



ELSEVIER

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com



Probabilités/Statistique

Tests d'adéquation à la mesure de Haar, identité de duplication de Watson et représentations d'un groupe compact



Goodness of fit tests for the Haar measure, Watson's duplication identity and representations of compact groups

Jean-Renaud Pycke

Université d'Évry, département de mathématiques, laboratoire d'analyse et probabilité, 23, bd de France, 91037 Évry cedex, France

INFO ARTICLE

Historique de l'article :

Reçu le 10 août 2013

Accepté après révision le 27 septembre 2013

Disponible sur Internet le 16 octobre 2013

RÉSUMÉ

Nous utilisons la théorie de la représentation des groupes compacts pour la construction de tests d'adéquation à la mesure de probabilité de Haar. Comme application, nous interprétons l'identité de duplication déjà connue pour la statistique circulaire de Watson en termes de représentation des groupes.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

ABSTRACT

We use the theory of compact groups representations in building goodness-of-fit tests for the Haar probability measure. An interpretation of a duplication identity already known for the celebrated circular test of G. Watson is given in terms of representation theory.

© 2013 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soit G un groupe compact et μ l'unique mesure de Haar telle que $\mu(G) = 1$. Comment construire, à partir de la table des caractères de G , ou de ses représentations, des tests d'adéquation à μ ? Cette question s'applique à la statistique directionnelle, domaine dont l'ouvrage de référence reste [7], mise à jour de l'ouvrage fondateur [6]. Or, dans [7], en particulier §6.3 et 10.8, ainsi que dans les articles de référence liés [2] et [4], la théorie de la représentation des groupes reste au second plan. L'objectif de cette note est donc de décrire un des aspects de cette théorie utile dans ces cadres fondés par [2] et [4], qui restent des plus actuels et des plus productifs.

Les propriétés de base de la théorie des groupes et des U -statistiques utilisées se trouvent dans [3] chapitres XXI, [5] chapitre XI, [9] chapitre 13, [8] chapitre 5 et [12] chapitres II–VI.

Supposons donc vouloir tester l'hypothèse : $H_0 : (g_1, \dots, g_n) \in G^n$ est un échantillon d'une variable aléatoire distribuée sur G selon la mesure μ . Cette dernière est invariante par les groupes de translations ; il est donc naturel de souhaiter que la statistique du test ait la même propriété d'invariance, en d'autres termes que la valeur de la statistique soit la même pour l'échantillon (g_1, \dots, g_n) et ses translatés à gauche (gg_1, \dots, gg_n) et à droite $(g_1g^{-1}, \dots, g_ng^{-1})$, et ceci quel que soit $g \in G$.

Adresse e-mail : jrpycke@univ-evry.fr.

Nous nous limiterons, dans cette note, à l'étude de la classe très large et fondamentale d'un point de vue théorique et pratique des U -statistiques dégénérées, définies par :

$$U_n(K) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} K(g_i, g_j), \quad (1)$$

où $K : G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ est un noyau continu et de plus centré, symétrique et de type positif, c'est-à-dire vérifiant, quels que soit $g_1, g_2 \in G$ et $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable :

$$K(g_1, g_2) = K(g_2, g_1), \quad \int K(g_1, g_2) d\mu(g_2) = 0, \quad \iint K(g_1, g_2) f(g_1) \overline{f(g_2)} d\mu(g_1) d\mu(g_2) \geq 0. \quad (2)$$

Les produits scalaire et de convolution sur G sont définis par :

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int \phi(g) \overline{\psi(g)} d\mu(g), \quad \phi * \psi(g_1) = \int \phi(g_1 g_2^{-1}) \psi(g_2) d\mu(g_2) \quad (G \text{ infini}), \quad (3)$$

$$\langle \phi | \psi \rangle = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \phi(g) \overline{\psi(g)}, \quad \phi * \psi(g_1) = |G|^{-1} \sum_{g_2 \in G} \phi(g_1 g_2^{-1}) \psi(g_2) \quad (G \text{ fini de cardinal } |G|). \quad (4)$$

Remarque 1. Les conditions imposées à K en font la fonction de covariance d'un processus gaussien, garantissant en même temps des propriétés de consistance du test associé à la statistique $U_n(K)$.

Pour nos U -statistiques, l'invariance équivaut à l'existence d'une fonction continue $k : G \rightarrow \mathbb{R}$ telle $K(g_1, g_2) = k(g_1 g_2^{-1})$, avec :

$$k(g_2 g_1 g_2^{-1}) = k(g_1), \quad k(g_1^{-1}) = k(g_1), \quad \int k(g) d\mu(g) = 0, \quad \langle k * f | f \rangle \geq 0 \quad (5)$$

quels que soient $g_1, g_2 \in G$ et $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ intégrable.

Ainsi, k est une fonction centrale sur G , de moyenne nulle. Elle admet donc un développement convergeant uniformément sur G , de la forme $k(g) = \sum_{\chi \in \mathcal{I}} \lambda_\chi \chi(g)$ avec $\lambda_\chi = \langle k | \chi \rangle$, où \mathcal{I} est l'ensemble, fini ou dénombrable, des caractères des représentations unitaires irréductibles non triviales, deux à deux non équivalentes de G . Ces caractères sont continus et vérifient les relations :

$$\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}, \quad \chi(hgh^{-1}) = \chi(g), \quad \int \chi(g) d\mu(g) = 0, \quad \langle \chi | \chi' \rangle = \delta_{\chi, \chi'}, \quad d_\chi \chi * \chi' = \delta_{\chi, \chi'} \chi \quad (6)$$

où $d_\chi = \chi(e_G)$, e_G étant l'élément neutre du groupe.

Le type positif de k implique $\lambda_\chi = d_\chi \langle k * \chi | \chi \rangle \geq 0$, donc $0 \leq \sum_{\chi \in \mathcal{I}} \lambda_\chi d_\chi = k(e_G) < \infty$, et, joint à l'inégalité $|\chi(g)| \leq d_\chi$ quel que soit $g \in G$, que la convergence est absolue et uniforme dans son développement $k(g) = \sum_{\chi \in \mathcal{I}} \lambda_\chi \chi(g)$.

Pour que $U_n(K)$ soit à valeurs réelles, k et K doivent être des fonctions réelles. Concernant la question de la réalité, les caractères des représentations irréductibles de G sont de trois types : réel, complexe ou quaternionique (types i), ii) et iii) dans [9] p. 122). Le caractère χ est dit complexe si χ n'est pas une fonction réelle. Nous écrivons $\chi \in \mathcal{I}_\mathbb{C}$. Si $\chi \in \mathcal{I}_\mathbb{C}$, alors $\bar{\chi} \in \mathcal{I}_\mathbb{C} \setminus \{\chi\}$. En choisissant dans $\mathcal{I}_\mathbb{C}$ un seul caractère par couple de caractères conjugués pour former l'ensemble $\mathcal{I}'_\mathbb{C}$, on obtient les partitions :

$$\mathcal{I}_\mathbb{C} = \mathcal{I}'_\mathbb{C} \cup \overline{\mathcal{I}'_\mathbb{C}} = \bigcup_{\chi \in \mathcal{I}'_\mathbb{C}} \{\chi, \bar{\chi}\}.$$

Le caractère χ est dit réel si χ est une fonction réelle et s'il existe une représentation réelle $r : G \rightarrow \mathcal{M}_{d_\chi}(\mathbb{R})$ de caractère χ , nous écrivons $\chi \in \mathcal{I}_\mathbb{R}$. La caractère χ est dit quaternionique si son caractère χ est une fonction réelle, sans qu'il existe de représentation réelle de caractère χ .

Résumons les résultats déjà obtenus pour le noyau K .

Proposition 1.1. Il existe une bijection entre les noyaux K des U -statistiques dégénérées et invariantes et les suites réelles $(\lambda_\chi)_{\chi \in \mathcal{I}}$ telles que :

$$\forall \chi \in \mathcal{I} : \lambda_\chi \in [0, \infty), \quad \lambda_\chi = \lambda_{\bar{\chi}}; \quad \sum_{\chi \in \mathcal{I}} \lambda_\chi d_\chi < \infty.$$

Elle est donnée par la relation :

$$K(g_1, g_2) = \sum_{\chi \in \mathcal{I}_\mathbb{R} \cup \mathcal{I}_\mathbb{H}} \lambda_\chi \chi(g_1 g_2^{-1}) + \sum_{\chi \in \mathcal{I}'_\mathbb{C}} \lambda_\chi \{\chi(g_1 g_2^{-1}) + \bar{\chi}(g_1 g_2^{-1})\}, \quad (7)$$

la convergence dans (7) étant absolue et uniforme sur $G \times G$.

Nous noterons par la suite r^χ une réalisation quelconque de la représentation de caractère χ et $r_{i,j}^\chi(g)$ ses éléments matriciels.

Remarque 2. Si $\chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$, on dispose en théorie d'éléments matriciels $r_{i,j}^\chi(g)$ réels, mais en pratique, une telle réalisation est parfois difficile à expliciter, ou est d'utilisation bien moins commode que des réalisations complexes équivalentes. Le cas emblématique d'une telle situation est $SO(3)$, dont toutes les représentations sont réelles, bien qu'à notre connaissance, étrangement, aucune expression simple d'éléments matriciels réels en termes des fonctions spéciales classiques ne soit accessible dans la littérature.

Les définitions et propriétés élémentaires des représentations d'un groupe impliquent :

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{d_\chi} r_{i,i}^\chi(g), \quad \chi(g_1 g_2^{-1}) = \sum_{i=1}^{d_\chi} r_{i,i}^\chi(g_1 g_2^{-1}) = \sum_{i=1}^{d_\chi} \sum_{j=1}^{d_\chi} r_{i,j}^\chi(g_1) \overline{r_{i,j}^\chi(g_2)}, \tag{8}$$

d'où, quels que soient $(g_\ell, z_\ell)_{1 \leq \ell \leq n} \in G \times \mathbb{C}$, $\sum_{\ell,\ell'} \chi(g_\ell g_{\ell'}^{-1}) z_\ell \overline{z_{\ell'}} = \sum_{i=1}^{d_\chi} \sum_{j=1}^{d_\chi} |\sum_{\ell=1}^{d_\chi} z_\ell r_{i,j}^\chi(g_\ell)|^2 \geq 0$, et on conclut que χ est de type positif – voir a) et b) pp. 56–57 dans [12] §14 pour l'équivalence avec la définition donnée par l'inégalité dans (5).

Les fonctions $r_{k,\ell}^\chi$ vérifient les relations d'orthogonalité et de convolution :

$$d_\chi \langle r_{k,\ell}^\chi | r_{k',\ell'}^\chi \rangle = \delta_{\chi,\chi'} \delta_{k,k'} \delta_{\ell,\ell'}, \quad d_\chi r_{k,\ell}^\chi * r_{k',\ell'}^\chi = \delta_{\chi,\chi'} \delta_{\ell,\ell'} r_{k,k'}^\chi, \quad d_\chi \langle r_{k,k}^\chi, \chi \rangle = 1, \quad d_\chi (r_{k,k}^\chi * \chi) = r_{k,k}^\chi. \tag{9}$$

Introduisons les noyaux :

$$K_\chi(g_1, g_2) = \begin{cases} d_\chi \chi(g_1 g_2^{-1}) & \text{si } \chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \cup \mathcal{I}_{\mathbb{H}}, \\ d_\chi \{\chi + \overline{\chi}\}(g_1 g_2^{-1}) & \text{si } \chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{C}}. \end{cases} \tag{10}$$

Ces noyaux sont réels et, d'après les propriétés précédentes, on a :

$$K_\chi(g_1, g_2) = \begin{cases} d_\chi \sum_{1 \leq i,j \leq d_\chi} r_{i,j}^\chi(g_1) \overline{r_{i,j}^\chi(g_2)} & \text{si } \chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \cup \mathcal{I}_{\mathbb{H}}, \\ d_\chi \sum_{1 \leq i,j \leq d_\chi} \{r_{i,j}^\chi(g_1) \overline{r_{i,j}^\chi(g_2)} + \overline{r_{i,j}^\chi(g_1)} r_{i,j}^\chi(g_2)\} & \text{si } \chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{C}}, \end{cases} \tag{11}$$

ainsi que $\langle r_{i,j}^\chi | K_\chi(\cdot, g) \rangle = r_{i,j}^\chi(g)$.

Cette dernière relation suggère que le cadre approprié est celui des espaces reproduisants introduits dans l'article fondateur [1] (voir (6) et le Théorème, pp. 346–347) afin de tirer toutes les conséquences de (11), dont le résultat suivant.

Théorème 1.2. Soient $\chi \in \mathcal{I}$ et $r^\chi : G \rightarrow \mathcal{M}_{d_\chi}(\mathbb{C})$ une représentation de caractère χ . Soit :

$$\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^\chi = \text{Vect}_{\mathbb{R}} \{ g \mapsto \Re r_{i,j}^\chi(g), g \mapsto \Im r_{i,j}^\chi(g) : 1 \leq i, j \leq d_\chi \} \tag{12}$$

l'espace euclidien des fonctions engendrées par les parties réelles et imaginaires des éléments matriciels de r^χ , muni du produit scalaire

$$(\phi | \psi)_\chi = \iint K_\chi(g, h) r(g) s(h) d\mu(g) d\mu(h) = \begin{cases} d_\chi (\phi | \chi * \psi) & \text{si } \chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \cup \mathcal{I}_{\mathbb{H}}, \\ d_\chi (\phi | (\chi + \overline{\chi}) * \psi) & \text{si } \chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{C}}. \end{cases} \tag{13}$$

Soit $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^\chi$ son complexifié. On a les propriétés suivantes.

- 1) Les noyaux reproduisants de $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^\chi$ et de $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^\chi$ sont égaux ; ils coïncident avec la fonction K_χ .
- 2) La dimension commune $\delta_\chi = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}_{\mathbb{R}}^\chi = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{E}_{\mathbb{C}}^\chi$ vaut d_χ^2 si $\chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \cup \mathcal{I}_{\mathbb{H}}$, $2d_\chi^2$ si $\chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{C}}$.
- 3) Une base orthonormale de $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}^\chi$ est $(r_{i,j}^\chi)_{1 \leq i,j \leq d_\chi}$ si $\chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \cup \mathcal{I}_{\mathbb{H}}$, $(r_{i,j}^\chi, \overline{r_{i,j}^\chi})_{1 \leq i,j \leq d_\chi}$ si $\chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{C}}$.

Le Corollaire 11.5 dans [5] ou le Théorème en p. 194 dans [8] donne alors le résultat suivant.

Corollaire 1.3. Sous H_0 on a :

$$nU_n(K_\chi) \xrightarrow{p.s.} \begin{cases} d_\chi^{-1} \sum_{1 \leq i,j \leq d_\chi} (\xi_{\chi,i,j}^2 - 1) & \text{si } \chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \cup \mathcal{I}_{\mathbb{H}}, \\ d_\chi^{-1} \sum_{1 \leq i,j \leq d_\chi} \{(\xi_{\chi,i,j}^2 - 1) + (\xi_{\overline{\chi},i,j}^2 - 1)\} & \text{si } \chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{C}}, \end{cases}$$

et si K est le noyau donné par (7), alors on a, de plus :

$$nU_n(K) \xrightarrow{p.s.} \sum_{\chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \cup \mathcal{I}_{\mathbb{H}}} \frac{\lambda_{\chi}}{d_{\chi}} \sum_{1 \leq i, j \leq d_{\chi}} (\xi_{\chi, i, j}^2 - 1) + \sum_{\chi \in \mathcal{I}'_{\mathbb{C}}} \frac{\lambda_{\chi}}{d_{\chi}} \sum_{1 \leq i, j \leq d_{\chi}} \{(\xi_{\chi, i, j}^2 - 1) + (\xi_{\bar{\chi}, i, j}^2 - 1)\} \quad (14)$$

où $(\xi_{\chi, i, j})_{\chi \in \mathcal{I}, 1 \leq i, j \leq d_{\chi}}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes réelles standard, avec $\xi_{\chi, i, j}$ et $\xi_{\chi', i', j'}$ indépendantes dès que $(\chi, i, j) \neq (\chi', i', j')$.

Remarque 3. En statistiques, les preuves du résultat précédent s'appuient sur le développement dit de Karhunen–Loève (DKL) du noyau K (dans [8] §5.5, formule (2) p. 196). Nos résultats montrent que, si $(\phi_i^{\chi})_{1 \leq i \leq d_{\chi}}$ est une base orthonormale réelle de $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}^{\chi}$ pour le produit scalaire (13), alors $(\psi_i^{\chi} = d_{\chi}^{1/2} \phi_i^{\chi})_{1 \leq i \leq d_{\chi}}$ est une famille orthonormale réelle pour le produit scalaire (3) et un DKL est :

$$K(g_1, g_2) = \sum_{\chi \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \cup \mathcal{I}_{\mathbb{H}} \cup \mathcal{I}'_{\mathbb{C}}} \frac{\lambda_{\chi}}{d_{\chi}} \sum_{1 \leq i \leq d_{\chi}} \psi_i^{\chi}(g_1) \psi_i^{\chi}(g_2). \quad (15)$$

Une conséquence de (14) lorsque tous les caractères non triviaux sont complexes est l'identité dite de duplication de G. Watson (voir [10] pour un historique, une discussion et une preuve). Pour le tore \mathbb{U}_N et le groupe d'Heisenberg fini $H(q)$, voir (21.3.9) dans [3] et Table II.4 en p. 296 dans [11].

Corollaire 1.4 (Identité de duplication de Watson). Avec les notations du corollaire précédent, si G satisfait, de plus, la propriété $\mathcal{I}_{\mathbb{R}} = \mathcal{I}_{\mathbb{H}} = \emptyset$, alors, sous H_0 , la statistique $U_n(K)$ satisfait l'identité de duplication :

$$nU_n(K) \xrightarrow{p.s.} V_0(K) + V_1(K), \quad V_0(K) \stackrel{\text{en loi}}{=} V_1(K) \stackrel{\text{en loi}}{=} \sum_{\chi \in \mathcal{I}'_{\mathbb{C}}} \frac{\lambda_{\chi}}{d_{\chi}} \sum_{1 \leq i, j \leq d_{\chi}} (\xi_{\chi, i, j}^2 - 1),$$

$V_0(K)$ et $V_1(K)$ indépendantes.

Cette propriété est satisfaite par les groupes \mathbb{U}_N , $N \geq 1$ et $H(q)$, q impair.

Références

- [1] Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950).
- [2] R.J. Beran, Testing for uniformity on a compact homogeneous space, J. Appl. Probab. 5 (1968).
- [3] J. Dieudonné, Éléments d'analyse, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
- [4] M.E. Giné, Invariant tests for uniformity on compact Riemannian manifolds based on Sobolev norms, Ann. Stat. 3 (1975).
- [5] S. Janson, Gaussian Hilbert Spaces, Cambridge University Press, 1997.
- [6] K.M.ardia, Statistics of Directional Data, Academic Press, London, 1972.
- [7] K.M.ardia, P. Jupp, Directional Statistics, Wiley, Londres, 2000.
- [8] R.J. Serfling, Approximation Theorems of Mathematical Statistics, John Wiley and Sons Inc., 2002.
- [9] J.-P. Serre, Représentation des groupes linéaires finis, Hermann, Paris, 1979.
- [10] Z. Shi, M. Yor, On an identity in law for the variance of the Brownian bridge, Bull. Lond. Math. Soc. 29 (1997).
- [11] A. Terras, Fourier Analysis on Finite Groups and Applications, Cambridge University Press, 1999.
- [12] A. Weil, L'intégration dans les groupes topologiques, Hermann, Paris, 1965.