent systématiquement en 3D. À titre illustratif, la Fig. 4 donne une vue générale de ces différentes méthodologies en 3D. Chaque métrique est représentée par sa boule unité. Des métriques sont définies aux quatre sommets d'un tétraèdre et plusieurs métriques sont interpolées dans ce simplexe. La rangée supérieure illustre, de gauche à droite, une interpolation linéaire des coefficients des matrices, une interpolation linéaire de $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ et une interpolation géométrique de $\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ (utilisant en fait les fonctions de matrices log et exp). La rangée inférieure illustre des méthodes utilisant les bases naturelles : interpolation linéaire de \mathbf{L}^{-1} (à gauche), interpolation linéaire de \mathbf{L}' avec une interpolation linéaire (au milieu) et géométrique (à droite) des tailles h_i .

4. Comparaison des méthodes d'interpolation

Quatre critères sont utilisés pour comparer les méthodes d'interpolation précédentes. Premièrement, nous estimons le temps de calcul nécessaire à l'évaluation des métriques interpolées. Deuxièmement, nous considérons l'écart entre la taille moyenne de la métrique interpolée (selon les directions principales) et l'interpolation linéaire des tailles moyennes des métriques initiales. La taille moyenne *tm* d'une métrique est définie par $(h_1 + h_2)/2$ en 2D ou $(h_1 + h_2 + h_3)/3$ en 3D, où chaque h_j désigne la taille fournie par la métrique selon une direction principale, d'où le critère $|tm - \sum_i \alpha_i tm_i|$. Troisièmement, l'aire (resp. volume) d'un élément 2D (resp. 3D) *K* dans la métrique **M** est $\sqrt{\det(\mathbf{M})}|K|$ où |K| est l'aire ou le volume dans la métrique **M**. Le troisième critère concerne l'écart entre ce terme de correction dans la métrique interpolée et l'interpolation géométrique des termes de correction des métriques initiales : $|rd - \prod_i rd_i^{\alpha_i}|$. Finalement, le quatrième critère est l'estimation du nombre d'éléments d'un maillage respectant le champ de métrique continu, ce dernier étant obtenu par chacune des méthodes considérées. La table ci-dessous résume cette comparaison et montre l'avantage et l'efficacité de notre nouveau schéma d'interpolation de métriques. Dans cette table, le symbole $\sqrt{}$ signifie que le critère est correctement atteint, \approx indique que l'erreur relative est inférieure à 10%, et = représente une égalité exacte.

Méthode d'interpolation	tps calc.	tm	rd	nb. élém.
M linéaire	\checkmark			
$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ linéaire		\approx		\checkmark
$\mathbf{M}^{-\frac{1}{2}}$ géométrique (log et exp)			=	
Bases naturelles \mathbf{L}^{-1} lin.	\checkmark	~		\checkmark
Bases naturelles L ' lin. et h_j lin.	\checkmark	\approx		\checkmark
Bases naturelles L ' lin. et h_j géom.	\checkmark		=	

5. Conclusion

Plusieurs méthodologies d'interpolation de métriques **M** ont été présentées et comparées : par utilisation directe des coefficients des matrices, par réduction simultanée, par des fonctions de matrices ou *via* des «bases naturelles». Les interpolations sont linéaires ou géométriques, en 2D ou en 3D. Si le critère *rd* (qui détermine l'aire ou le volume d'un élément dans une métrique) est décisif, alors une interpolation géométrique de $M^{-\frac{1}{2}}$ (utilisant en fait des fonctions de matrices logarithmiques et exponentielles) ou une interpolation géométrique des tailles h_j dans les bases naturelles L' doit être appliquée. Sinon, un bon compromis est une interpolation linéaire des bases naturelles L^-1 , ou une interpolation linéaire des bases naturelles L' et des tailles h_j . Quelques remarques doivent cependant être faites au sujet des bases naturelles : cellesci dépendent du système de coordonnées, contrairement aux méthodes utilisant des fonctions de matrices; par ailleurs, dans certains cas, un léger changement dans une métrique peut entraîner une variation importante dans l'interpolation.

Références

- [1] F. Alauzet, Size gradation control of anisotropic meshes, Finite Elem. Anal. Des. 46 (1-2) (2010) 181-202.
- [2] V. Arsigny, P. Fillard, X. Pennec, N. Ayache, Log-Euclidean metrics for fast and simple calculus on diffusion tensors, Magn. Reson. Med. 56 (2006) 411-421.
- [3] E.F. d'Azevedo, B. Simpson, On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error, Numer. Math. 59 (1991) 321-348.
- [4] I. Babuska, K. Aziz, On the angle condition in the finite element method, SIAM J. Numer. Anal. 73 (2) (1976) 214–226.
- [5] M. Berzins, Mesh quality: a function of geometry, error estimates or both?, Eng. Comput. 15 (1999) 236–247.
- [6] H. Borouchaki, P.L. George, F. Hecht, P. Laug, E. Saltel, Delaunay mesh generation governed by metric specifications Part I: Algorithms, Finite Elem. Anal. Des. 25 (1–2) (1997) 61–83.
- [7] H. Borouchaki, P.L. George, B. Mohammadi, Delaunay mesh generation governed by metric specifications Part II: Application examples, Finite Elem. Anal. Des. 25 (1–2) (1997) 85–109.
- [8] P.J. Frey, P.L. George, Mesh Generation, Application to Finite Elements, second edition, Wiley, 2008.
- [9] P.L. George, H. Borouchaki, Delaunay Triangulation and Meshing, Application to Finite Elements, Hermes, 1998.
- [10] P.L. George, H. Borouchaki, P.J. Frey, P. Laug, E. Saltel, Mesh generation and mesh adaptivity, in: Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 1: Fundamentals, Wiley, 2004, pp. 497–523 (Chap. 17).
- [11] R. Löhner, Adaptive remeshing for transient problems, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 75 (1-3) (1989) 195-214.
- [12] T. Michal, J. Krakos, Anisotropic mesh adaptation through edge primitive operations, in: 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting, 2012, AIAA 2012-0159.
- [13] J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan, O.C. Zienkiewicz, Adaptive remeshing for compressible flow computations, J. Comput. Phys. 72 (1987) 449-466.
- [14] S. Rippa, Long and thin triangles can be good for linear interpolation, SIAM J. Numer. Anal. 29 (1) (1992) 257–270.
- [15] J.F. Thompson, B.K. Soni, N.P. Weatherill, Handbook of Grid Generation, CRC, 1998.
- [16] B.H.V. Topping, J. Muylle, P. Ivanyi, R. Putanowicz, B. Cheng, Finite Element Mesh Generation, Saxe-Coburg, 2004.