



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Géométrie différentielle

Immersion biharmoniques dans une variété de Cartan–Hadamard



Biharmonic immersion in a Cartan–Hadamard manifold

Saïd Asserda^a, M'Hamed Kassi^b^a Université Ibn Tofail, faculté des sciences, département de mathématiques, BP 242, Kenitra, Maroc^b Centre régional des métiers de l'éducation et de la formation, Meknès, Maroc

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 22 juillet 2013

Accepté le 11 septembre 2013

Disponible sur Internet le 8 octobre 2013

Présenté par Étienne Ghys

RÉSUMÉ

Si (N^{m+p}, h) est une variété de Cartan–Hadamard telle que $\text{Ric}(h) \geq -G(r_N(x))$, où $G(0) \geq 1$, $G' \geq 0$ et $G^{-1/2} \notin L^1(+\infty)$, alors toute immersion isométrique propre biharmonique $\phi : M^m \rightarrow (N^{m+p}, h)$ est harmonique.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

If (N^{m+p}, h) is a Cartan–Hadamard manifold such that $\text{Ric}(h) \geq -G(r_N(x))$ where $G(0) \geq 1$, $G' \geq 0$ and $G^{-1/2} \notin L^1(+\infty)$, then every proper biharmonic isometric immersion $\phi : M^m \rightarrow (N^{m+p}, h)$ is harmonic.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soit $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$ de classe C^∞ d'une variété riemannienne M de dimension m dans N de dimension n . L'énergie et la bi-énergie de ϕ sur $\Omega \Subset M$ sont définies par :

$$E_1(\phi) = \int_{\Omega} \langle d\phi, d\phi \rangle_h dv_g, \quad E_2(\phi) = \int_{\Omega} \langle \tau(\phi), \tau(\phi) \rangle_h dv_g$$

où $\tau(\phi) = \text{trace}_g \nabla d\phi$ est le champ de tension de ϕ et dv_g est la forme volume de M . L'application ϕ est harmonique (minimale) si ϕ est une extrémale de E_1 , i.e. $\tau(\phi) = 0$, et est biharmonique (ou biminimale) si ϕ est une extrémale de E_2 , i.e. $\tau_2(\phi) := -\Delta^\phi \tau(\phi) - \text{trace}_g R^N(d\phi, \tau(\phi))d\phi = 0$ où $\Delta^\phi = -\text{trace}_g(\nabla^\phi \nabla^\phi - \nabla_{\nabla_M}^\phi)$ est le laplacien sur les sections du fibré $\phi^{-1}(TN)$ au-dessus de M et R^N est le tenseur courbure de (N, h) défini par $R^N(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$. Une sous-variété $M \subset N$ est minimale (resp. biminimale) si l'injection de M dans N l'est. Dans [1], B.-Y. Chen a posé la conjecture : toute sous-variété bi-minimale de l'espace euclidien est minimale. Il expose, dans sa revue, les développements récents sur la conjecture [2]. Dans [4], S. Maeta propose une version géométrique globale de la conjecture de Chen : toute immersion complète bi-minimale dans une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative est minimale. Il montre que c'est le cas si l'immersion est propre (en particulier complète) et la courbure sectionnelle K_N vérifie $-C(1 + d_N^2(x, x_0))^{\frac{\alpha}{2}} \leq K_N(x) \leq 0$ où $C \geq 0$ et $0 \leq \alpha < 2$.

Adresses e-mail : asserda-said@univ-ibtoufail.ac.ma (S. Asserda), M'hamedkassi@yahoo.fr (M'H. Kassi).

Dans cette note, en supposant que l'espace ambiant (N, h) est de Cartan–Hadamard et que sa courbure de Ricci décroît vers $-\infty$ au plus quadratique en la distance, on montre que l'immersion est minimale.

Théorème 1.1. Soit $\phi : M^m \rightarrow (N^{m+p}, h)$ une immersion isométrique propre où N une variété de Cartan–Hadamard de courbure de Ricci : $\text{Ric}_h(x) \geq -G(d_N(x, x_0))$ avec $G : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ vérifiant $G(0) \geq 1$, $G' \geq 0$ et $G^{-1/2} \notin L^1([0, +\infty[)$. Si ϕ est bi-minimale, alors elle est minimale.

2. Préliminaires

Soit $M^m \subset (N^{m+p}, h)$ une sous-variété de dimension m dans une variété de dimension $m + p$. On munit M de la métrique induite par l'injection canonique i_M et $h : i_M^*(h)(X, Y) := \langle di_M(X), di_M(Y) \rangle_h$ pour $X, Y \in TM$. La deuxième forme fondamentale de $M : B : TM \times TM \rightarrow NM$ est définie par :

$$B(X, Y) = D_X Y - \nabla_X Y$$

pour tout $XY \in TM$ où D est la connexion de Levi-Civita de (N, h) , ∇ est celle de (M, i_M^*h) et $NM = TN \ominus TM$ est le fibré normal de M . Si $\eta \in TN$, l'application de Weingarten associée à $\eta : A_\eta : TM \rightarrow TM$, est définie par $D_X \eta = A_\eta X + \nabla_X^\perp \eta$, où ∇^\perp est la connexion normale, elle vérifie :

$$\langle B(X, Y), \eta \rangle_h = \langle A_\eta X, Y \rangle_h$$

Si $x \in M$, soit $(e_1, e_2, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_{m+p})$ une base locale orthonormale de $T_x N$ telle que (e_1, e_2, \dots, e_m) est une base orthonormale de $T_x M$. Alors B se décompose au point x en $B(X, Y) = \sum_{\alpha=m+1}^{m+p} B_\alpha(X, Y)e_\alpha$. La courbure moyenne de M est la trace de B :

$$H = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m B(e_i, e_i) = \sum_{\alpha=m+1}^{m+p} H_\alpha e_\alpha \quad \text{où} \quad H_\alpha = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m B_\alpha(e_i, e_i)$$

Maintenant, soit $\phi : M \rightarrow (N^{m+p}, h)$ une immersion isométrique. On identifie $d\phi(X)$ avec $X \in T_x M$ pour tout $x \in M$. Pour tous $X, Y \in TM$, la deuxième forme fondamentale de ϕ est $\nabla d\phi(X, Y) = \nabla_X^\phi(d\phi(Y)) - d\phi(\nabla_X Y) = B(X, Y)$ et, par suite, $\tau(\phi) = mH$. Donc ϕ est biharmonique si et seulement si $-\Delta H - \sum_{i=1}^m R^N(e_i, H)e_i = 0$, qu'on décompose en parties tangentielle et normale (voir [1]) :

$$\Delta^\perp H - \sum_{i=1}^m B(A_H e_i, e_i) + \sum_{i=1}^m (R^N(e_i, H)e_i)^\perp = 0 \tag{1}$$

$$m\nabla|H|^2 + 4 \sum_{i=1}^m A_{\nabla e_i^\perp H} e_i - \sum_{i=1}^m (R^N(e_i, H)e_i)^\top = 0 \tag{2}$$

3. Démonstration du théorème 1.1

Puisque ϕ est bi-minimale, d'après l'équation (1), on a :

$$\begin{aligned} \Delta|H|^2 &= 2|\nabla^\perp H|^2 + 2\langle H, \Delta^\perp H \rangle \\ &= 2|\nabla^\perp H|^2 + 2 \sum_{i=1}^m \langle B(A_H e_i, e_i), H \rangle - 2 \sum_{i=1}^m \langle R^N(e_i, H)e_i, H \rangle \\ &\geq 2|\nabla^\perp H|^2 + 2 \sum_{i=1}^m \langle A_H e_i, A_H e_i \rangle \quad \text{car } R^N \leq 0 \\ &= 2|\nabla^\perp H|^2 + 2m|H|^4 \end{aligned}$$

On pose $u(x) = |H(\phi(x))|^2$ et on considère la fonction :

$$F(x) = (R^2 - r^2(\phi(x)))^2 u(x) \quad \text{si } x \in M \cap \phi^{-1}(\overline{B}_R)$$

où $y_0 \in N \setminus \overline{\phi(M)}$ est un point fixé, $r(\phi(x)) = d_h(\phi(x), y_0)$ et $B_R = \{y \in N : d_h(y, y_0) < R\}$. La fonction F est non identiquement nulle sur $M \cap \phi^{-1}(\overline{B}_R)$ et nulle sur $M \cap \phi^{-1}(\partial \overline{B}_R)$. Puisque ϕ est propre, $M \cap \phi^{-1}(\overline{B}_R)$ est compacte dans M . Il existe un maximum $p \in M \cap \phi^{-1}(\overline{B}_R)$ de F . Par un argument de Calabi, on peut supposer que $\phi(p)$ n'est pas conjugué à y_0 . On a donc :

$$(i) \quad \nabla F(p) = 0 \iff \frac{\nabla F(p)}{F(p)} = \frac{2\nabla r^2(\phi(p))}{R^2 - r^2(\phi(p))} \text{ et } (ii) \quad \Delta F(p) \leq 0$$

et en utilisant (i), (ii) devient :

$$(iii) \quad \frac{\Delta u(p)}{u(p)} \leq \frac{6|\nabla r^2(\phi(p))|^2}{(R^2 - r^2(\phi(p)))^2} + \frac{2\Delta r^2(\phi(p))}{R^2 - r^2(\phi(p))}$$

On a $|\nabla r^2(\phi(p))|^2 \leq 4mr^2(\phi(p))$ et

$$\begin{aligned} \Delta r^2(\phi(p)) &= 2 \sum_{i=1}^m \langle (\nabla r)(\phi(p)), d\phi(e_i) \rangle^2 + 2r(\phi(p)) \sum_{i=1}^m \nabla dr(\phi(p))(d\phi(e_i), d\phi(e_i)) \\ &\quad + 2r(\phi(p)) \langle (\nabla r)(\phi(p)), \tau(\phi)(\phi(p)) \rangle \\ &\leq 2m + 2r(\phi(p)) \left(\sum_{i=1}^{m+p} \nabla dr(\phi(p))(e_i, e_i) - \sum_{i=m+1}^{m+p} \nabla dr(\phi(p))(e_i, e_i) \right) \\ &\quad + 2mr(\phi(p)) |H(\phi(p))| \end{aligned}$$

Puisque N est de Cartan–Hadamard, on a $\nabla dr(\phi(p))(e_i, e_i) \geq 0$ (voir [3]); par suite :

$$\Delta r^2(\phi(p)) \leq 2m + 2r(\phi(p))\Delta r(\phi(p)) + 2mr(\phi(p))|H(\phi(p))|$$

D'après le théorème de comparaison : $\Delta r(\phi(p)) \leq C\sqrt{G(r(\phi(p)))}$ (voir [5]), donc (iii) s'écrit :

$$\frac{\Delta u(p)}{u(p)} \leq \frac{24mr^2(\phi(p))}{(R^2 - r^2(\phi(p)))^2} + \frac{2m + 2Cr(\phi(p))\sqrt{G(r(\phi(p)))} + 2mr(\phi(p))|H(\phi(p))|}{R^2 - r^2(\phi(p))}$$

D'après (*) on a $\Delta u \geq 2mu^2$ sur M , on a donc :

$$2mu(p) \leq \frac{24mr^2(\phi(p))}{(R^2 - r^2(\phi(p)))^2} + \frac{2m + 2Cr(\phi(p))\sqrt{G(r(\phi(p)))} + 2mr(\phi(p))|H(\phi(p))|}{R^2 - r^2(\phi(p))}$$

et par suite :

$$2mF(p) \leq 24mr^2(\phi(p)) + (2m + 2Cr(\phi(p))\sqrt{G(r(\phi(p)))})(R^2 - r^2(\phi(p)) + 2mr(\phi(p))\sqrt{F(p)})$$

Puisque $r(\phi(p)) \leq R$ et $G \geq 1$, cette inégalité quadratique en $\sqrt{F(p)}$ entraîne :

$$|H(\phi(x))| \leq C\sqrt{G(R)} \quad \forall x \in M \cap \phi^{-1}(\overline{B_R}), \quad \forall R > 0$$

Si $w \in M$ et $R = d_h(\phi(w), y_0)$, alors on a :

$$|H(\phi(w))| \leq C\sqrt{G(r(\phi(w)))} \quad \forall w \in M$$

et donc :

$$\Delta(r \circ \phi)^2 \leq C(r \circ \phi)\sqrt{G(r \circ \phi)} \quad \text{sur } M$$

On en déduit que $(G, (r \circ \phi)^2)$ est une paire d'Omori–Yau dans M ; par suite, Δ_M vérifie le principe de maximum [5].

Supposons que u est majoré sur M ; pour tout $\epsilon > 0$, il existe $x_\epsilon \in M$ tels que :

$$\sup_M u \leq u(x_\epsilon) + \epsilon, \quad |\nabla u(x_\epsilon)| < \epsilon \quad \text{et} \quad \Delta u(x_\epsilon) < \epsilon$$

D'après (*) on a $2mu^2 \leq \Delta u$, donc :

$$0 \leq \sup_M u \leq u(x_\epsilon) + \epsilon \leq \left(\frac{1}{2m} + 1 \right) \epsilon$$

par suite $u = |H|^2 = 0$, i.e. M est minimale.

Supposons que u ne soit pas majoré. La fonction $v = (u + 1)^{-1/4}$ est minorée sur M . D'après le principe de maximum, pour tout $n \geq 1$, $\exists x_n \in M$ tel que :

$$v(x_n) < \inf_M v + \frac{1}{n}, \quad |\nabla v(x_n)| < \frac{1}{n}, \quad \Delta v(x_n) > -\frac{1}{n}$$

Puisque

$$(1+u)^{-3/2} \Delta u = -4(1+u)^{-1/4} \Delta v + 20|\nabla g|^2$$

et $2m^2 u \leq \Delta u$, on en déduit :

$$\frac{2m(u(x_n))^2}{(1+u(x_n))^{\frac{3}{2}}} < \frac{4}{n(1+u(x_n))^{\frac{1}{4}}} + \frac{20}{n^2}$$

Quand n tend vers l'infini, $u(x_n) \rightarrow \sup u = +\infty$. Le membre de droite tend vers l'infini et celui de gauche vers 0, ce qui est impossible.

Références

- [1] B.-Y. Chen, Some open problems and conjectures on submanifolds of finite type, *Soochow J. Math.* 17 (1991) 169–188.
- [2] B.-Y. Chen, Recent developments of biharmonic conjecture and modified biharmonic conjectures, arXiv:1307.0245v3 [math.DG].
- [3] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitext, Springer-Verlag, 1995.
- [4] S. Maeta, Biminimal properly immersed submanifolds in complete Riemannian manifolds of non-positive curvature, arXiv:1208.0473 [math.DG].
- [5] S. Pigola, M. Rigoli, A.G. Setti, Maximum Principles on Riemannian Manifolds and Applications, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, vol. 822, 2005.