C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 645–649

Contents lists available at ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I

www.sciencedirect.com

Probabilités/Physique mathématique

Particule à haute énergie dans un potentiel aléatoire dépendant du temps

High-energy particle in a time-dependent random potential

Émilie Soret[a,b], Stephan De Bièvre[a,b]

[a] *Equipe-Projet MEPHYSTO, centre de Recherche Inria Futurs, parc scientifique de la Haute-Borne, 40, avenue Halley, B.P. 70478, 59658 Villeneuve-d'Ascq cedex, France*
[b] *Laboratoire Paul-Painlevé, CNRS, UMR 8524 et UFR de mathématiques, université Lille-1, Sciences et Technologies, 59655 Villeneuve-d'Ascq cedex, France*

INFO ARTICLE

Historique de l'article :
Reçu le 6 mars 2014
Accepté après révision le 11 juin 2014
Disponible sur Internet le 8 juillet 2014

Présenté par le Comité de rédaction

RÉSUMÉ

On étudie le comportement en temps long de la vitesse d'une particule à haute énergie dans un potentiel aléatoire et dépendant du temps. On montre que l'énergie cinétique $E(t)$ du système croît avec le temps comme $t^{\frac{2}{5}}$.

ABSTRACT

We study the long-time behaviour of the velocity of a particle at high energy in a random time-dependent force field that derives from a gradient. We show that the system's kinetic energy $E(t)$ grows with time as $t^{\frac{2}{5}}$.

1. Introduction

On considère un potentiel $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$ borné et à support compact en sa première variable dans $B(0, \frac{1}{2})$.

Le but de ce travail est d'étudier le comportement de la vitesse d'une particule dans $\mathbb{R}^d$ qui satisfait l'équation de Newton suivante :

$$\ddot{q}(t) = -\sum_i \lambda_i \nabla V\big(q(t) - r_i, \omega t + \phi_i\big), \quad q(0) = q_0,\ \dot{q}(0) = v_0. \tag{1}$$

Le vecteur pulsation $\omega \in \mathbb{R}^m$ est fixé et on suppose que $(\omega \cdot \nabla_\phi)V \neq 0$, de sorte que la particule soit sous l'influence d'un potentiel quasi-périodique en temps. Ici $\nabla_\phi V$ désigne la dérivée partielle de V par rapport à sa deuxième variable. La famille $(r_i \in \mathbb{R}^d)_i$ est dénombrable et localement finie ; elle peut être aléatoire ou déterministe. Chaque r_i représente alors le centre d'un « diffuseur », c'est-à-dire une région de $\mathbb{R}^d$ (ici une boule de centre r_i et de rayon $\frac{1}{2}$) où l'impulsion de la particule varie

Adresses e-mail : emilie.soret@math.univ-lille1.fr (É. Soret), stephan.de-bievre@math.univ-lille1.fr (S. De Bièvre).

http://dx.doi.org/10.1016/j.crma.2014.06.002
1631-073X/

sous l'influence d'une force. Les phases ϕ_i et les constantes de couplage λ_i sont des variables aléatoires i.i.d. dans $\mathbb{T}^m$ et $\mathbb{R}$, respectivement.

La particule rencontre donc successivement différents diffuseurs et sa trajectoire entre deux collisions est rectiligne. Quand le potentiel V ne dépend pas du temps, l'énergie cinétique d'une telle particule est préservée en dehors des diffuseurs et reste donc uniformement bornée en temps. Dans le cas présent, en revanche, où le potentiel dépend du temps, l'énergie cinétique de la particule n'est pas conservée ; on s'attend à ce que l'énergie cinétique $E(t) = \frac{1}{2}\|\dot{q}(t)\|^2$ croisse avec le temps, car il n'y a pas, dans ce modèle, un quelconque mécanisme de dissipation d'énergie (voir [1]). Ce phénomène est connu sous le nom d'accélération stochastique.

Une analyse numérique de ce modèle, faite dans [2] et [1], soutient qu'asymptotiquement en temps et pour $d \geq 2$, $\mathbb{E}(E(t)) \sim t^{\frac{2}{5}}$, où l'espérance est sur la loi des λ_i et des ϕ_i. Dans ce papier, nous corroborons ces résultats numériques par une analyse rigoureuse : pour cela, nous étudierons un modèle simplifié du mouvement que nous décrivons maintenant. L'idée est de modéliser l'évolution de $\dot{q}(t)$ par une chaîne de Markov où chaque pas correspond à la rencontre de la particule avec un diffuseur. Afin de construire cette chaîne de Markov, on remarque que les trajectoires solutions $(\dot{q}(t), q(t))$ de (1) peuvent être vues comme un processus aléatoire dans un espace probabilisé généré par (λ_i, r_i, ϕ_i). À chaque trajectoire $(\dot{q}(t), q(t))$ on associe une suite $(t_n, v_n, b_n, r_{i_n}, \lambda_{i_n}, \phi_{i_n})$ où t_n est le moment où la particule arrive sur le n-ième diffuseur avec un paramètre d'impact $b_n \in \mathbb{R}^d$ orthogonal au vecteur vitesse $v_n := \dot{q}(\tau_n)$; r_{i_n} est le centre du n-ième diffuseur visité par la particule et λ_{i_n} et ϕ_{i_n} sont respectivement la constante de couplage et la phase associées à ce diffuseur.

Le changement de vitesse subi par une particule arrivant suffisamment vite ([2] montre que cela revient à imposer $v_n > 12|\lambda_n|\,\|\nabla V\|_\infty$) sur le n-ième diffuseur peut s'écrire :

$$v_{n+1} = v_n + R(v_n, b_n, \lambda_{i_n}, \phi_{i_n}). \tag{2}$$

Pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, $b \in \mathbb{R}^d$ avec $v \cdot b = 0$ et $(\phi, \lambda) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}$ on a

$$R(v, b, \lambda, \phi) = -\lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, \nabla V\big(q(t), \omega t + \phi\big),$$

et $q(t)$ est l'unique solution de

$$\ddot{q}(t) = -\lambda \nabla V\big(q(t), \omega t + \phi\big), \qquad q(0) = b - \frac{1}{2}\frac{v}{\|v\|}, \qquad \dot{q}(0) = v. \tag{3}$$

Dans le cas où la particule arrive sur un diffuseur dans un état de basse énergie, il nous est impossible de décrire sa dynamique de cette façon. Nous verrons (voir Section 2) comment éviter cette situation.

Une fois que la particule n'est plus sous l'influence du n-ième diffuseur, elle parcourt à vitesse constante v_{n+1} la distance ℓ_{n+1} entre le n-ième et le $n+1$-ième diffuseur rencontrés, à la suite de quoi elle entre sous l'influence du $n+1$-ième diffuseur. En se basant sur cette description de la dynamique et en ignorant les possibles recollisions, c'est-à-dire en admettant que la particule ne repasse jamais dans un diffuseur qu'elle a déjà traversé, on peut approcher la solution $(q(t), \dot{q}(t))$ de (1) par une chaîne de Markov dont chaque pas représente le passage dans un diffuseur. Les variables λ_n et ϕ_n caractérisent alors le n-ième diffuseur visité et b_n la façon dont la particule arrive sur ce diffuseur. Pour définir précisément cette chaîne, ces trois variables sont choisies aléatoirement et indépendamment après chaque passage dans un événement diffusif. Ainsi, partant de (q_0, v_0), on détermine de manière itérative la position et la vitesse de la particule ainsi que l'instant avant son entrée dans le n-ième diffuseur par les relations

$$\left.\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + R(v_n, b_n, \lambda_{i_n}, \phi_{i_n}) \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{\ell_n}{\|v_{n+1}\|} \\ q_{n+1} &= q_n + v_{n+1}(t_{n+1} - t_n), \end{aligned}\right\}$$

où on note $q_n = q(t_n)$. On apporte une dernière simplification en remplaçant la variable aléatoire ℓ_n par la distance moyenne ℓ entre deux centres de diffuseurs visités successivement. On définit finalement la chaîne de Markov que nous étudierons dans ce papier :

$$\left.\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + R(v_n, b_n, \lambda_{i_n}, \phi_{i_n}) \\ t_{n+1} &= t_n + \frac{\ell}{\|v_{n+1}\|} \\ q_{n+1} &= q_n + v_{n+1}(t_{n+1} - t_n). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Cette dernière chaîne de Markov décrit le comportement d'une particule dans un système plus simple, mais tout de même assez fidèle au système original. Précisement, les variables b_n sont tirées aléatoirement et de manière indépendante à chaque pas suivant une loi uniforme dans $B(0, \frac{1}{2})$ et conditionnée à ce que $b_n \cdot v_n = 0$. Les λ_n et ϕ_n sont aussi aléatoirement tirées à chaque pas et forment des suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées dans $[-1, 1]$ et

$\mathbb{T}^m$ respectivement. Dans le modèle original décrit par (1), rien d'exclut de possibles recollisions. Néanmoins, les résultats numériques dans [2] et [1] étant en accord avec nos résultats sur le comportement asymptotique de $\|\dot{q}(t)\|$ pour le modèle simplifié défini par (4), ils laissent à penser que ces recollisions n'ont un impact que négligeable sur la dynamique du modèle défini par (1).

En développant le transfert d'impulsion R pour $\|v\|$ grand et en considérant $\xi_n = \frac{\|v_n\|^3}{3D}$ avec $D > 0$ (voir (6)), l'étude de $\|v_n\|$ dans (4) revient à celle de la chaîne de Markov discrète $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\xi_{n+1} = \xi_n + w_n + \frac{\gamma}{\xi_n} + O_0\big(\xi_n^{-\frac{1}{3}}\big) + O\big(\xi_n^{-\frac{4}{3}}\big), \qquad \xi_0 = \frac{\|v_0\|}{3D}. \tag{5}$$

La notation $O_0(\xi)$ correspond à un $O(\xi)$ de moyenne nulle. De plus $\gamma = \frac{d-2}{6}$, $w_n = \frac{\beta_n}{D}$ et la variable aléatoire β_n est centrée et de variance égale à D^2 dont la forme explicite est la suivante :

$$\beta_n = \lambda_n \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\, \omega \cdot \nabla_\phi V\left(b_n + y\frac{v_n}{\|v_n\|}, \phi_n\right). \tag{6}$$

La suite de variables aléatoires (w_n) ainsi définie est i.i.d. et telle que

$$\mathbb{E}(w_n) = 0, \qquad \mathbb{E}\big(w_n^2\big) = 1.$$

Le passage du système (4) à la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ décrite par (5) est fait en détail dans [2] et [1].

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $q(t_n) = q_n$ et

$$q(t) = q(t_n) + (t - t_n)v_{n+1}, \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Le résultat principal est alors le suivant.

Théorème 1.1. *Soit $d \geq 6$. Alors, pour tout $\nu > 0$ il existe $c(\nu, v_0) > 0$, $C(\nu, v_0) > 0$ constantes dépendantes de v_0 et de ν telles que*

$$\lim_{\|v_0\|\to+\infty} \mathbb{P}\big(\forall t \geq 0;\ c(\nu, v_0)t^{\frac{1}{5}-\nu} \leq \|\dot{q}(t)\| \leq C(\nu, v_0)t^{\frac{1}{5}+\nu}\big) = 1.$$

2. Stratégie de preuve

Dans (1), si la vitesse avec laquelle la particule entre dans un diffuseur est faible, aucune information sur son comportement (trajectoire et évolution de la vitesse) n'est disponible. En effet, $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{T}^m)$ étant borné et à support compact en sa variable spatiale dans $B(0, \frac{1}{2})$, une solution globale de (3) existe toujours. Néanmoins, il peut arriver que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\|q(t)\| < \frac{1}{2}$ et, dans ce cas, $R(v_n, b_n, \lambda_n, \phi_n)$ n'est pas défini et $v_{n+1}, t_{n+1}, q_{n+1}$ n'existent pas. Trajectoriellement, cela traduit le fait que si v_n est trop faible, la trajectoire de la particule va rester enfermée dans le n-ième diffuseur. Nous montrons que l'hypothèse $d \geq 6$ du Théorème 1.1 rend la chaîne de Markov $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décrite dans (4) transiente. Par conséquent, partant d'une vitesse initiale suffisamment élevée, la particule ne pourra presque sûrement pas atteindre un état de basse énergie et $\mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N},\ R(v_n, b_n, \lambda_n, \phi_n) < +\infty) = 1$. Le problème du piégeage de la particule à l'intérieur d'un diffuseur ne se présente pas dans ce cas.

Afin de démontrer le Théorème 1.1, nous considérons une classe de chaînes de Markov plus générale que (5), définie comme suit. Soit $(w_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. telle que :

$$\mathbb{E}(w_n) = 0, \quad \mathbb{E}\big(w_n^2\big) = 1, \quad \exists\, \overline{w} \geq 1,\ |w_n| \leq \overline{w}.$$

Soit $F : \mathbb{R}_+^* \times [-\overline{w}, \overline{w}] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction mesurable satisfaisant les propriétés suivantes :

Hypothèse 1. Il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et $0 < \xi_- < \xi_+$ tels que F est continue sur $[\xi_-, +\infty) \times [-\overline{w}, \overline{w}]$ et, pour tout $\xi > \xi_+$,

$$F(\xi, w) = \xi + w + \frac{\gamma}{\xi} + O_0\big(\xi^{-\alpha}\big) + O\big(\xi^{-\beta}\big),$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.

On définit alors la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ par

$$\xi_{n+1} = F(\xi_n, w_n), \quad \xi_0 > 0. \tag{7}$$

Le résultat technique principal de cet article porte sur le comportement asymptotique des chaînes de Markov ainsi définies.

Théorème 2.1. *Soit $F : \mathbb{R}_+^* \times [-\overline{w}, \overline{w}] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction satisfaisant l'Hypothèse 1. Soit $(w_n)_n$ une suite de variables aléatoires i.i.d. centrées, réduites et dont la valeur absolue est bornée par $\overline{w}$ et soit $(\xi_n)_n$ une chaîne de Markov définie par (7). Supposons $\gamma > \frac{1}{2}$. Alors :*

i) *pour tout $0 < p \leq 1$ et pour tout $\nu > 0$, il existe $\xi_* > \xi_+$ tel que pour tout $\xi_0 \geq \xi_*$, on a*

$$\mathbb{P}\big(\forall k \in \mathbb{N},\ \big(\xi_0 + k^{\frac{1}{2}}\big)^{1-\nu} \leq \xi_k \leq \big(\xi_0 + k^{\frac{1}{2}}\big)^{1+\nu}\big) \geq 1 - p;$$

ii) *pour tout $\nu > 0$, on a*

$$\lim_{\xi_0 \to +\infty} \mathbb{P}\big(\forall k \in \mathbb{N},\ \big(\xi_0 + k^{\frac{1}{2}}\big)^{1-\nu} \leq \xi_k \leq \big(\xi_0 + k^{\frac{1}{2}}\big)^{1+\nu}\big) = 1.$$

Nous esquissons maintenant la stratégie de preuve de ce théorème, qui repose en grande partie sur des méthodes introduites dans [3] pour un problème similaire et sur un lemme de moyennisation (Lemme 2.2).

On introduit $\varepsilon = \xi_0^{-1}$ et $R_n^\varepsilon := \varepsilon \xi_n$. On remarque que $R_0^\varepsilon = 1$ indépendamment de ε et que $(R_n^\varepsilon)_n$ satisfait

$$R_{n+1}^\varepsilon = G\big(\varepsilon, R_n^\varepsilon, w_n\big)$$

où, pour tout $x > \varepsilon \xi_+$

$$G(\varepsilon, x, w) = x + \varepsilon w + \varepsilon^2 \frac{\gamma}{x} + \varepsilon^{\alpha+1} O_0\big(x^{-\alpha+1}\big) + \varepsilon^{\beta+1} O\big(x^{-\beta}\big).$$

Là encore, la notation $O_0(x)$ représente un $O(x)$ de moyenne nulle. On construit alors un processus continu en temps par interpolation linéaire entre les R_n^ε. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \varepsilon^2 n$ et pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}]$

$$R^\varepsilon(t) = \frac{t_{n+1} - t}{\varepsilon^2} R_n^\varepsilon + \frac{t - t_n}{\varepsilon^2} R_{n+1}^\varepsilon.$$

Lemme 2.2. *On suppose $\gamma > \frac{1}{2}$. Alors la famille de processus continus $(t \to R^\varepsilon(t))_{\varepsilon>0}$ converge en distribution vers un processus de Bessel $(R(t))_t$ de dimension $2\gamma + 1$ et tel que $R(0) = 1$.*

Ce lemme nous permettra d'étudier le comportement de $(\xi_n)_n$ en se ramenant à celui de $(R(t))_t$ et en appliquant le Théorème Porte-Manteau. Il s'avère que lorsque $\gamma > \frac{1}{2}$ (équivalent à $d \geq 6$), le processus de Bessel $(R(t))_t$ est transient. On peut alors montrer que la chaîne de Markov décrite par (7) reste avec une probabilité égale à 1 au-dessus de ξ_+ pourvu que $\xi_0 \gg \xi_+$, ce qui confirme le fait qu'analyser (7) est suffisant pour comprendre (5) avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{4}{3}$. La transience de $(\xi_n)_n$ (et donc la restriction à $d \geq 6$) nous autorise à ne faire aucune hypothèse sur le comportement de $F(\xi, \cdot)$ dans (5) lorsque $\xi < \xi_+$. Cette restriction sur d apparaît dans la preuve du Lemme 2.2, qui est le premier élément de celle du Théorème 2.1.

Les techniques pour montrer le Lemme 2.2 sont bien connues et font l'objet du Chapitre 11 de [4]. En particulier, comme dans [1], on résout principalement un problème aux martingales associé à un processus de Bessel et on utilise la convergence du générateur infinitésimal de $(R^\varepsilon(t_n))_n$ vers celui de $(R(t))$. Plus précisément, on limite l'évolution des trajectoires des processus R^ε à un compact $K \subset \mathbb{R}_+$ fixe, en les arrêtant avant qu'elles ne sortent de K. On montrera que la famille de processus arrêtés converge en distribution vers la solution du problème aux martingales associé au générateur infinitésimal d'un processus de Bessel de dimension $2\gamma + 1$ dont la trajectoire est contenue dans le compact K. Afin d'étendre la convergence à $(R^\varepsilon)_\varepsilon$ vers $(R(t))_t$, on supprimera les temps d'arrêt introduits en faisant tendre K vers $\mathbb{R}_+$. La transience de $(R(t))_t$ lorsque $\gamma > \frac{1}{2}$ est indispensable pour pouvoir supprimer les temps d'arrêt.

Une fois cette convergence obtenue, on introduit un processus auxiliaire $(\eta_\ell)_\ell$ et des temps d'arrêt correspondants $(\tau_\ell)_\ell$ comme suit. Soient $L > 0$, $J_\eta = [2^\eta - L, 2^\eta + L]$ et $\eta_+ > 0$ tels que pour tout $\eta, \eta > \eta'_+$ avec $\eta \neq \eta'$, $J_\eta \cap J_{\eta'} = \emptyset$. On définit alors :

$$\tau_0 = 0, \qquad \tau_{\ell+1} := \{n > \tau_\ell;\ \eta_n \in J_{\eta_\ell - 1} \cup J_{\eta_\ell + 1}\},$$

$$\eta_{\ell+1} := \eta_\ell + 1 \quad \text{si } \xi_{\tau_{\ell+1}} \in J_{\eta_\ell+1} \quad \text{et} \quad \eta_{\ell+1} := \eta_\ell - 1 \quad \text{si } \xi_{\tau_{\ell+1}} \in J_{\eta_\ell - 1}.$$

On remarque qu'en imposant en plus $L > \overline{w}$, la chaîne de Markov $(\xi_n)_n$ ne peut pas sauter un intervalle J_η sans le visiter. On a donc construit $(\eta_\ell)_\ell$ et $(\tau_\ell)_\ell$ de sorte que

$$\xi_{\tau_\ell} \sim 2^{\eta_\ell}. \tag{8}$$

On note toutefois que le processus $(\eta_\ell)_\ell$ n'est pas une chaîne de Markov. Les incréments de $(\eta_\ell)_\ell$ valent ± 1 et $\tau_{\ell+1} - \tau_\ell$ est le temps nécessaire à $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour doubler ou réduire de moitié sa valeur.

L'idée est alors de se ramener au processus $(R^\varepsilon(t))_t$ et de se servir du Lemme 2.2 via le Théorème Porte-Manteau et d'utiliser les propriétés d'un processus de Bessel transient afin de montrer les deux lemmes suivants. Le Lemme 2.3 porte sur le comportement de $(\eta_\ell)_\ell$.

Lemme 2.3.

(i) *Supposons* $\gamma > \frac{1}{2}$. *Pour tout* $\delta > 0$, *il existe* $\tilde{\eta} > \eta_+$ *tel que pour tout* $\ell \in \mathbb{N}^*$ *et pour presque tous* $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{\ell-1} \geq \eta_+$, $\eta_\ell > \tilde{\eta}$, *on a*

$$\left|\mathbb{P}(\eta_{\ell+1} = \eta_\ell \pm 1 | \eta_\ell, \ldots, \eta_0) - p_\pm\right| < \delta, \tag{9}$$

où $p_+ = \frac{2^{2\gamma-1}-1}{2^{2\gamma-1}-2^{1-2\gamma}} > \frac{1}{2}$ *et* $p_- = 1 - p_+$.

(ii) *Pour tout* $0 < p \leq 1$ *et pour tout* $\delta > 0$, *il existe* $\eta_* > \eta_+$ *tel que pour tout* $\eta_0 \geq \eta_*$

$$\mathbb{P}\big(|\eta_\ell - \mu\ell - \eta_0| \leq \delta(\ell + \eta_0), \forall \ell \in \mathbb{N}\big) \geq 1 - p,$$

où $\mu = 2p_+ - 1 > 0$.

On montrera en particulier que $(\eta_\ell)_\ell$ est une surmartingale. L'affirmation (i) du Lemme 2.3 met en évidence le fait que le processus $(\eta_\ell)_\ell$ est drifté vers la droite, ce qui est dû à la transience de $(\xi_n)_n$. Le Lemme 2.4 nous fournit un contrôle sur $\tau_{\ell+1} - \tau_\ell$.

Lemme 2.4. *Supposons* $\gamma > \frac{1}{2}$

i) *Il existe* $\eta_* > \eta_+$ *et* $0 < q_1 < 1$ *tels que pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $\ell \in \mathbb{N}$ *:*

$$\sup_{\eta > \eta_*} \sup_{x \in J_\eta} \mathbb{P}\big(\tau_{\ell+1} - \tau_\ell > m2^{2\eta} \big| \xi_{\tau_\ell} = x\big) < q_1^m.$$

ii) *Il existe* $\eta_* > \eta_+$ *et* $0 < q_2 < 1$ *tels que pour tout* $\ell \in \mathbb{N}$ *:*

$$\sup_{\eta > \eta_*} \sup_{x \in J_\eta} \mathbb{P}\big(\tau_{\ell+1} - \tau_\ell < 2^{2\eta} \big| \xi_{\tau_\ell} = x\big) < q_2.$$

Ainsi, en combinant les Lemmes 2.3 et 2.4 avec (8), on obtient qu'avec grande probabilité :

$$\xi_{\tau_\ell} \sim \sqrt{\tau_\ell}. \tag{10}$$

Le contrôle sur $\tau_{\ell+1} - \tau_\ell$ obtenu dans le Lemme 2.4 nous permettra de conclure en interpolant (10) à tout $k \in \mathbb{R}_+$.

Remerciements

Ce travail est soutenu en partie par le Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01).

Références

[1] B. Aguer, Comportements asymptotiques dans des gaz de Lorentz inélastiques, thèse de doctorat en mathématiques appliquées, université Lille-1, 2010.
[2] B. Aguer, S. De Bièvre, P. Lafitte, P.E. Parris, Classical motion in force fields with short range correlations, J. Stat. Phys. 138 (4–5) (2010) 780–814.
[3] D. Dolgopyat, L. Koralov, Motion in a random force field, Nonlinearity 22 (1) (2009) 187–211.
[4] Daniel W. Stroock, S.R. Srinivasa Varadhan, Multidimensional Diffusion Processes, Grundlehren Math. Wiss. (Principes fondamentaux des sciences mathématiques), vol. 233, Springer-Verlag, Berlin, 1979.