



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Contrôle optimal

## Contrôlabilité asymptotique et synchronisation asymptotique d'un système couplé d'équations des ondes avec des contrôles frontières de Dirichlet



*Asymptotic controllability and asymptotic synchronization for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls*

Tatsien Li <sup>a,b,c,1</sup>, Bopeng Rao <sup>d</sup><sup>a</sup> School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China<sup>b</sup> Shanghai Key Laboratory for Contemporary Applied Mathematics, China<sup>c</sup> Laboratory of Nonlinear Mathematical Modeling and Methods, China<sup>d</sup> Institut de recherche mathématique avancée, université de Strasbourg, 67084 Strasbourg, France

## I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 17 septembre 2013

Accepté le 19 septembre 2013

Disponible sur Internet le 14 octobre 2013

Présenté par Philippe G. Ciarlet

## R É S U M É

Dans cette Note, la contrôlabilité nulle asymptotique et divers types de synchronisation asymptotique, considérés comme des sortes de contrôlabilité et synchronisation affaiblies, sont introduit et étudié pour un système couplé d'équations des ondes avec des contrôles frontières de Dirichlet. Des propriétés équivalentes d'observabilité faible sont établies.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## A B S T R A C T

In this Note, the asymptotic null controllability and various kinds of asymptotic synchronization, considered as some kinds of weakened controllability and synchronization, are introduced and studied for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls. Equivalent properties of weak observability are established.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

## Abridged English version

The exact synchronization in the PDEs case was first studied for a coupled system of wave equations, both for the higher-dimensional case in the framework of weak solutions by Li and Rao [6–8], and for the one-dimensional case in the framework of classical solutions by Li, Rao and Hu [3,9].

Roughly speaking, if the domain  $\Omega$  satisfies the usual geometrical control condition (see Bardos, Lebau and Rauch [2]), and the coupling matrix  $A$  satisfies some conditions of compatibility in the case related to the exact synchronization, then the exact controllability or various kinds of synchronization can be realized, provided that the control time  $T > 0$  is large enough and there are enough boundary controls. However, when the domain does not satisfy the geometrical control

Adresses e-mail : [dqli@fudan.edu.cn](mailto:dqli@fudan.edu.cn) (T. Li), [bopeng.rao@math.unistra.fr](mailto:bopeng.rao@math.unistra.fr) (B. Rao).<sup>1</sup> Projet supporté par the National Basic Research Program of China (No. 2013CB834100), et the National Natural Science Foundation of China (No. 11121101).

1631-073X/\$ – see front matter © 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2013.09.013>

condition or when there is a lack of boundary controls, “what weakened controllability or synchronization can be obtained” becomes a very interesting and practically important problem.

In order to answer this question, we introduce in this Note the concept of asymptotic controllability and asymptotic synchronization, and we establish the corresponding theories for a coupled system of wave equations. We point out that even though the concept of asymptotic synchronization is new, the concept of asymptotic controllability was already introduced in Li and Rao [4,5] for first-order linear hyperbolic systems, however, some further discussions on the asymptotic controllability will be given in this paper.

## 1. Introduction

L'étude de la synchronisation exacte d'un système d'équations des ondes a été effectuée dans Li et Rao [6–8] en dimension supérieure dans le cadre des solutions faibles, et dans Li, Rao et Hu [3,9] en dimension un dans le cadre des solutions classiques.

*Grosso modo*, si le domaine satisfait la condition géométrique du contrôle (voir Bardos, Lebau et Rauch [2]), et si la matrice du couplage satisfait certaines conditions de compatibilité, alors on peut établir divers résultats de contrôlabilité exacte ainsi que ceux de synchronisation exacte, pourvu que le temps du contrôle  $T > 0$  soit assez grand et que le nombre de contrôles soit suffisant. En revanche, lorsque le domaine ne satisfait pas la condition géométrique, ou s'il manque des contrôles, « quel genre de contrôlabilité ou de synchronisation affaiblie peut-on obtenir ? » devient une question très intéressante et importante dans la pratique.

Dans cette Note, nous allons introduire les notions de contrôlabilité asymptotique et de synchronisation asymptotique. Puis nous établissons les théories correspondantes pour un système couplé d'équations des ondes. Nous rappelons que, même si la notion de synchronisation asymptotique est nouvelle, la notion de contrôlabilité asymptotique avait été déjà introduite dans Li et Rao [4,5] pour des systèmes hyperboliques linéaires du premier ordre. Des discussions plus profondes et des résultats plus généraux sur la contrôlabilité nulle asymptotique sont donnés dans ce travail.

## 2. Résultats principaux

On désigne par  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné de frontière  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$  régulière et telle que  $\overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_0 = \emptyset$ . On pose  $U = (u^{(1)}, \dots, u^{(N)})^T$  et  $H = (h^{(1)}, \dots, h^{(N)})^T$ . Étant données deux matrices  $A, D \in \mathbb{M}^{N \times N}(\mathbb{R})$ , nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} U'' - \Delta U + AU = 0 & \text{dans } \Omega, \\ U = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ U = DH & \text{sur } \Gamma_1, \\ t = 0: \quad U = U_0, \quad U' = U_1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Posons  $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ ,  $\mathcal{V} = H_0^1(\Omega)$ ,  $\mathcal{L} = L^2(0, T; L^2(\Gamma_1))$ . Notons qu'une fonction  $H \in \mathcal{L}^N$  est définie seulement sur l'intervalle  $[0, T]$ . Alors son extension par zéro dans  $(0, +\infty)$ , notée encore par  $H \in \mathcal{L}^N$ , a naturellement un support compact dans  $[0, T]$ .

Nous avons montré dans Li et Rao [6,7] la contrôlabilité exacte du problème (2.1) lorsque la matrice  $D$  est inversible et le domaine  $\Omega$  satisfait la condition géométrique du contrôle. En revanche, lorsque le rang de la matrice  $D$  est inférieur à  $N$ , nous avons établi également la non-contrôlabilité exacte de (2.1) dans [8]. Nous nous intéressons donc à une notion plus faible de contrôlabilité exacte lorsque le rang de la matrice  $D$  est inférieur à  $N$ , c'est-à-dire, dans le cas du manque de contrôles.

**Définition 2.1.** Le problème (2.1) est asymptotiquement nul contrôlable au moment  $T > 0$ , si, pour toutes données initiales  $(U_0, U_1) \in (\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N$ , il existe une suite  $\{H_n\}$  de contrôles dans  $\mathcal{L}^N$  telle que la suite  $\{U_n\}$  de solutions correspondantes du problème (2.1) satisfait la condition finale suivante :

$$(U_n(T), U_n'(T)) \rightarrow 0 \quad \text{dans } (\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (2.2)$$

**Remarque 2.1.** Comme  $H_n$  est de support compact dans  $[0, T]$ , la solution  $U_n$  satisfait une condition de Dirichlet homogène sur  $\Gamma$  pour  $t \geq T$ . Alors, la condition (2.2) implique que :

$$(U_n(t), U_n'(t)) \rightarrow 0 \quad \text{dans } L_{loc}^\infty([T, +\infty); \mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

En posant  $\Phi = (\phi^{(1)}, \dots, \phi^{(N)})^T$ , nous considérons le problème adjoint suivant :

$$\begin{cases} \Phi'' - \Delta \Phi + A^T \Phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Phi = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ t = 0: \quad \Phi = \Phi_0, \quad \Phi' = \Phi_1. \end{cases} \quad (2.3)$$

**Définition 2.2.** Le problème adjoint (2.3) est  $D$ -observable sur l'intervalle  $[0, T]$  si :

$$D^T \partial_\nu \Phi = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_1 \tag{2.4}$$

implique que  $(\Phi_0, \Phi_1) = 0$ .

**Théorème 2.1.** Le problème (2.1) est asymptotiquement nul contrôlable si et seulement si son problème adjoint (2.3) est  $D$ -observable sur l'intervalle  $[0, T]$ .

**Démonstration.** Désignons par  $\mathcal{C}$  l'ensemble des valeurs initiales du problème rétrograde suivant :

$$\begin{cases} V'' - \Delta V + AV = 0 & \text{dans } \Omega, \\ V = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ V = DH & \text{sur } \Gamma_1, \\ V(T) = 0, \quad V'(T) = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

pour tous contrôles  $H \in \mathcal{L}^N$ . On montre d'abord que le problème (2.1) est asymptotiquement nul contrôlable si et seulement si  $\bar{\mathcal{C}} = (\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N$ . Puis on établit l'identité suivante :

$$\int_{\Omega} (V(0), \Phi_1) dx - \int_{\Omega} (V'(0), \Phi_0) dx = \int_0^T \int_{\Gamma_1} (DH, \partial_\nu \Phi) d\Gamma dt. \tag{2.6}$$

Si le problème (2.1) n'est pas asymptotiquement nul contrôlable, alors il existe une donnée initiale non triviale  $(-\Phi_1, \Phi_0) \in \mathcal{C}^\perp$ . De (2.6), on déduit :

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} (DH, \partial_\nu \Phi) d\Gamma dt = 0 \implies D^T \partial_\nu \Phi = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_1.$$

Ceci contredit la  $D$ -observabilité du problème adjoint (2.3).

Réciproquement, si le problème adjoint (2.3) n'est pas  $D$ -observable, alors il existe une solution  $\Phi$  qui satisfait la condition d'observation (2.4), mais sa valeur initiale  $(\Phi_0, \Phi_1)$  est non nulle. Par ailleurs, étant donné  $(U_0, U_1) \in \bar{\mathcal{C}}$ , il existe une suite  $\{H_n\}$  de contrôles dans  $\mathcal{L}^N$  telle que la suite  $\{V_n\}$  des solutions correspondantes du problème rétrograde (2.5) satisfasse :

$$V_n(0) \rightarrow U_0, \quad V'_n(0) \rightarrow U_1 \quad \text{dans } (\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

En passant à la limite dans (2.6), on obtient :

$$\langle (U_0, U_1), (-\Phi_1, \Phi_0) \rangle_{(\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N; (\mathcal{H} \times \mathcal{V})^N} = 0 \quad \text{pour tout } (U_0, U_1) \in \bar{\mathcal{C}}.$$

Ceci implique que  $(-\Phi_1, \Phi_0) \in \bar{\mathcal{C}}^\perp$  et donc contredit la condition  $\bar{\mathcal{C}} = (\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N$ .  $\square$

**Corollaire 2.1.** Si la matrice  $D$  est inversible, alors le problème (2.1) est asymptotiquement nul contrôlable.

**Définition 2.3.** Le problème (2.1) est asymptotiquement synchronisable au moment  $T > 0$  si, pour toutes données initiales  $(U_0, U_1) \in (\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N$ , il existe une suite  $\{H_n\}$  de contrôles dans  $\mathcal{L}^N$  de support compact dans  $[0, T]$  et une fonction  $u \in C^0([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^1([0, \infty); \mathcal{V}')$  telles que la suite  $\{U_n\}$  de solutions correspondantes du problème (2.1) satisfasse la condition suivante :

$$(u_n^{(k)}, u_n^{(k)'}) \rightarrow (u, u') \quad \text{dans } L_{loc}^\infty([T, +\infty); \mathcal{H} \times \mathcal{V}') \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty \tag{2.7}$$

pour tout  $1 \leq k \leq N$ . La fonction  $u$  sera appelée l'état de synchronisation asymptotique.

**Remarque 2.2.** La condition (2.7) n'implique pas la convergence de la suite  $\{H_n\}$  de contrôles. Néanmoins, puisque la suite  $\{H_n\}$  a un support compact dans  $[0, T]$ , la suite  $\{U_n, U'_n\}$  converge uniformément dans  $C^0([T, T']; (\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N)$  pour tout  $T' > T$ .

**Théorème 2.2.** Supposons que le problème (2.1) est asymptotiquement synchronisable, mais non asymptotiquement nul contrôlable, alors la matrice du couplage  $A = (a_{ij})$  satisfait les conditions de compatibilité suivantes :

$$\sum_{p=1}^N a_{kp} = \sum_{p=1}^N a_{lp}, \quad k, l = 1, \dots, N. \tag{2.8}$$

**Démonstration.** Étant donné  $(U_0, U_1) \in (\mathcal{H} \times \mathcal{V})^N$ , on désigne par  $\{H_n\}$  une suite de contrôles qui réalisent la synchronisation asymptotique du problème (2.1) et par  $\{U_n\}$  la suite de solutions correspondantes. Alors on a :

$$U_n'' - \Delta U_n + AU_n = 0 \quad \text{dans } (T, +\infty) \times \Omega. \tag{2.9}$$

Grâce à (2.7), en passant à la limite dans (2.9) au sens des distributions, nous obtenons :

$$\left( \sum_{p=1}^N a_{kp} - \sum_{p=1}^N a_{lp} \right) u = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'((T, +\infty) \times \Omega), \quad 1 \leq k, l \leq N.$$

Alors la contrôlabilité asymptotique non nulle implique les conditions de compatibilité (2.8). □

**Remarque 2.3.** Les conditions de compatibilité (2.8) sont les mêmes que celles obtenues dans Li et Rao [6,7] pour la synchronisation exacte.

**Théorème 2.3.** *Supposons que les conditions de compatibilité (2.8) sont satisfaites. Alors le problème (2.1) est asymptotiquement synchronisable au moment  $T > 0$  si et seulement si pour toute solution  $\Phi$  du problème (2.3), les conditions d'observation sur la frontière :*

$$D^T \partial_\nu \Phi = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_1 \tag{2.10}$$

et celles à l'instant final :

$$(\Phi(T), e) = 0, \quad (\Phi'(T), e) = 0 \quad \text{dans } \Omega \tag{2.11}$$

impliquent que  $\Phi \equiv 0$ , où  $e = (1, \dots, 1)^T$ .

Désignons par  $C_r$  la matrice d'ordre  $(r - 1) \times r$  donnée par :

$$C_r = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \dots & & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Posons  $C = C_N$ . Sous les conditions de compatibilité (2.8), il existe une unique matrice  $\bar{A}$  d'ordre  $(N - 1)$  telle que (voir Li et Rao [6,7])

$$CA = \bar{A}C. \tag{2.13}$$

Alors, en posant  $\Psi = (\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(N-1)})^T$ , nous considérons le problème adjoint réduit suivant :

$$\begin{cases} \Psi'' - \Delta \Psi + \bar{A}^T \Psi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \Psi = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ t = 0: \quad \Psi = \Psi_0, \quad \Psi' = \Psi_1. \end{cases} \tag{2.14}$$

**Définition 2.4.** Le problème adjoint réduit (2.14) est *CD-observable* sur l'intervalle  $[0, T]$  si :

$$D^T C^T \partial_\nu \Psi = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_1 \tag{2.15}$$

implique que  $(\Psi_0, \Psi_1) = 0$ .

**Théorème 2.4.** *Supposons que les conditions de compatibilité (2.8) soient satisfaites. Alors le problème (2.1) est asymptotiquement synchronisable au moment  $T > 0$  si et seulement si le problème adjoint réduit (2.14) est CD-observable sur l'intervalle  $[0, T]$ .*

**Démonstration.** Les conditions de compatibilité (2.8) signifient que le vecteur  $e = (1, \dots, 1)^T$  est un vecteur propre à droite de la matrice  $A$ . Désignons par  $E \in \mathbb{R}^N$  le vecteur propre à gauche correspondant.

Soit  $\Phi$  une solution de (2.3). En posans  $\tilde{\Phi} = (\Phi, e)E$ , on trouve :

$$\tilde{\Phi}'' - \Delta \tilde{\Phi} + A^T \tilde{\Phi} = 0, \quad \tilde{\Phi}(T) = \tilde{\Phi}'(T) = 0.$$

D'où il vient :

$$\tilde{\Phi} \equiv 0 \implies \Phi \in \{e\}^\perp = \text{Im}(C^T) \implies \Phi = C^T \Psi.$$

Puis, la condition de compatibilité (2.8) permet de montrer que :

$$\Psi'' - \Delta \Psi + \bar{A}^T \Psi = 0, \quad D^T C^T \partial_\nu \Psi = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_1.$$

Alors, la CD-observabilité implique que  $\Psi \equiv 0$ , puis  $\Phi \equiv 0$ .

Réciproquement, soit  $\Psi$  une solution de (2.14). On pose  $\Phi = C^T \Psi$ . À nouveau, grâce à (2.8), on montre que :

$$\Phi'' - \Delta \Phi + A^T \Phi = 0, \quad D^T \partial_\nu \Phi = 0 \quad \text{sur } [0, T] \times \Gamma_1.$$

D'autre part, en remarquant que  $Ce = 0$ , on obtient facilement l'observation finale :

$$(\Phi, e) = (C^T \Psi, e) = (\Phi, Ce) = 0, \quad (\Phi', e) = (C^T \Psi', e) = (\Phi', Ce) = 0$$

pour tout  $t \geq 0$ . Donc  $\Phi$  satisfait (2.3) et les observations (2.10)–(2.11). On a donc :

$$\Phi = C^T \Psi \equiv 0 \implies \Psi \equiv 0. \quad \square$$

**Corollaire 2.2.** *Supposons que les conditions de compatibilité (2.8) sont satisfaites et que la matrice CD est de rang  $(N - 1)$ . Alors le problème (2.1) est asymptotiquement synchronisable.*

Dans la suite, en regroupant les composantes de  $U$  en 2 groupes, par exemple,  $(u^{(1)}, \dots, u^{(m)})$  et  $(u^{(m+1)}, \dots, u^{(N)})$ , nous allons étudier le comportement asymptotique de chaque groupe.

**Définition 2.5.** Le problème (2.1) est asymptotiquement nul contrôlable et synchronisable en deux groupes au moment  $T > 0$  si, pour toute donnée initiale  $(U_0, U_1) \in (\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N$ , il existe une suite  $\{H_n\}$  de contrôles dans  $\mathcal{L}^N$  de support compact dans  $[0, T]$  et une fonction  $u \in C^0([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^1([0, \infty); \mathcal{V}')$  telles que la suite  $\{U_n\}$  de solutions correspondantes du problème (2.1) satisfasse les conditions suivantes :

$$(u^{(k)}, u^{(k)'}) \rightarrow (0, 0), \quad \text{respectivement } (u, u'), \quad \text{dans } L_{loc}^\infty([T, +\infty); \mathcal{H} \times \mathcal{V}') \tag{2.16}$$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$  pour tout  $1 \leq k \leq m$ , respectivement, pour tout  $m + 1 \leq k \leq N$ . La fonction  $u$  sera appelée l'état de synchronisation asymptotique partielle.

**Théorème 2.5.** *Supposons que le problème (2.1) est asymptotiquement nul contrôlable et synchronisable en deux groupes, mais non asymptotiquement nul contrôlable. Alors, la matrice du couplage  $A = (a_{ij})$  satisfait les conditions de compatibilité suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{p=m+1}^N a_{kp} = 0, \quad k = 1, \dots, m, \\ \sum_{p=m+1}^N a_{kp} = \sum_{p=m+1}^N a_{lp}, \quad k, l = m + 1, \dots, N. \end{array} \right. \tag{2.17}$$

**Remarque 2.4.** La démonstration est semblable à celle du Théorème 2.2. Par ailleurs, les conditions de compatibilité (2.17) sont les mêmes que celles obtenues dans Li et Rao [6,7] pour la contrôlabilité nulle exacte et la synchronisation exacte en deux groupes.

Désignons maintenant par  $C$  la matrice d'ordre  $(N - 1) \times N$  définie par :

$$C = \begin{pmatrix} I_m & \\ & C_{N-m} \end{pmatrix}. \tag{2.18}$$

Sous les conditions de compatibilité (2.17), il existe une matrice  $\bar{A}$  unique d'ordre  $(N - 1)$  telle que l'on ait (2.13) (voir Li et Rao [6,7]). Ceci nous permet de considérer le problème adjoint réduit qui est de la même forme que (2.14), mais où les matrices associées  $C$  et  $\bar{A}$  sont données par (2.18) et (2.13), respectivement.

**Théorème 2.6.** *Supposons que les conditions de compatibilité (2.17) sont satisfaites. Alors le problème (2.1) est asymptotiquement nul contrôlable et synchronisable en deux groupes si et seulement si son problème adjoint réduit (2.14) est CD-observable sur l'intervalle  $[0, T]$ , où les matrices associées  $C$  et  $\bar{A}$  sont données par (2.18) et (2.13), respectivement.*

**Définition 2.6.** Le problème (2.1) est asymptotiquement synchronisable en deux groupes au moment  $T > 0$  si pour toute donnée initiale  $(U_0, U_1) \in (\mathcal{H} \times \mathcal{V}')^N$ , il existe une suite  $\{H_n\}$  de contrôles dans  $\mathcal{L}^N$  de support compact dans  $[0, T]$  et deux fonctions  $u, v \in C^0([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^1([0, \infty); \mathcal{V}')$ , telles que la suite  $\{U_n\}$  de solutions correspondantes du problème (2.1) satisfasse les conditions suivantes :

$$(u^{(k)}, u^{(k)'}) \rightarrow (u, u'), \quad \text{respectivement } (v, v'), \quad \text{dans } L_{loc}^\infty([T, +\infty); \mathcal{H} \times \mathcal{V}') \quad (2.19)$$

lorsque  $n \rightarrow +\infty$  pour tout  $1 \leq k \leq m$ , respectivement, pour tout  $m + 1 \leq k \leq N$ . La fonction  $(u, v)$  sera appelée l'état de synchronisation asymptotique en deux groupes.

Similairement, désignons par  $C$  la matrice d'ordre  $(N - 2) \times N$  définie par :

$$C = \begin{pmatrix} C_m & & \\ & & \\ & & C_{N-m} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Alors, sous les conditions de compatibilité suivantes :

$$\sum_{p=1}^m a_{kp} = \sum_{p=1}^m a_{lp}, \quad \sum_{p=m+1}^N a_{kp} = \sum_{p=m+1}^N a_{lp} \quad (2.21)$$

pour tout  $k, l = 1, \dots, m$  et  $k, l = m + 1, \dots, N$ , respectivement, il existe une matrice  $\bar{A}$  unique d'ordre  $(N - 2)$  telle que l'on ait (2.13) (voir Li et Rao [6,7]). On peut donc considérer le problème adjoint réduit qui est de la même forme que (2.14), mais où les matrices associées  $C$  et  $\bar{A}$  sont données par (2.20) et (2.13), respectivement.

**Théorème 2.7.** Supposons que les conditions de compatibilité (2.21) soient satisfaites. Alors, le problème (2.1) est asymptotiquement synchronisable en deux groupes si et seulement si son problème adjoint réduit (2.14) est CD-observable sur l'intervalle  $[0, T]$ , où les matrices associées  $C$  et  $\bar{A}$  sont données par (2.20) et (2.13), respectivement.

### 3. Quelques exemples

Soit  $\epsilon > 0$  assez petit. Rappelons que le système suivant :

$$\begin{cases} \phi'' - \Delta\phi + \epsilon\psi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \psi'' - \Delta\psi + \epsilon\phi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \phi = \psi = 0 & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.1)$$

est observable par l'une des traces  $\partial_\nu\phi|_{\Gamma_1}$  ou  $\partial_\nu\psi|_{\Gamma_1}$  sur un certain intervalle  $[0, T]$  (voir Alabau [1], Liu et Rao [10]).

**Exemple 3.1.** Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \epsilon v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v'' - \Delta v + \epsilon u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ u = h, \quad v = 0 & \text{sur } \Gamma_1. \end{cases} \quad (3.2)$$

Le problème (3.2) n'est pas exactement nul contrôlable par un seul contrôle (voir [8]). En revanche, son problème adjoint (3.1) est  $D$ -observable. D'après le Théorème 2.1, le problème (3.2) est asymptotiquement nul contrôlable, pourvu que  $T > 0$  soit assez grand.

**Exemple 3.2.** Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v'' - \Delta v - \epsilon v + \epsilon w = 0 & \text{dans } \Omega, \\ w'' - \Delta w - \epsilon u + \epsilon w = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = v = w = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

avec l'une des trois conditions de contrôles suivantes sur  $\Gamma_1$  :

- (i)  $u = h, v = w = 0$  sur  $\Gamma_1$ ,
- (ii)  $u = v = 0, w = h$  sur  $\Gamma_1$ ,
- (iii)  $u = w = 0, v = h$  sur  $\Gamma_1$ .

Remarquons d'abord que (3.3) n'est pas exactement synchronisable par un seul contrôle. En revanche, il est asymptotiquement synchronisable par un seul contrôle  $u = h$  ou  $w = h$ , mais il n'est pas asymptotiquement synchronisable par un seul contrôle  $v = h$ .

## Références

- [1] F. Alabau-Boussouira, A two-level energy method for indirect boundary observability and controllability of weakly coupled hyperbolic systems, *SIAM J. Control Optim.* 42 (2003) 871–905.
- [2] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary, *SIAM J. Control Optim.* 30 (1992) 1024–1065.
- [3] L. Hu, T.-T. Li, B. Rao, Exact boundary synchronization for a coupled system of 1-D wave equations with coupled boundary conditions of dissipative type, *Commun. Pure Appl. Anal.* (2014), sous presse.
- [4] T.-T. Li, B. Rao, Contrôlabilité asymptotique de systèmes hyperboliques linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 349 (2011) 663–668.
- [5] T.-T. Li, B. Rao, Asymptotic controllability for linear hyperbolic systems, *Asympt. Anal.* 72 (2011) 169–187.
- [6] T.-T. Li, B. Rao, Synchronisation exacte d'un système coupé d'équations des ondes par des contrôles frontières de Dirichlet, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* 350 (2012) 767–772.
- [7] T.-T. Li, B. Rao, Exact synchronization for a coupled system of wave equations with Dirichlet boundary controls, *Chin. Ann. Math., Ser. B* 34 (2013) 139–160.
- [8] T.-T. Li, B. Rao, A note on the exact synchronization by groups for a coupled system of wave equations, *Math. Methods Appl. Sci.* (2014), sous presse.
- [9] T.-T. Li, B. Rao, L. Hu, Exact boundary synchronization for a coupled system of 1-D wave equations, *ESAIM, COCV* (2013), sous presse.
- [10] Z. Liu, B. Rao, A spectral approach to the indirect boundary control of a system of weakly coupled wave equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 23 (2009) 399–414.